

**КРИТИЧНІ СТАНИ ВЗАЄМОДІЇ ХВИЛЬ СИЛЬНИХ РОЗРИВІВ
З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА****Іванченко Г.М., д.т.н., доцент***Київський національний університет будівництва та архітектури*

Вступ. Для захисту від впливу землетрусу – одного з найбільш руйнівних явищ природи, час і місце виникнення якого спрогнозувати практично неможливо, важливо знати процеси перетворення сейсмічних хвиль в тектонічних структурах, особливості проходження їх через неоднорідності та умови виникнення аномальних явищ, механізмів підсилення або ослаблення цих хвиль. Ці механізми пов'язані із виникненням геометричних сингулярностей (акустик) на хвильових фронтах [1] і фокусуванням або розсіюванням хвиль випуклими і ввігнутими вільними поверхнями середовищ [8], поверхнями розділу середовищ [2, 4, 5, 9] та пружними лінзами [3, 5]. Для вивчення цих явищ зручно використати модель хвиль сильних розривів і аналізувати їх за допомогою нульового наближення променевого методу, що дозволяє будувати фронти хвиль і визначати величину розривів параметрів хвиль на цих фронтах [6, 7, 11]. В цьому випадку рівняння ейконалу описує еволюцію поверхні фронту хвилі, нульовий член ряду апроксимації визначає величину розриву польової функції на поверхні фронту, а решта членів ряду – зміну поля за фронтом. З використанням такого підходу виконані дослідження критичних станів взаємодії хвилі сильних розривів з криволінійними поверхнями і межами розділу середовищ [2-5, 8, 9].

Критичні стани поширення хвиль сильних розривів мають місце при самих простих дифракційних перетвореннях на плоских поверхнях розділу та вільних поверхнях не лише анізотропних пружних середовищ, а навіть ізотропних. Вони обумовлені деякими критичними кутами падіння фронту, коли лінія перетину падаючої, заломлених і відображених хвиль рухаються по поверхні розділу середовищ або вільній поверхні з деякою критичною швидкістю. Для вивчення цих явищ є потреба у побудові фронтів відображених і заломлених хвиль (кінематична задача) та у визначенні їх інтенсивностей (динамічна задача). Для розв'язування кінематичної задачі, яка для анізотропних середовищ є суттєво нелінійною, застосовується метод Ньютона з використанням алгоритму, викладеному у роботі [4]. Для підрахунку магнітуд розривів польових функцій на фронтах хвиль зручно використати ну-

льове наближення променевого методу з використанням алгоритму, що базується на умові збереження кількості руху при ударній взаємодії падаючої хвилі, відображених і заломлених [10]. При використанні такої методики критичними вважаються стани, при яких інтенсивності хвиль, що сформувались внаслідок дифракції, прагнуть до нескінченності (в рамках теорії лінійних ідеальних пружних середовищ).

Співвідношення взаємодії хвилі сильного розриву з вільною поверхнею пружного середовища. Для постановки кінематичної задачі зручно прийняти локально плоский підхід [8], що дозволить використати узагальнений закон Снелля, якому підкоряються кути падіння $\Theta_{-}^{(r)}$ і відображення $\Theta_{+}^{(\nu)}$ хвиль (кути між напрямками хвильових нормалей і нормаллю до вільної площини середовища), утворених на вільній поверхні середовища

$$\frac{\sin \Theta_{-}^{(r)}}{v_{-}^{(r)}(\Theta_{-}^{(r)})} = \frac{\sin \Theta_{+}^{(\nu)}}{v_{+}^{(\nu)}(\Theta_{+}^{(\nu)})} \quad (r, \nu, \mu = 1, 2),$$

де верхній індекс у дужках показує номер хвилі ($r = 1$ відповідає квазі-поздовжній qP хвилі, $r = 2$ – квазіпоперечній хвилі qS); нижній індекс: знаки «-» і «+» відповідають стану системи до і після взаємодії хвилі з вільною поверхнею G середовища. Згідно цих позначень $v_{-}^{(r)}$ і $v_{+}^{(\nu)}$ є фазовими швидкостями відповідних хвиль.

Для дослідження динаміки взаємодії падаючого фронту на вільну поверхню середовища використовується умова збереження кількості руху його елементів, які залучені до руху

$$\Delta \bar{Q}_{-}^{(1)} = \Delta \bar{Q}_{+}^{(1)} + \Delta \bar{Q}_{+}^{(2)} \quad (1)$$

із індексами, які введени раніше.

Проектуванням векторного рівняння на осі x_1 та x_2 будується система двох лінійних алгебраїчних рівнянь, яка визначає функції швидкостей руху елементів середовища на фронтах хвиль, що утворились внаслідок взаємодії падаючої хвилі з вільною поверхнею середовища

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{b}_p \quad (2)$$

де \mathbf{A} – матриця другого порядку

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} \rho \xi_{+}^{(1)} \cos \Psi_{+}^{(1)} A_{1+}^{(1)} & \rho \xi_{+}^{(2)} \cos \Psi_{+}^{(2)} A_{1+}^{(2)} \end{array} \right\| ;$$

$$\left\| \begin{array}{cc} \rho \xi_+^{(1)} \cos \Psi_+^{(1)} A_{2+}^{(1)} & \rho \xi_+^{(2)} \cos \Psi_+^{(2)} A_{2+}^{(2)} \end{array} \right\|$$

$\mathbf{w} = (\dot{u}_+^{(1)} \quad \dot{u}_+^{(2)})^T$ – вектор значень шуканих швидкостей $\dot{u}_+^{(r)}$ зміщення частинок середовища на фронті відповідної хвилі (рис.1);
 $\mathbf{b}_p = (\rho \xi_-^{(1)} \cos \Psi_-^{(1)} A_{1-}^{(1)} \dot{u}_-^{(1)} \quad \rho \xi_-^{(1)} \cos \Psi_-^{(1)} A_{2-}^{(1)} \dot{u}_-^{(1)})^0$ – вектор правої частини, який відповідає падінню qP -хвилі; ρ – щільність середовища, $\xi^{(r)}$ – променева швидкість відповідної хвилі, $\Psi^{(r)}$ – кути орієнтації променів хвиль сильних розривів, A_1 та A_2 – проекції вектора поляризації хвилі на осі x_1 та x_2 .

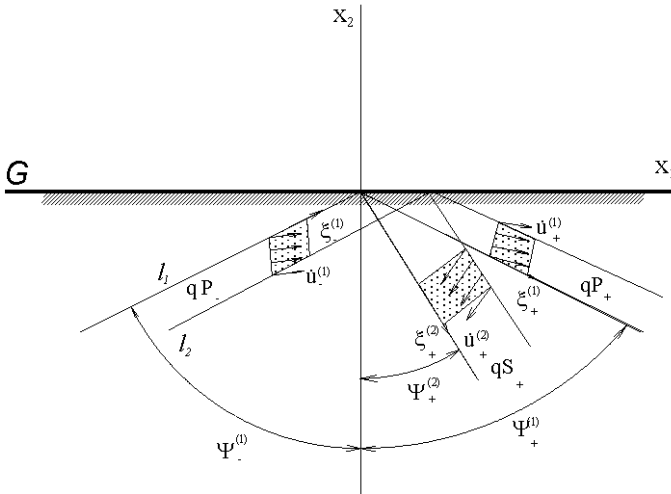


Рис. 1

При падінні квазіпоперечної qS -хвилі на вільну поверхню середовища замість (2) маємо систему

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{b}_s, \quad (3)$$

де \mathbf{A} і \mathbf{w} залишаються незмінними, а вектор \mathbf{b}_s правої частини набуває вигляду

$$\mathbf{b}_S = \left(\rho \xi_-^{(2)} \cos \Psi_-^{(2)} A_{1-}^{(2)} \dot{u}_-^{(2)} \quad \rho \xi_-^{(2)} \cos \Psi_-^{(2)} A_{2-}^{(2)} \dot{u}_-^{(2)} \right)^{\hat{0}}.$$

Якщо середовище ізотропне, то хвилі стають чисто поздовжніми або поперечними, кути $\Psi^{(r)}$ і $\Theta^{(r)}$ співпадають, а променеві та фазові швидкості є однаковими, тобто $v^{(1)} = \alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $v^{(2)} = \beta = \sqrt{\mu/\rho}$. Компоненти вектора поляризації

$$\begin{aligned} \text{для падаючої } P\text{-хвилі:} \quad & A_{1-}^{(1)} = \sin \Theta_-^{(1)}, \quad A_{2-}^{(1)} = \cos \Theta_-^{(1)}; \\ \text{для падаючої } S\text{-хвилі:} \quad & A_{1-}^{(2)} = \cos \Theta_-^{(2)}, \quad A_{2-}^{(2)} = -\sin \Theta_-^{(2)}; \\ \text{для відображеної } P\text{-хвилі:} \quad & A_{1+}^{(1)} = \sin \Theta_+^{(1)}, \quad A_{2+}^{(1)} = \cos \Theta_+^{(1)}; \\ \text{для відображеної } S\text{-хвилі:} \quad & A_{1+}^{(2)} = \cos \Theta_+^{(2)}, \quad A_{2+}^{(2)} = -\sin \Theta_+^{(2)}. \end{aligned}$$

Враховуючи ці спрощення система (2) приводиться до вигляду

$$\begin{aligned} & \rho \alpha \sin \Theta_+^{(1)} \cos \Theta_+^{(1)} \dot{u}_+^{(1)} - \rho \beta \cos^2 \Theta_+^{(2)} \cdot \dot{u}_+^{(2)} = \\ & = \rho \alpha \sin \Theta_-^{(1)} \cos \Theta_-^{(1)} \dot{u}_-^{(1)}, \\ & -\rho \alpha \cos^2 \Theta_+^{(1)} \dot{u}_+^{(1)} - \rho \beta \sin \Theta_+^{(2)} \cos \Theta_+^{(2)} \dot{u}_+^{(2)} = \\ & = -\rho \alpha \cos^2 \Theta_-^{(1)} \dot{u}_-^{(1)}, \end{aligned} \quad (4)$$

При падінні S -хвилі на площину G в системі (3) ліва частина залишається незмінною, а праворуч буде вектор \mathbf{b}_S

$$\mathbf{b}_S = \left(\rho \xi_-^{(2)} \cos \Psi_-^{(2)} A_{1-}^{(2)} \dot{u}_-^{(2)} \quad \rho \xi_-^{(2)} \cos \Psi_-^{(2)} A_{2-}^{(2)} \dot{u}_-^{(2)} \right)^{\hat{0}}. \quad (5)$$

Кути падіння $\Theta_-^{(r)}$, при яких система рівнянь Снелля не має розв'язків, називаються кутами квазіповного внутрішнього відображення.

Система рівнянь Снелля дозволяє визначати орієнтацію фронтів плоских відображених хвиль від вільної поверхні G при заданій орієнтації фронту і полярності падаючої хвилі, а за допомогою рівнянь (2) – (4) можна підрахувати інтенсивність (значення розриву швидкості частинок середовища) на фронтах цих хвиль. Стани, в яких визначник матриці \mathbf{A} , набуває нульового значення, є критичним, тому що при на-

ближенні до них розв'язки рівнянь (2), (3) та інтенсивності перетворених хвиль прагнуть до нескінченності.

Визначник матриці коефіцієнтів правої частини системи (4) дорівнює

$$\begin{aligned} D_1 &= -\alpha\beta \cos \Theta^{(1)} \cos \Theta^{(2)} (\sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} + \cos \Theta^{(1)} \cos \Theta^{(2)}) = \\ &= -\alpha\beta \cos \Theta^{(1)} \cos \Theta^{(2)} \cos(\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)}). \end{aligned} \quad (6)$$

Оскільки кути падіння і відображення поздовжньої хвилі можуть змінюватись в межах $0 \leq \Theta^{(1)} < \pi/2$, величина $\cos \Theta^{(1)}$ в (4) не може приймати нульового значення. Кут відображення поперечної хвилі $\Theta^{(2)} < \Theta^{(1)}$, тому також $\cos \Theta^{(2)} \neq 0$. Із-за приведених умов різниця $\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)}$ завжди є меншою за $\pi/2$, тому $0 < \cos(\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)}) < 1$ і детермінант D_1 , який визначається по формулі (6), ніколи не приймає нульового значення. Тому розв'язок системи (4) однозначний і обмежений. Звідси можна зробити висновок про те, що у випадку падіння плоскої P -хвилі на вільну поверхню G пружного ізотропного середовища критичні стани не виникають. Однаке ситуація змінюється, якщо надає на вільну поверхню поперечна S -хвиля. В такому разі система (3) також приводиться до рівнянь вигляду (4), в правій частині яких записується двохмірний вектор $\mathbf{b}_S = (-\beta \cos \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)}, -\beta \cos \Theta^{(2)} \sin \Theta^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{(2)})^T$. Детермінант D_2 цієї системи зберігає вигляд (6), але в цьому випадку кут падіння поперечної хвилі $0 \leq \Theta^{(2)} < \pi/2$, і так як $\Theta^{(1)} > \Theta^{(2)}$, кут $\Theta^{(1)}$ може прийняти значення $\Theta^{(1)} = \pi/2$, при якому $\cos \Theta^{(1)} = 0$, $D_2 = 0$ і розв'язок $\dot{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\dot{\mathbf{u}}^{(2)}$ набуває як завгодно великих значень. Звідси витікає другий важливий висновок про те, що при падінні S -хвилі на вільну поверхню критичний стан виникає при $\Theta^{(1)} = \pi/2$ або, у відповідності із законом Снелля, при

$$\Theta_{кр}^{(2)} = \arcsin(\beta/\alpha) \quad (7)$$

Таким чином, у даному випадку, в відшуканні із динамічних міркувань умови (7) виникнення критичних станів падіння S -хвилі на вільну поверхню середовища співпадають із умовами виникнення квазіповного внутрішнього відображення падаючої S -хвилі, що впливають із

кінематичних співвідношень Снелля. Цим можна пояснити ефекти розлому вільної поверхні Землі при землетрусах, що супроводжується поперечними зміщеннями їх берегів на поверхні. Якщо поперечна хвиля, яка рухається від місця сейсмічного збурення, має фронт, близький до сферичного, то при падінні його на вільну поверхню Землі кут падіння змінюється від нуля до 90° , приймаючи в тому числі проміжне значення $\Theta_{кр}^{(r)}$. В цьому стані і утворюється розлом на поверхні.

Якщо середовище є анізотропне, то задача аналізу динамічної взаємодії хвиль сильних розривів з поверхнею стає складнішою і можливість виявлення цього ефекту може бути реалізованою лише чисельно.

Висновки

Аналіз критичних станів явищ дифракції плоских хвиль сильних розривів на вільній площині пружного середовища показав, що у випадках падіння поздовжньої хвилі з ізотропного середовища критичні стани не реалізуються, а падіння поперечної хвилі супроводжується ефектом квазіповного внутрішнього відображення із необмеженим (в рамках ідеальної теорії пружності) ростом інтенсивності хвиль, які формуються при взаємодії падаючої хвилі з вільною поверхнею.

Розроблений підхід аналізу критичних станів може бути використаним для виявлення найбільш небезпечних зон з точки зору впливу сейсмічних хвиль на об'єкти з ризиком для навколишнього середовища, а також для розробки захисних заходів по мінімізації цього ризику.

Summary

On the basis of radial method the surveying technique of kinematics and dynamics of interactions of disrupted wave patterns with discontinuity of elastic earth with various physical properties was exploited. The critical states of such interconnections were examined. For cases of free surface and also the contacts of structures with launching and without launching it was determined that kinematic and dynamic conditions of critical states appear at the same time.

Література

1. Арнольд В.И. Критические точки функций и классификация каустик //Успехи математических наук. – 1974. – 29, №3. – С.243-244.
2. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Фокусировка и рассеивание плоских ударных волн на поверхности раздела анизотропных упругих сред. //Прикл. механика и техн. физика.– 2002.– Т.43, №5.– С. 21–27.
3. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Фокусировка и рассеивание плоской акустической волны трансверсально-изотропными упругими линзами //Акустический журнал. – 2004. 50, №2 – С.177–183.
4. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред //Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, №3.–С. 394–402.
5. Гуляев В.И., Луговой П.З., Крицкий В.Б., Иванченко Г.М. Отражение и преломление плоских разрывных волн параболоидными поверхностями раздела анизотропных упругих сред //Геофизический журнал. – 2005. – 27, №3.–С. 418–426.
6. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука, 1980. 280 с.
7. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К.: Наукова думка, 1988. 220 с.
8. Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Ivanchenko G.M. Focusing and scattering the nonstationary wave by the free surface of an anisotropic elastic medium //Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N7. – P.86-93.
9. Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Ivanchenko G.M. Diffraction of discontinuous waves on ellipsoidal interfaces of transversally-isotropic elastic media //Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N10. – P.98-106.
10. Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave interaction with interfaces between anisotropic elastic media //International Journal of Solids and Structures – 2006. – 43. – P. 74-90.
11. Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media //International Journal of Solids and Structures – 2002. – 40(1). – P. 237-247.