

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН

Оробей В.Ф.¹, Ковров А.В.², Ковтуненко А.В.², Карманова М.И.²

¹ *Одесский национальный политехнический университет,*

² *Одесская государственная академия строительства и архитектуры*

Актуальность исследований. Одним из важнейших элементов в каркасах железобетонных зданий является перекрытие, обладающее выраженными распределительными способностями. В связи с этим, для учета реальных физических процессов, происходящих в конструкциях, необходимо совершенствование существующих методик, в том числе с использованием численно-аналитического метода граничных элементов.

Целью работы является разработка методик для определения напряженно-деформированного состояния пластин с использованием численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ).

Основное уравнение теории изгиба пластин в упругой стадии [3]

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1)$$

В работе [2] задача Коши одномерной модели изгиба прямоугольной пластины определяется по формулам:

$$\begin{aligned} W^{IV}(y) - 2r^2 W''(y) + s^4 W(y) &= q(y)/D; \\ DW(0); D\theta(0) &= DW'(0); M(0) = -DA[W''(0) - \mu r^2 W(0)]; \\ Q(0) &= -DA[W'''(0) - (2 - \mu)r^2 W'(0)]. \end{aligned} \quad (2)$$

где $r^2 = -B/A$; $s^4 = C/A$; $q(y) = \int_0^{l_1} q(x, y) X(x) dx / A$;

$$A = \int_0^{l_1} X^2(x) dx; B = \int_0^{l_1} X''(x) X(x) dx; C = \int_0^{l_1} X^{IV}(x) X(x) dx. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) зависит от корней характеристического уравнения, которые представляются выражением

$$k_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \quad (4)$$

Вид фундаментальных функций [1], как следует из (4), определяется соотношением между r и s , которое зависит от граничных условий на продольных кромках пластины. Решение задачи Коши (2) можно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} DW(y) \\ D\theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_1 & -A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & -A_{23} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} DW(0) \\ D\theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} + \int_0^y \begin{pmatrix} A_{14}(y-\xi) \\ A_{13}(y-\xi) \\ -A_{12}(y-\xi) \\ -A_{11}(y-\xi) \end{pmatrix} q(\xi) d\xi \quad (5)$$

Согласно [1] решение уравнения Жермен-Лагранжа по методу Канторовича-Власова будет заключаться в определении функции прогибов, где функция $X(x)$ задана, а функция $W(y)$ определяется по формуле:

$$DW(y) = A_{11} \cdot Dw(0) + A_{12} \cdot D\theta(0) - A_{13} \cdot M(0) - A_{14} \cdot Q(0) + \int_0^y A_{14}(y-\xi) q(\xi) d\xi \quad (6)$$

Элементы матрицы $A(i)$ в случае шарнирного опирания продольных кромок определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= ychry; \quad \varphi_2 = chry; \quad \varphi_3 = shry; \quad \varphi_4 = yshry; \\ A_{11} &= \varphi_2 - \frac{(1-\mu)r}{2} \varphi_4; \quad A_{12} = \frac{(1-\mu)}{2} \varphi_1 + \frac{(1+\mu)}{2} \varphi_3; \quad A_{13} = \frac{\varphi_4}{2rA}; \\ A_{14} &= \frac{r\varphi_1 - \varphi_3}{2r^3A}; \quad A_{21} = \frac{r(1+\mu)}{2} \varphi_3 - \frac{(1-\mu)r^2}{2} \varphi_1; \\ A_{22} &= \varphi_2 + \frac{(1-\mu)r}{2} \varphi_4; \quad A_{23} = \frac{1}{2A} \varphi_1 + \frac{1}{2rA} \varphi_3; \quad A_{31} = -\frac{(1-\mu)^2 r^3 A}{2} \varphi_4; \\ A_{32} &= A \left[(1-\mu)^2 r^2 \varphi_1 + (1-\mu)(3+\mu)r\varphi_3 \right] / 2; \\ A_{41} &= A \left[(1-\mu)^2 r^4 \varphi_1 - (1-\mu)(3+\mu)r^3 \varphi_3 \right] / 2; \end{aligned} \quad (7)$$

$$X(x) = \sin\left(\frac{\omega x}{l_1}\right); A = \frac{l_1}{\omega} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\omega\right); \quad (8)$$

$$B = -\frac{\omega}{l_1} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\omega\right); C = \left(\frac{\omega}{l_1}\right)^3 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\omega\right)$$

$$r^2 = \frac{-B}{A} = \left(\frac{\omega}{l_1}\right)^2; S^4 = \frac{C}{A} = \left(\frac{\omega}{l_1}\right)^4 \quad (9)$$

Элементы матрицы $B(l_i)$ в случае шарнирного опирания продольных кромок определяются по формулам:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{q}{2r^4 A} \left\{ \left[r\varphi_4(y-d_H)_+ + 2H(y-d_H)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^b - \right. \\ &\quad \left. - \left[r\varphi_4(y-d_k)_+ + 2H(y-d_k)_- - 2\varphi_2(y-d_k)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_k}^b \right\}; \\ B_{21} &= \frac{q}{2r^3 A} \left\{ \left[r\varphi_1(y-d_H)_+ - \varphi_3(y-d_H)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^b - \right. \\ &\quad \left. - \left[r\varphi_1(y-d_k)_+ - \varphi_3(y-d_k)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_k}^b \right\}; \\ B_{31} &= \frac{q}{2r^2} \left\{ \left[(1-\mu)r\varphi_4(y-d_H)_+ + 2\mu\varphi_2(y-d_H)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^b - \right. \\ &\quad \left. - \left[(1-\mu)r\varphi_4(y-d_k)_+ + 2\mu\varphi_2(y-d_k)_- - 2\mu H(y-d_k)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_k}^b \right\}; \\ B_{41} &= \frac{q}{2r} \left\{ \left[(3-\mu)\varphi_3(y-d_H)_+ - (1-\mu)r\varphi_1(y-d_H)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^b - \right. \\ &\quad \left. - \left[(3-\mu)\varphi_3(y-d_k)_+ - (1-\mu)r\varphi_1(y-d_k)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_k}^b \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

где $\gamma_q(\omega) = \frac{l_1}{\omega} \left(-\cos \frac{\omega x}{l_1} \right);$

$$b = l_1.$$

На рис. 1 приведена разработанная блок-схема алгоритма формирования матриц разрешающего уравнения численно-аналитического варианта метода граничных элементов, позволяющая определять внутренние усилия и перемещения в пластинчатых конструкциях с использованием ЧА МГЭ.

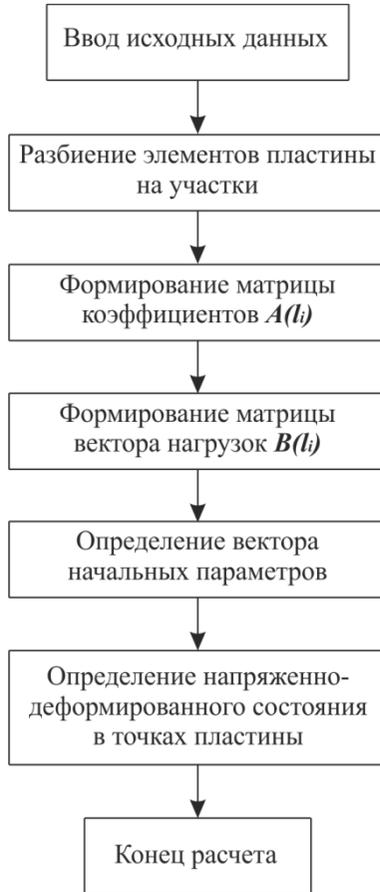


Рис. 1 Блок-схема расчета пластинчатых конструкций

При расчете пластин с использованием двойных тригонометрических рядов функция прогибов представляется в виде:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (11)$$

Для определения прогибов и изгибающих моментов используется выражение [4]:

$$w = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2};$$

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \mu \frac{n^2}{k^2}}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (12)$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n^2}{\mu^2} + \mu m^2}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{k^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

где q - интенсивность распределенной нагрузки,

$m=1, 3, 5, \dots, \infty$; $n=1, 3, 5, \dots, \infty$,

a, b - размеры пластины,

$$k = \frac{b}{a}$$

Рассмотрим прямоугольную пластину, шарнирно опертую по контуру, имеющую размеры $l=2\text{м}$, $l_1=2\text{м}$, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой равной 1кН/м^2 (рис.2.)

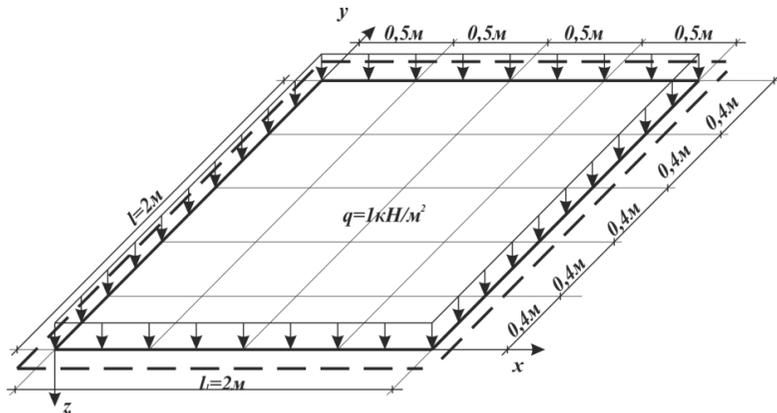


Рис. 2. Расчетная схема пластинки

Разбиваем конструкцию сеткой размером 0,4 м. Прогибы и изгибающие моменты определяются в центре каждой полосы по всей длине.

Расчет пластины выполнен при помощи программы, составленной на основании блок-схемы, приведенной на рис.1. в системе компьютерной математики MATLAB, с использованием двойных тригонометрических рядов, а также в программно-вычислительном комплексе SCAD.

На рис.3 приведена эпюра прогибов, построенная по полученным результатам.

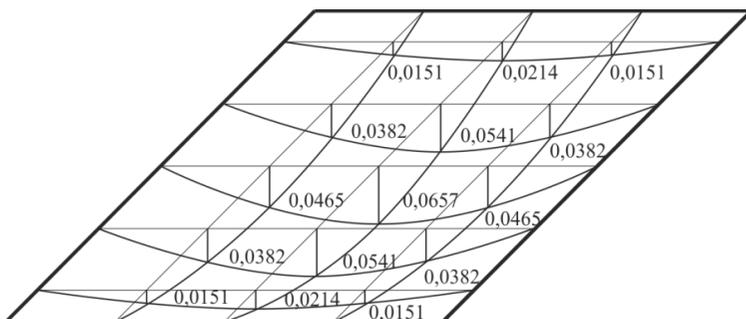


Рис. 3. Эпюра прогибов

На рис.2.7 приведена эпюра изгибающих моментов, построенная по полученным результатам.

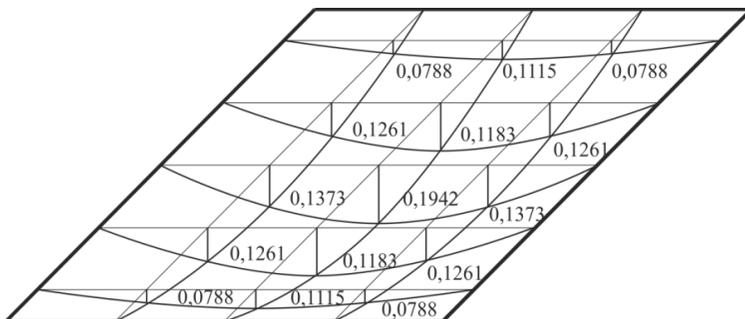


Рис. 4. Эпюра изгибающих моментов

В таблице 1 произведено сравнение значений прогибов в центре пластины, полученных в результате расчетов с использованием двойных тригонометрических рядов, ЧА МГЭ и ПК SCAD.

Таблица 1

Сравнение значений прогибов и изгибающих моментов.

	С использованием двойных тригонометрических рядов	ЧА МГЭ	Δ , %	ПК SCAD	Δ , %
<i>DW</i>	0,06502	0,0657	1,05	0,0641851	1,28
<i>M_y</i>	0,19293	0,1942	0,66	0,186	3,59

Выводы:

1. Разработан алгоритм и программа, определения прогибов и усилий в упругих пластинах.
2. Сравнение результатов расчетов пластины с использованием двойных тригонометрических рядов и с использованием предложенной методики свидетельствует о хорошем совпадении.
3. Требуется дальнейшее развитие методик расчетов железобетонных пластин с учетом трещинообразования, основанных на ЧА МГЭ.

SUMMARY

In the paper the method bases of the plate analysis with applying of numerically-analytical method of boundary elements are presented

Литература

1. Баженов В.А. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов / В.А.Баженов, А.Ф.Дашенко, Л.В.Коломиец, В.Ф.Оробей. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288с.
2. Дашенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф.Дашенко, Л.В.Коломиец, В.Ф.Оробей, Н.Г.Сурыянинов. – Одесса: ВМВ, 2010. – Том 2 – 510с.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 625 с.
4. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. - Москва. Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.- 364 с.