

УСТОЙЧИВОСТЬ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ БЕТОННОЙ КОЛОННЫ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

Фомина И.П.

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Одесса*

Исследуем на устойчивость бетонную колонну прямоугольного поперечного сечения, жестко защемленную в грунте, при несимметричном воздействии этой среды, например, когда коррозии подвергается нижний участок боковой грани колонны (рис. 1а, поперечное сечение на нижнем участке показано на рис. 1б, C – центр неповрежденного сечения, C_1 – центр неповрежденной части корродированного сечения). Верхний край зоны коррозии перемещается вверх с постоянной скоростью v_0 . Глубина поврежденной зоны определяется по формуле [1]

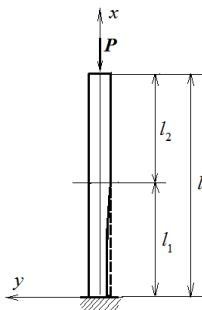


Рис. 1а

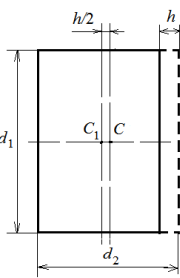


Рис. 1б

Верхний край зоны коррозии перемещается вверх с постоянной скоростью v_0 . Глубина поврежденной зоны определяется по формуле [1]

$$h(t_1) = h_0 e^{-\beta/t_1} \quad (1)$$

Здесь t_1 – время, отсчитываемое от момента t_0 начала процесса коррозии в данном поперечном сечении стержня.

Очевидно

$$t_0 = x/v_0 \quad (2)$$

С учетом (2) формула (1) принимает следующий вид:

$$h(x,t) = h_0 e^{-\beta/(t-x/v_0)} \quad (3)$$

(x – абсцисса сечения). Здесь t – время, отсчитываемое с момента начала процесса коррозии в колонне. Так как длина l_1 первого (корродированного) участка колонны равна

$$l_1(t) = v_0 t,$$

то формула (3) может быть записана так:

$$h(x,t) = h_0 e^{-\beta v_0 / [l_1(t) - x]}. \quad (4)$$

На рис. 2а штриховой линией показана ось, на которой расположены центры поперечных сечений неповрежденной части колонны.

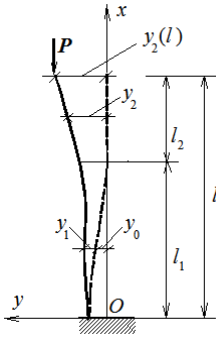


Рис. 2а

Сплошной линией показано деформированное положение этой оси. Через y_1 обозначены ординаты перемещений точек оси на первом (нижнем) участке, а y_0 равно расстоянию CC_1 в каждом сечении, т.е.

$$y_0 = h(x,t)/2. \quad (5)$$

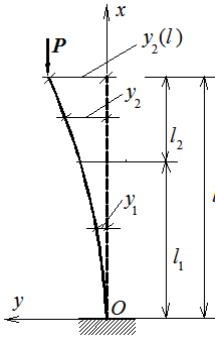


Рис. 2б

Возникающее при этом напряженно-деформированное состояние колонны можно рассматривать как продольный изгиб стержня с начальным искривлением оси. Следуя [2] составляем дифференциальное уравнение для первого участка

$$EJ_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = P[y_2(l,t) - y_1 - y_0] \quad (0 \leq x \leq l_1). \quad (6)$$

Момент инерции поперечного сечения J определяется по формуле

$$J_1(x,t) = \frac{d_1 [d_2 - h(x,t)]^3}{12} \quad (7)$$

(d_1 и d_2 – ширина и высота поперечного сечения при $t = 0$). Заметим, что время t играет роль параметра в уравнении (6).

Для второго (верхнего) участка колонны имеем следующее дифференциальное уравнение

$$EJ_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = P[y_2(l,t) - y_2] \quad (l_1 \leq x \leq l), \quad (8)$$

где $J_2 = d_1 d_2^3 / 12$.

Заметим, что величины критических сил определяются из условия существования ненулевого решения у системы, состоящей из уравнения

$$EJ_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = P[y_2(l, t) - y_1] \quad (0 \leq x \leq l_1) \quad (9)$$

и уравнения (8) при следующих условиях

$$y_1(0, t) = 0, \frac{dy_1}{dx}(0, t) = 0, y_2(l_1, t) = y_1(l_1, t), \frac{dy_2}{dx}(l_1, t) = \frac{dy_1}{dx}(l_1, t) \quad (10)$$

Произведем в уравнении (9) замену независимой переменной $\xi = x/l$ (l – высота колонны). В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 y_1}{d\xi^2} + \varepsilon f(\xi, t) y_1 = \varepsilon f(\xi, t) D, \quad (11)$$

где

$$\varepsilon = \frac{Pl^2}{E\delta}, \quad f(\xi, t) = \frac{12}{d_1 [d_2 - h(\xi, t)]^3}, \quad D = y_2(l, t), \quad (12)$$

$$h(\xi, t) = h_0 e^{-\beta v_0 / l [\lambda_1(t) - \xi]}, \quad \lambda_1(t) = l_1(t) / l.$$

Аппроксимируем функцию $f(\xi, t)$ на отрезке $0 \leq \xi \leq \lambda_1(t)$ многочленом, используя интерполяционную формулу Лагранжа [3]

$$f(\xi, t) = \sum_{i=0}^n f(\xi_i, t) \frac{\omega_i(\xi)}{\omega_i(\xi_i)}, \quad (13)$$

$$\omega_i(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n)$$

($\xi_i = \frac{\lambda_1}{n} i$, $i = 0, 1, \dots, n$). Представим $\omega_i(\xi)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) в следующем виде:

$$\omega_i(\xi) = \sum_{j=0}^n b_{i,j} \xi^j, \quad (14)$$

где $b_{i,j}$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$) - постоянные коэффициенты, однозначно выражаемые через ξ_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Подставив представление (14) в формулу (13), получаем

$$f(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) \xi^j, \quad (15)$$

где

$$f_j(t) = \sum_{i=0}^n f(\xi_i, t) \frac{b_{i,j}}{\omega_i(\xi_i)} \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad f_j(t) = 0 \quad (j > n).$$

Будем искать решение $y_1(\xi, t)$ задачи Коши для уравнения (11) при начальных условиях

$$y_1(0, t) = 0, \quad \frac{dy_1(0, t)}{d\xi} = 0 \quad (16)$$

в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$y_1(\xi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_{1,k}(\xi, t) \quad (17)$$

и будем полагать при этом, что условия (16) выполняются для каждой из функций $y_{1,k}(\xi, t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Подставив это разложение в уравнение (11), получаем

$$\frac{d^2 y_{1,0}}{d\xi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left[\frac{d^2 y_{1,k}}{d\xi^2} + f(\xi, t) y_{1,k-1} \right] = \varepsilon f(\xi, t) D. \quad (18)$$

Приравнивая коэффициенты при степенях ε нулю, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_{1,0}}{d\xi^2} &= 0, \quad \frac{d^2 y_{1,1}}{d\xi^2} = Df(\xi, t) - f(\xi, t) y_{1,0}, \\ \frac{d^2 y_{1,k}}{d\xi^2} &= -f(\xi, t) y_{1,k-1} \quad (k > 1) \end{aligned} \quad (19)$$

Из первого уравнения (19) с учетом условий (16) получаем

$$y_{1,0}(\xi, t) = 0. \quad (20)$$

При $k = 1$ уравнение (19) с учетом (20) выглядит так

$$\frac{d^2 y_{1,1}}{d\xi^2} = Df(\xi, t). \quad (21)$$

Подставив сюда (15) и дважды интегрируя по ξ , находим

$$y_{1,1}(\xi, t) = D \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} \xi^j, \quad (22)$$

где

$$f_0^{(1)} = f_1^{(1)} = 0, f_j^{(1)} = \frac{f_{j-2}}{(j-1)j} \quad (2 \leq j \leq n+2), f_j^{(1)} = 0 \quad (j > n+2).$$

При $k = 2$, используя разложения (15) и (22), получим

$$\frac{d^2 y_{1,2}}{d\xi^2} = -D \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) \xi^j \sum_{i=0}^{\infty} f_i^{(1)} \xi^i. \quad (23)$$

Перемножая стоящие в правой части (23) степенные ряды и дважды интегрируя по ξ с учетом условий (16), приходим к следующему выражению:

$$y_{1,2}(\xi, t) = D \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(2)} \xi^j, \quad (24)$$

где

$$f_0^{(2)} = f_1^{(2)} = 0, f_j^{(2)} = \frac{1}{(j-1)j} \sum_{m=0}^{j-2} f_m f_{j-m-2}^{(1)} \quad (j \geq 2).$$

Заметим, что достаточно быстрое убывание коэффициентов $f_j^{(2)}$ с увеличением j и необходимость вычисления суммы рядов при $\xi < 1$ на первом участке позволяют ограничиться вычислением небольшого числа коэффициентов ряда (24).

Совершенно аналогично поступаем и при $k > 2$. В результате получаем рекуррентные соотношения

$$f_0^{(k)} = f_1^{(k)} = 0, f_j^{(k)} = \frac{1}{(j-1)j} \sum_{m=0}^{j-2} f_m f_{j-m-2}^{(k-1)} \quad (k \geq 2, j \geq 2)$$

для коэффициентов разложений

$$y_{1,k}(\xi, t) = D \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(k)} \xi^j \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (25)$$

Ввиду существенной малости ε для практических задач можно ограничиться и небольшим числом членов в разложении (17). Таким образом, можно считать, что частное решение $y_1(\xi, \varepsilon, t)$ задачи Коши для уравнения (11) с учетом условий (16) построено. Из (22), (24) и (25) следует, что оно может быть представлено в следующем виде:

$$y_1(\xi, t) = DZ_1(\xi, t), \quad (26)$$

где $Z_1(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{1,k}(\xi, t) \varepsilon^k, Z_{1,k}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(k)} \xi^j$.

Переходим ко второму (некорродированному) участку. Дифференциальное уравнение (9) после подстановки $\xi = x/l$ будет выглядеть так

$$\frac{d^2 y_2}{d\xi^2} + k_2^2 y_2 = k_2^2 D, \quad (27)$$

где $k_2 = l \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}, J_2 = \frac{d_1 d_2^3}{12}, D = y_2(1)$. Общее решение этого уравнения

$$y_2(\xi, t) = C_1 \cos k_2 \xi + C_2 \sin k_2 \xi + D \quad (28)$$

(C_1 и C_2 – произвольные постоянные, зависящие от параметров t и P).

Для нахождения этих постоянных используем третье и четвертое условия (10)

$$y_2(\lambda_1(t), t) = y_1(\lambda_1(t), \varepsilon, t), \quad y_2'(\lambda_1(t), t) = y_1'(\lambda_1(t), \varepsilon, t) \quad (29)$$

(штрих означает производную по ξ , $\lambda_1(t) = l_1(t)/l$).

Из (29) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \cos k_2 \lambda_1(t) + C_2 \sin k_2 \lambda_1(t) &= D[Z_1(\lambda_1(t), t) - 1] \\ k_2[-C_1 \sin_2 \lambda_1(t) + C_2 \cos k_2 \lambda_1(t)] &= DZ_1'(\lambda_1(t), t) \end{aligned} \quad (30)$$

решая которую находим

$$C_1 = \frac{D}{k_2} F_1(P, t), \quad C_2 = \frac{D}{k_2} F_2(P, t),$$

где

$$\begin{aligned} F_1(P, t) &= [Z_1(\lambda_1(t), t) - 1]k_2 \cos k_2 \lambda_1(t) - Z_1'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_1(t), \\ F_2(P, t) &= [Z_1(\lambda_1(t), t) - 1]k_2 \sin k_2 \lambda_1(t) + Z_1'(\lambda_1(t), t) \cos k_2 \lambda_1(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Подставив полученные выражения в (28), будем иметь

$$y_2(\xi, t) = \frac{D}{k_2} [F_1(P, t) \cos k_2 \xi + F_2(P, t) \sin k_2 \xi], \quad (32)$$

Напомним, что

$$D = y_2(1, t). \quad (33)$$

Подставив сюда (32), будем иметь

$$D[F_1(P, t) \cos k_2 + F_2(P, t) \sin k_2 - 1] = 0,$$

и поскольку $D \neq 0$, то

$$F_1(P, t) \cos k_2 + F_2(P, t) \sin k_2 - 1 = 0. \quad (34)$$

Это и есть уравнение критических сил.

Переходим к определению прогибов колонны под действием продольной силы P . Сделаем в уравнении (6) подстановку $\xi = x/l$. В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 y_1}{d\xi^2} + \varepsilon f(\xi, t) y_1 = \varepsilon Df(\xi, t) - \varepsilon g(\xi, t). \quad (35)$$

Здесь $g(\xi, t) = \frac{6h(\xi, t)}{d_1[d_2 - h(\xi, t)]^3}$. Как и функцию $f(\xi, t)$, аппроксимируем функцию $g(\xi, t)$ на отрезке $0 \leq \xi \leq \lambda_1(t)$ интерполяционным многочленом Лежандра. В результате получаем

$$g(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) \xi^j, \quad (36)$$

где $g_j(t) = \sum_{i=0}^n g(\xi_i, t) \frac{b_{i,j}}{\omega_i(\xi_i)}$ ($j = 0, 1, \dots, n$), $g_j(t) = 0$ ($j > n$).

Как и выше будем искать решение $y_{1,u}(\xi, t)$ задачи Коши для уравнения (35) при начальных условиях (16) в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$y_{1,u}(\xi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_{1,u,k}(\xi, t). \quad (37)$$

Действуя аналогично изложенному выше, получаем

$$\begin{aligned} y_{1,u,0}(\xi, t) = 0, \quad y_{1,u,k}(\xi, t) = DZ_1^{(k)}(\xi, t) + Z_2^{(k)}(\xi, t), \\ Z_2^{(2)}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j^{(k)}(t) \xi^j, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} g_0^{(1)} = g_1^{(1)} = 0, \quad g_j^{(1)} = \frac{g_{j-2}}{(j-1)j} \quad (2 \leq j \leq n+2), \quad g_j^{(1)} = 0 \quad (j > n+2), \\ g_0^{(k)} = g_1^{(k)} = 0, \quad g_j^{(k)} = -\frac{1}{(j-1)j} \sum_{m=0}^{j-2} f_m f_{j-m-2}^{(k-1)} \quad (k \geq 2, j \geq 2). \end{aligned}$$

Искомое решение может быть записано в следующем виде:

$$y_{1,u}(\xi, t) = DZ_1(\xi, t) + Z_2(\xi, t), \quad (39)$$

$$\text{где } Z_2(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k Z_2^{(k)}(\xi, t).$$

Переходим ко второму участку. Как и выше для нахождения постоянных C_1 и C_2 в (28) используем условия (29). В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \cos k_2 \lambda_1(t) + C_2 \sin k_2 \lambda_1(t) &= y_{1,u}(\lambda_1(t), t) - D \\ k_2 [-C_3 \sin_2 \lambda_1(t) + C_4 \cos k_2 \lambda_1(t)] &= y_{1,u}'(\lambda_1(t), t) \end{aligned} \quad (40)$$

(штрих означает производную по ξ), решая которую находим

$$C_1 = \frac{1}{k_2} F_3(P, t), \quad C_2 = \frac{1}{k_2} F_4(P, t),$$

где

$$\begin{aligned} F_3(P, t) &= [y_{1,u}(\lambda_1(t), t) - D] k_2 \cos k_2 \lambda_1(t) - y_{1,u}'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_1(t), \\ F_4(P, t) &= [y_{1,u}(\lambda_1(t), t) - D] k_2 \sin k_2 \lambda_1(t) + y_{1,u}'(\lambda_1(t), t) \cos k_2 \lambda_1(t). \end{aligned} \quad (41)$$

Подставив полученные выражения в (28), будем иметь

$$y_2(\xi, t) = \frac{1}{k_2} [F_3(P, t) \cos k_2 \xi + F_4(P, t) \sin k_2 \xi] + D.$$

Используем теперь равенство (33), из которого с использованием (39) и (41) получаем

$$D = - \frac{Z_2(\lambda_1(t), t) k_2 \cos k_2 \lambda_2(t) + Z_2'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_2(t)}{[Z_1(\lambda_1(t), t) - 1] k_2 \cos k_2 \lambda_2(t) + Z_1'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_2(t)}.$$

Пример. Исследуем на устойчивость бетонную колонну, подверженную коррозии, при следующих значениях параметров: $l = 16\text{ м}$, $d_1 = 0,5\text{ м}$, $d_2 = 0,4\text{ м}$, $E = 27 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, $h_0 = 0,08\text{ м}$, $\beta = 7,5 \text{ лет}$, $\nu_0 = 0,1 \text{ м/год}$.

Критическая сила для неповрежденной коррозией колонны

$$P_{кр, \max} = \frac{\pi^2 EJ_2}{4l^2} = 694 \text{ кН}.$$

Используя изложенный выше алгоритм, определяем значения критической силы $P_{кр}$ для ряда значений t в пределах от 0 до 150 лет. График изменения $P_{кр}$ в зависимости от t представлен на рис.3 ($P_{кр}$ - в кН, t - в годах). На рис.4 показаны деформированные положения оси

колонны при $t = 100$ лет и разных значениях продольной сжимающей силы: график 1 соответствует $P = 0,8P_{кр}$, график 2 – $P = 0,9P_{кр}$, график 3 – $P = 0,97P_{кр}$. Заметно резкое нарастание прогибов при приближении P к $P_{кр}$.

Вывод.

Предложен метод, позволяющий проводить исследование устойчивости бетонных жестко защемленных в основании колонн при несимметричном агрессивном воздействии окружающей среды, что необходимо для своевременного их усиления для обеспечения надежности конструкции.

Summary

The method for investigation of stability of concrete columns with taking into account nonsymmetrical aggressive environmental impact is offered, what allows their on-time strengthening to secure the reliability of constructions.

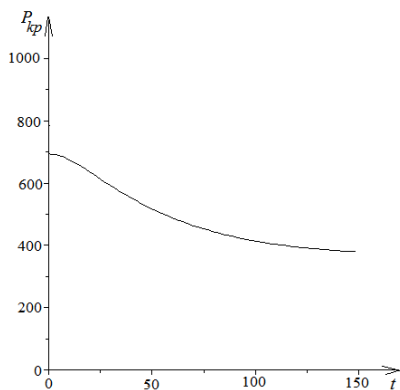


Рис. 3

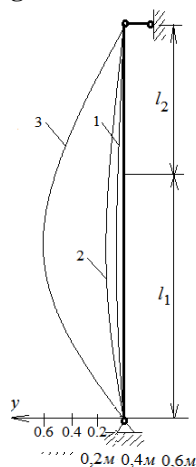


Рис. 4

1. Сетков В.Ю., Шибанова И.С., Рысева О.П. Действие углекислого газа на железобетонные балки и плиты промышленных зданий и сооружений // Строительство и архитектура, №12, 1984. - с. 1 - 4.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. - М.: Физматгиз, 1962. - 464 с.