УДК 624.012

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Король Н.Д., *аспирант*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

В большинстве современных конечно-элементных программ, предназначенных для расчета строительных конструкций, анализ устойчивости проводится в предположении о линейно-упругой работе материала.

Напомним, что в работе система называется линейно-упругой, если для связи между деформациями и напряжениями с достаточной точностью выполняется закон Гука – $\sigma = E\varepsilon$, где σ - напряжение, ε - деформация, E - модуль упругости.

Данная зависимость $\sigma = \sigma\,(\varepsilon)$ таковой не является и может быть представлена в виде графика (Рис.1):

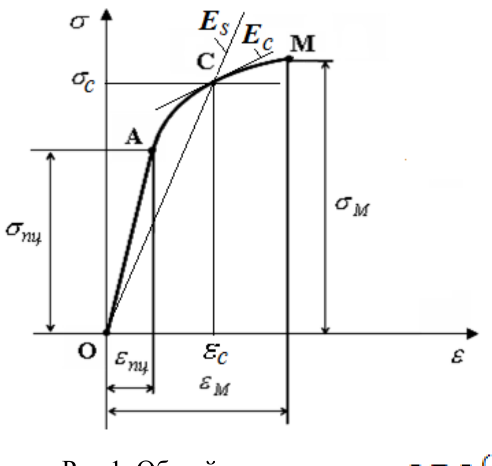

Рис.1. Общий вид диаграммы $\sigma = \sigma\,(\varepsilon)$.

В данном случае $\sigma_{пц}$ - предел пропорциональности материала. Закон Гука выполняется при $\sigma \leq \sigma_{пц}$ (участок *OA*). При напряжениях больше $\sigma_{пц}$наступает стадия физической нелинейности. Так как в существующих конструкциях величина деформаций обычно ограничена, то есть необходимость рассмотреть участок диаграммы до некоторой точки *M*, в которой деформации и напряжения максимальны -σ_{M}и ε_{M}. На диаграмме с четко выраженной площадкой текучести, точка *M* соответствует началу этой площадки. Также стоит отметить, что для некоторых материалов, например бетона, начального линейного участка может и не быть вообще.

Рассматривая точку*C* на нелинейном участке диаграммы *AM*. В этой точке мерой нелинейности может служить изменение модуля упругости, а именно используя такие понятия как:

касательный модуль в точке*C* - $E_c = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ (1)

секущий модуль в точке *C* -$E_s = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c}$ (2)

В состоянии физической нелинейности касательный модуль E_c и секущий модульE_s могут существенно отличаться от начального модуля. На линейном участке *OA* все три модуля совпадают, т.е. $E_c = E_s = E$. В случае наличия площадки текучести, начиная с точки *M* диаграммы, касательный модуль обращается в ноль.

Далее рассмотрим задачу линейно упругой устойчивости в форме:

$$[K^Q + K_\sigma^Q]\Delta U^{\Delta P} - \Delta P = 0, \quad (3)$$

где были приняты допущения, что конструкция загружена консервативными силами, а деформации и углы поворотов достаточно малы. Это задача определения наименьшего собственного значения в форме МКЭ:

$$|K + \beta K_\sigma| = 0 \quad (4)$$

Существует возможность построить итерационный алгоритм, в котором параметр критической нагрузки [1, 2] определяется на основе решения линейно-упругой задачи устойчивости вида (4), а матрицы обычной и геометрической жесткости K иK_σкорректируются исходя из уровня достигаемых напряжений с учетом нелинейной диаграммы деформирования материала.

Тогда, необходимо отметить, что по аналогии с соотношением

$$\lambda^* = min_i \lambda_i > 0 \quad (5)$$

матрица жесткости K должна соответствовать касательным модулям упругости, а матрица геометрической жесткости K_σ- соответствующему распределению напряжений, т.е. секущим модулям упругости.

Рассматривая стержневые системы, где потеря устойчивости элементов происходит в одной из главных плоскостей сечения и отсутствует форма потери устойчивости с выходом из плоскости действия момента, то для корректировки матриц достаточно ограничиться только изменением одного параметра, а именно, модуля упругости материала.

Поэтому разрабатываемый алгоритм по аналогии с В.В. Улитиным [3, 4] будем называть алгоритмом корректировки модулей (АКМ). Общее соотношение АКМ может быть представлено в виде:

$$E_k = \frac{\sigma_{k-1}^{nl}}{\sigma_{k-1}^{lin}} E_{k-1} \tag{6}$$

где E_{k-1} – модуль упругости на k-1-й итерации; E_k – модуль упругости на k-й итерации; σ_{k-1}^{lin} – значение напряжения в рассматриваемом элементе, соответствующее продольному усилию от критической нагрузки для системы, полученной из решения линейно-упругой задачи устойчивости на k-1-й итерации; σ_{k-1}^{nl} - значение критического напряжения, определенное на основании некоторого выбранного критерия.

Так как задача решается для конструкции с произвольным распределением нагрузки, то корректировку модулей упругости следует осуществлять отдельно для каждого конечного элемента. После получения подправленных матриц $K_{(e)}$ и $K_{\sigma(e)}$ для всех элементов следует стандартная процедура ансамблирования МКЭ, и заново решается задача (4). Критерием сходимости могут служить малые изменения значений параметра β и модулей упругости. Далее необходимо выбрать, на основе каких критериев определять значения критических напряжений σ_{k-1}^{nl} в формуле (6), опираясь на решение линейно-упругой задачи устойчивости и тип используемой нелинейной диаграммы деформирования материала.

Вывод. Таким образом, решение задачи устойчивости с учетом физической нелинейности требует организации итерационного процесса. Исходя из текущего уровня нагружения системы, необходимо на основании заранее выбранных критериев осуществлять корректировку матриц с учетом нелинейной диаграммы деформирования материала.

Summary

This article discusses the investigation of the stability of the system taking into account the physical nonlinearity, as well as its application to the analysis of stability of rods and structural elements.

1.Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. М.: Наука, 1955. 154 с.

2. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем (с дополнением проф. В.З.Власов). М.: Гостехиздат, 1946. 567 с.

3. Улитин В.В. Физически нелинейный анализ устойчивости конструкций.СПб.: ГИОРД, 2007. 96 с.]

4. Улитин В.В. Анализ устойчивости строительных конструкций с учетом физической нелинейности // Строительная механика и расчет сооружений. 2007. №3. С. 38-43.