

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІЛЬТРАЦІЇ І НАПРУЖЕНО-  
ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ҐРУНТУ З ПРОГНОЗУ  
ДЕФОРМАЦІЙ ВОДОНАСИЧЕНИХ ҐРУНТОВИХ МАСИВІВ  
ПРИ ЇХ ОСУШЕННІ**

**Кузло М.Т., д.т.н., доц.**

*Національний університет водного господарства та  
природокористування, м. Рівне*

Господарська діяльність людини все більш впливає на зміну гідрогеологічних умов ґрунтових масивів і основ. Причиною таких змін є створення водосховищ, хвостосховищ, гідромеліоративних систем, енергетичних і промислових об'єктів, водозабірних свердловин тощо. Як правило, при експлуатації даних об'єктів з високим рівнем ґрунтових вод спостерігається його пониження і, навпаки, в районах глибокого залягання ґрунтових вод або їх відсутності спостерігається поява і підвищення рівня ґрунтових вод.

Зміна гідрогеологічних умов в ґрунтових масивах ведуть до виникнення гідродинамічних сил фільтраційного потоку, зміни власної ваги та фільтраційних і деформаційних властивостей ґрунту тощо.

Величина та інтенсивність зростання названих факторів може суттєво змінюватися, що призводить до виникнення осідання поверхні землі. Ці деформації ускладнюють нормальну експлуатацію, а в деяких випадках призводять до аварій будівель і споруд та можуть приносити значний економічний збиток.

В роботах багатьох вчених [1, 2, 3] розглядалися питання вивчення впливу гідрогеологічних умов на деформації основ будівель і споруд, природних водонасичених схилів та штучних ґрунтових укосів. Але дані питання потребують подальшого вивчення, оскільки врахування інтенсивності гідродинамічних сил фільтраційного потоку при зміні гідрогеологічних умов ґрунтових масивів та основ, дасть можливість забезпечити надійність і довговічність, а в деяких випадках запобігти аваріям на промислових, цивільних і енергетичних об'єктах.

В представленій статті розглянуто процес осушення водонасиченого ґрунтового масиву шляхом влаштування горизонтальних відкритих дрен (рис. 1).

Математична модель напружено-деформованого стану водонасиченого ґрунтового масиву при його осушенні описується наступними диференціальними рівняннями

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\mu \Delta w + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (2)$$

при таких крайових умовах:

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$u(0, z) = 0, \quad u(l, z) = 0, \quad (4)$$

$$\tau_{xz}(0, z) = 0, \quad \tau_{xz}(l, z) = 0, \quad (5)$$

$$\tau_n(x, l_1(x)) = 0, \quad \sigma_n(x, l_1(x)) = \gamma_n(l_1(x) - l(x)), \quad (6)$$

де  $u(x, z)$  – горизонтальні, а  $w(x, z)$  – вертикальні зміщення точки;  $\tau_{xz}$  – головні дотичні напруження;  $\sigma_n$  – нормальні напруження;  $\tau_n$  – дотичні напруження;  $l_1(x)$  – початкова товща ґрунтового масиву;  $l(x)$  – товща ґрунтового масиву в момент часу  $t$ ;  $\gamma_n$  – питома вага ґрунту в природному стані.

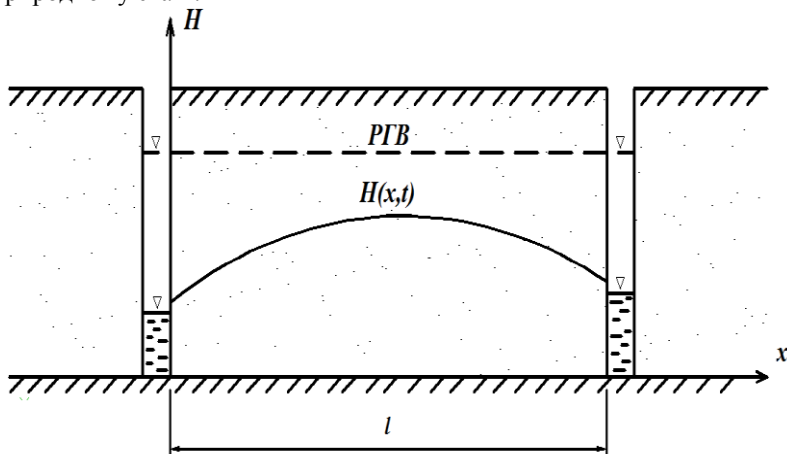


Рис. 9. Схема ґрунтового масиву при осушенні горизонтальними дренами

Для встановлення горизонтальних і вертикальних зміщень у ґрунтовому масиві необхідно знати напори в заданих точках масиву на пев-

ний момент часу. Для цього було розглянуто диференціальне рівняння нестационарної фільтрації, що записується у вигляді

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

при таких крайових умовах:  $H(x, z, 0) = H_1(x, z)$ , (8)

$$H(0, z, t) = H_0(z, t), \quad H(r, z, t) = H_r(z, t), \quad (9)$$

$$\frac{\partial H(x, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad H(x, h(x, t), t) = h(x, t), \quad (10)$$

де  $H_1(x, z)$  – розподіл напорів у початковий момент часу;  $H_0(z, t)$ ,  $H_r(z, t)$  – відповідно напори на лівій та правій межі ґрунтового масиву (відомі функції);  $h(x, t)$  – напори на вільній поверхні ґрунтових вод;  $a^2 = \frac{kh_{col}}{\mu_w}$ ,  $k$  – коефіцієнт фільтрації,  $h_{col}$  – потужність фільтраційного потоку,  $\mu_w$  – коефіцієнт водовіддачі.

Для розв’язання задачі (7) - (10) потрібно знайти  $h(x, t)$  та  $H_1(x, z)$ . У зв’язку з цим було розглянуто дві допоміжні задачі.

Задача 1. Необхідно встановити напори на вільній поверхні ґрунтових вод, тобто знайти  $h(x, t)$ . Для цього розглядалося диференціальне рівняння нестационарної фільтрації для одновимірного випадку

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (11)$$

при таких крайових умовах:

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad (12)$$

$$h(0, t) = h_0(0) - V_0 t, \quad h(s, t) = h_0(s) - V_s t. \quad (13)$$

де  $V_0, V_s$  – швидкість пониження рівня води, відповідно у лівому і правому дренажному каналі;  $h_0(x)$  – початковий рівень ґрунтових вод.

Аналітичний розв’язок рівняння (11) з урахуванням (12) і (13) отримано у вигляді:

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{s}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi} (V_0 - V_s) (-1)^n \left(\frac{s}{\pi n a}\right)^2 \left( 1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{s}\right)^2 t} \right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{s} x\right) + h_0(0) - V_0 t + \frac{h_0(s) - V_s t - (h_0(0) - V_0 t)}{s} x, \quad (14)$$

де

$$A_n = \frac{2}{s} \int_0^s h_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{s} x\right) dx + \frac{2}{\pi n} (-h_0(0) + h_0(s)(-1)^n).$$

Задача 2. У встановленій області фільтрації з криволінійною верхньою межею  $h(x,t)$  необхідно знайти значення напорів в початковий момент часу. Для цього розглядалося диференціальне рівняння стаціонарної фільтрації

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} = 0 \quad (15)$$

при таких крайових умовах:

$$\frac{\partial H_1(x,0)}{\partial z} = 0, \quad H_1(x, h_0(x)) = h_0(x), \quad (16)$$

$$H_1(0, z) = H_0(z, 0), \quad H_1(r, z) = H_r(z, 0). \quad (17)$$

Для його розв'язання здійснено чисельне конформне відображення області фільтрації на параметричний прямокутник у площині  $\xi, \eta$ . Існує взаємно однозначний зв'язок між точками фізичної області і точками параметричного прямокутника  $\xi = \xi(x, z)$ ,  $\eta = \eta(x, z)$ , що задовольняє умову Коші-Рімана:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (18)$$

Це дозволило встановити координати внутрішніх точок області фільтрації та на її зовнішніх межах і побудувати конформну сітку. Виконання умови Коші-Рімана означає ортогональність сітки, тобто отримана сітка є ще гідродинамічною.

Чисельний розв'язок стаціонарного рівняння фільтрації (15) з відповідними крайовими умовами (16), (17) отримали шляхом побудови на сітці параметричного прямокутника в площині  $\xi, \eta$  різницевої схеми з використанням шаблону типу "хрест" та розв'язавши її ітераційним методом послідовної верхньої релаксації [4].

$$H_{ij}^{s+1} = \frac{w}{4} (H_{i-1,j}^{s+1} + H_{i,j-1}^{s+1} + H_{i,j+1}^s + H_{i+1,j}^s) + (1-w)H_{ij}^s, \quad (19)$$

де  $\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}$ ,  $\rho = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m}\right)}{2}$ .

Для знаходження напорів у змінній двовимірній області, що описується рівняннями (7) – (10), здійснено їх перехід до змінних

$\xi = \xi(x, z)$ ,  $\eta = \eta(x, z)$ , та побудовано неявну різницеву схему і отримано її розв'язок ітераційним методом:

$$H_{ij}^{k+1} = \frac{\left( H_{ij}^k + b_{ij}^{k+1} \left( \frac{H_{i+1,j}^{k+1} + H_{i-1,j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{H_{i,j+1}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2} \right) \right)}{1 + 2b_{ij}^{k+1} \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right)}. \quad (20)$$

$$\text{де } b_{ij}^{k+1} = \frac{a^2 \tau}{\left( \frac{x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}}{2h_\xi} \right)^2 + \left( \frac{z_{i+1,j}^{k+1} - z_{i-1,j}^{k+1}}{2h_\xi} \right)^2}.$$

Для знаходження вертикальних і горизонтальних зміщень ґрунтового масиву в процесі його осушення, що описуються диференціальними рівняннями (1), (2) та відповідними крайовими умовами (3) – (6), здійснено перехід їх до змінних  $\xi = \xi(x, z)$ ,  $\eta = \eta(x, z)$ . Отримані рівняння дискретизували на шаблоні типу “ящик” та знаходили їх розв'язок ітераційним методом Гауса-Зейделя:

$$u_{ij}^{s+1} = (a_{1,ij} u_{i-1,j}^{s+1} + a_{2,ij} u_{i+1,j}^s + a_{3,ij} u_{ij-1}^{s+1} + a_{4,ij} u_{ij+1}^s) - a_{5,ij} (u_{i+1,j+1}^s - u_{i-1,j+1}^{s+1} + u_{i+1,j-1}^s + u_{i-1,j-1}^{s+1}) - a_{6,ij}, \quad (21)$$

де

$$a_{1,ij} = \frac{A_{1,ij} - C_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{2,ij} = \frac{A_{1,ij} + C_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{3,ij} = \frac{B_{1,ij} - D_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{4,ij} = \frac{B_{1,ij} + D_{1,ij}}{a_{0,ij}},$$

$$a_{5,ij} = \frac{E_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{6,ij} = \frac{F_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{0,ij} = \frac{2(\lambda + 3\mu)}{J_1 h^2}$$

$$w_{ij}^{s+1} = (b_{1,ij} w_{i-1,j}^{s+1} + b_{2,ij} w_{i+1,j}^s + b_{3,ij} w_{ij-1}^{s+1} + b_{4,ij} w_{ij+1}^s) - b_{5,ij} (w_{i+1,j+1}^s - w_{i-1,j+1}^{s+1} + w_{i+1,j-1}^s + w_{i-1,j-1}^{s+1}) - b_{6,ij}, \quad (22)$$

де

$$b_{1,ij} = \frac{A_{2,ij} - C_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{2,ij} = \frac{A_{2,ij} + C_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{3,ij} = \frac{B_{2,ij} - D_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{4,ij} = \frac{B_{2,ij} + D_{2,ij}}{b_{0,ij}},$$

$$b_{5,ij} = \frac{E_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{6,ij} = \frac{F_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{0,ij} = \frac{2(\lambda + 3\mu)}{J_{1,ij} h^2}$$

Для чисельного розв'язання задачі створений програмний комплекс “Shift” на мові програмування C++ [5].

## *Висновки*

Отримані розв'язки рівнянь (21) і (22) надають нам значення горизонтальних і вертикальних зміщень ґрунтового масиву в процесі його осушення.

### **Summary**

**Mathematical models of filtration and strained-deformed soil state in forecast of deformations of water saturated soil massifs and basis under the action of internal volume forces (hydrodynamic forces of filtration flow, change of own soil weight) modelling of have been elaborated and improved. The numerical solutions of relevant limit problems modeling of filtration and strained-deformed state of soil for flat areas with a variable in time curvilinear limit have been obtained.**

### *Література*

1. Бойко И. П. Влияние гидрогеологических условий на деформацию оснований существующих фундаментов / И. П. Бойко, А. Ф. Лебеда, В. В. Давыдюк // Основания и фундаменты. – К.: Будівельник, 1991. – Вип. 24. – С.23 – 30.
2. Хулбарян М. Г. Приближённое аналитическое решение задачи нестационарной фильтрации со свободной поверхностью / М. Г. Хулбарян, О. О. Юшманов // Водные ресурсы. – 1982. №1. – С.107 – 112.
3. Моргун А. С. Вплив техногенного фактора замокання ґрунтової основи на НДС висотної будівлі / А. С. Моргун, В. М. Андрухов, І. М. Меть // Дороги і мости. Зб. наук. праць. – К., 2009. – С.233 – 238.
4. Кузло М. Т. Математичне моделювання напружено-деформованого стану водонасиченого ґрунтового масиву у процесі його осушення / М. Т. Кузло // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво: Науково-технічний збірник. Вип. 83 – Київ, 2012. – С. 40–48.
5. Кузло М. Т. Комп'ютерна програма “Моделювання деформацій водонасичених ґрунтових масивів і основ (Shift)” / М. Т. Кузло, І. О. Кушнір // Свідectво про реєстрацію авторського права на твір № 53884 від 28.02.2014 – К.: Державна служба інтелектуальної власності України, 2014.