

## УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХПРОЛЕТНОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ РАМЫ ПОДВЕРЖЕННОЙ ВОЗДЕЙСТВИЮ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

Фомина И.П.

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,  
г. Одесса*

В статье [1] была исследована устойчивость П-образной железобетонной рамы, находящейся под воздействием агрессивной среды. В настоящей работе методы, предложенные в [1], используются при исследовании устойчивости двухпролетной железобетонной рамы, также находящейся в условиях агрессивного воздействия среды. Рама является частью конструкции одноэтажного промышленного здания (рис. 1). Агрессивная среда находится внутри здания, поэтому боковые колонны рамы подвергаются несимметричному воздействию среды.

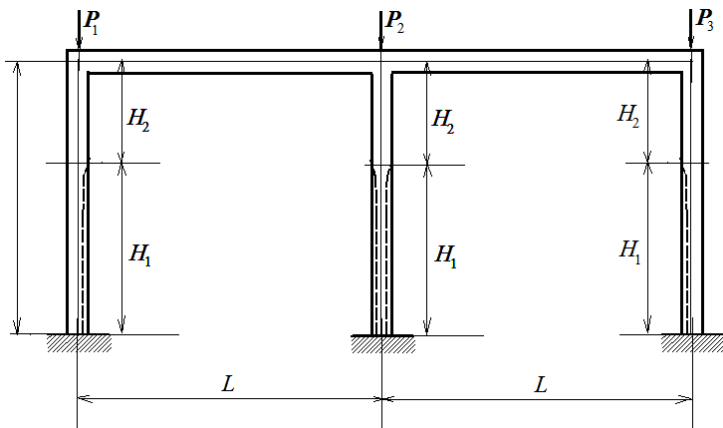


Рис. 1

Как и в работе [1] для определения критического сочетания нагрузок  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  будем использовать метод граничных элементов [2]. На каждом из стержней выбрана локальная система координат (рис. 2, номера стержней проставлены в кружках, номера узлов - в квадратах). Для каждого стержня записываем следующее равенство:

$$\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)}(l_i)\mathbf{X}^{(i)} \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{X}^{(i)} = \begin{bmatrix} B_i(0)y_i(0) \\ B_i(0)y_i'(0) \\ M_i(0) \\ Q_i \\ N_i \end{bmatrix}, \mathbf{Y}^{(i)} = \begin{bmatrix} B_i(l_i)y_i(l_i) \\ B_i(l_i)y_i'(l_i) \\ M_i(l_i) \\ Q_i \\ N_i \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{A}^{(i)}(k_i, x_i) = \begin{bmatrix} 1 & a_{1,2}(k_i, x_i) & a_{1,3}(k_i, x_i) & a_{1,4}(k_i, x_i) & 0 \\ 0 & a_{2,2}(k_i, x_i) & a_{2,3}(k_i, x_i) & a_{2,4}(k_i, x_i) & 0 \\ 0 & a_{3,2}(k_i, x_i) & a_{3,3}(k_i, x_i) & a_{3,4}(k_i, x_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

( $i$  - номер стержня,  $B_i(x_i)$  - его изгибная жесткость,  $M_i(x_i)$ ,  $Q_i$ ,  $N_i$  - изгибающий момент, поперечная и продольная силы). Если поперечное сечение стержня и арматуры остаются неизменными по его длине, то функции  $a_{j,k}(x_i)$  ( $j = 1, 2, 3; k = 2, 3, 4$ ) имеют следующий вид:

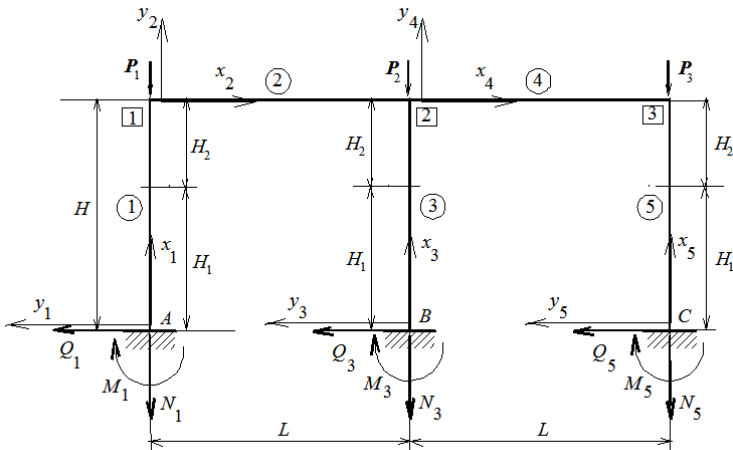


Рис. 2

$$a_{1,2}(k_i, x_i) = \frac{\sin k_i x_i}{k_i}, a_{1,3}(k_i, x_i) = \frac{1 - \cos k_i x_i}{k_i^2}, a_{1,4}(k_i, x_i) = \frac{k_i x_i - \sin k_i x_i}{k_i^3},$$

$$a_{2,2}(k_i, x_i) = \cos k_i x_i, a_{3,2}(k_i, x_i) = -k_i \sin k_i x_i, k_i = \sqrt{N_i / B_i}. \quad (3)$$

На рис. 2 в точках  $A, B$  и  $C$  показаны две составляющие опорной реакции и реактивный момент. Они представлены в виде продольной и поперечной сил и изгибающего момента в нижнем сечении стержней 1, 2 и 3 (на чертеже показаны их положительные направления).

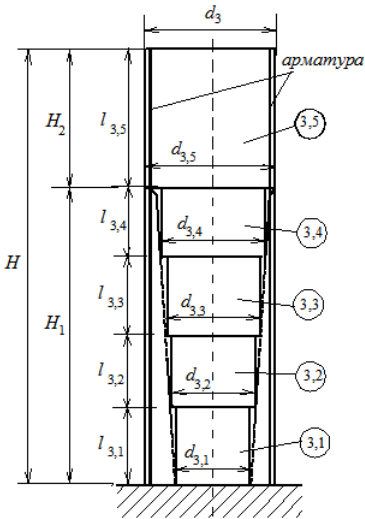


Рис. 3

Следуя [1] строим матрицы  $A^{(1)}$  и  $A^{(5)}$  для стержней 1 и 5. Для построения матрицы  $A^{(3)}$  поступаем аналогично. Разбиваем стержень 3 на несколько участков, в пределах каждого из которых поперечное сечение будем считать постоянным (рис. 3). Каждый из участков, а также его длина и ширина получили двойную нумерацию. Первый из номеров - это номер стержня, а второй - номер участка.

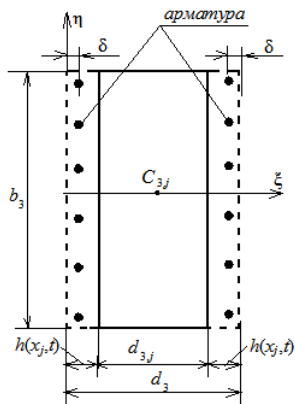


Рис. 4

Поперечное сечение каждого из участков представлено на рис. 4. Учитывая условия непрерывности функций  $y_1(x_1)$  и  $y_1'(x_1)$  на границах участков, можно записать следующее соотношение:

$$X^{(3,j+1)} = C^{(3,j)} Y^{(3,j)}, \quad (4)$$

где

$$C^{(3,j)} = \begin{bmatrix} B_{3,j+1}/B_{3,j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{3,j+1}/B_{3,j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для первого участка имеем

$$\mathbf{Y}^{(3,1)} = \mathbf{A}^{(3,1)}(k_{3,1}, l_{3,1})\mathbf{X}^{(3)}, \mathbf{X}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ Q_3 \\ N_3 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

для последующих

$$\mathbf{X}^{(3,i)} = \mathbf{C}^{(3,i-1)}\mathbf{Y}^{(3,i-1)}, \mathbf{Y}^{(3,i)} = \mathbf{A}^{(3,i)}(k_{3,i}, l_{3,i})\mathbf{X}^{(3,i)}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем для последнего участка

$$\mathbf{Y}^{(3,n_{yc})} = \mathbf{A}^{(3,n_{yc})}(k_{3,n_{yc}}, l_{3,n_{yc}}) \prod_{i=1}^{n_{yc}-1} \mathbf{C}^{(3,i)} \mathbf{A}^{(3,i)}(k_{3,i}, l_{3,i})\mathbf{X}^{(3)} \quad (7)$$

( $n_{yc}$  - число участков). Учитывая, что  $\mathbf{Y}^{(3,n_{yc})} = \mathbf{Y}^{(3)}$ , находим, что

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{A}^{(3,n_{yc})}(k_{3,n_{yc}}, l_{3,n_{yc}}) \prod_{i=1}^{n_{yc}-1} \mathbf{C}^{(3,i)} \mathbf{A}^{(3,i)}(k_{3,i}, l_{3,i}), \quad (8)$$

т.е. получаем матрицу  $\mathbf{A}^{(3)}$  для стержня 3.

В [1] получено следующее соотношение:

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{D}^{(1)}\mathbf{Y}^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_1, \mathbf{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2/B_1(l_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

откуда следует, что

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)}(k_2, L)(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{X}^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_1). \quad (10)$$

Равенство (1) при  $i = 3$  и  $i = 5$  записывается так:

$$\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} \mathbf{X}^{(i)}, \quad \mathbf{X}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_i \\ Q_i \\ N_i \end{bmatrix} \quad (i = 3, 5), \quad (11)$$

где  $Q_i, N_i, M_i$  ( $i = 3, 5$ ) - опорные реакции и реактивные моменты в точках  $B$  и  $C$  (рис.2).

Рассмотрим теперь равновесие граничного элемента 2, находящегося между стержнями 2, 3 и 4 (рис. 5). Составим уравнения равновесия

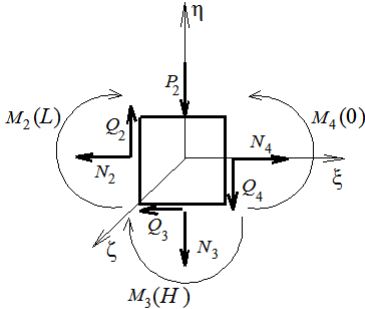


Рис. 5

$$\begin{aligned} N_4 - N_2 - Q_3 &= 0, \\ Q_2 - N_3 - Q_4 - P_2 &= 0, \\ M_4(0) - M_2(L) - M_3(H) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Учтем также соотношения

$$y_4(0) = 0, \quad y_4'(0) = y_2'(L). \quad (13)$$

Равенства (12) и (13) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^{(4)} &= 0, \quad \mathbf{X}_2^{(4)} = \mathbf{Y}_2^{(2)}, \quad \mathbf{X}_3^{(4)} = \mathbf{Y}_3^{(2)} + \mathbf{Y}_3^{(3)}, \quad \mathbf{X}_4^{(4)} = \mathbf{Y}_4^{(2)} + \mathbf{Y}_5^{(3)} + P_2, \\ \mathbf{X}_5^{(4)} &= \mathbf{Y}_4^{(3)} + \mathbf{Y}_5^{(2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следует

$$\mathbf{X}^{(4)} = \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{Y}^{(2)} + \mathbf{D}^{(3)} \mathbf{Y}^{(3)} + \hat{\mathbf{P}}_2, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 / B_2(L) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из (10), (11) и (15) находим

$$\mathbf{Y}^{(4)} = \mathbf{A}^{(4)}(k_4, L)\mathbf{X}^{(4)} = \mathbf{A}^{(4)}(k_4, L)\{\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)}(k_4, L)[\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{X}^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_1] + \mathbf{D}^{(3)}\mathbf{A}^{(3)}\mathbf{X}^{(3)} + \hat{\mathbf{P}}_2\}. \quad (16)$$

Из формул (11) и (16) следует, что компоненты векторов  $\mathbf{Y}^{(4)}$  и  $\mathbf{Y}^{(5)}$  являются функциями девяти неизвестных величин  $M_i, Q_i, N_i$  ( $i = 1, 3, 5$ ).

Заметим, что элементы матриц  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{A}^{(2)}$  и  $\mathbf{A}^{(3)}$  также зависят от  $M_i, Q_i, N_i$  ( $i = 1, 3, 5$ ), так как величины  $k$ , входящие в формулы (3), являются функциями этих величин.

Рассмотрим равновесие граничного элемента 3, расположенного между стержнями 4 и 5 (рис. 6). Уравнения равновесия:

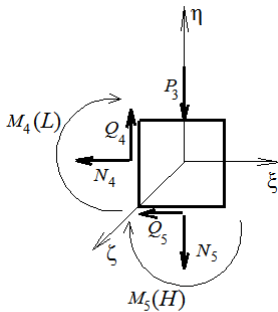


Рис. 6

$$\begin{aligned} N_4 + Q_5 &= 0, \\ Q_4 - N_5 - P_3 &= 0, \\ M_4(L) + M_5(H) &= 0. \end{aligned}$$

Они могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_5^{(4)} + \mathbf{Y}_4^{(5)} &= 0, \\ \mathbf{Y}_4^{(4)} - \mathbf{Y}_5^{(5)} - P_3 &= 0, \\ \mathbf{Y}_3^{(4)} + \mathbf{Y}_3^{(5)} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Равенства (17) представляют собой три уравнения относительно указанных выше девяти неизвестных. Для составления дополнительных уравнений воспользуемся соотношениями

$$y_2'(L) = y_3'(H), \quad y_4'(L) = y_5'(H), \quad (18)$$

а также равенствами, вытекающими из допущения об отсутствии продольных смещений точек стержней:

$$y_2(L) = 0, \quad y_4(L) = 0, \quad y_3(H) = y_1(H), \quad y_5(H) = y_1(H). \quad (19)$$

Запишем (18) и (19) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
Y_2^{(2)} - Y_2^{(3)} &= 0, \\
Y_2^{(4)} - Y_2^{(5)} &= 0, \\
Y_1^{(2)} &= 0, \\
Y_1^{(4)} &= 0, \\
Y_1^{(3)} - Y_1^{(1)} &= 0, \\
Y_1^{(5)} - Y_1^{(1)} &= 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Равенства (17) и (20) представляют собой систему уравнений относительно неизвестных  $M_i, Q_i, N_i$ , ( $i = 1, 3, 5$ ). Запишем эту систему в следующем виде:

$$U(\mathbf{u}, \mathbf{p})\mathbf{u} = \mathbf{w}(\mathbf{u}, \mathbf{p}). \tag{21}$$

Здесь

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ N_1 \\ M_1 \\ Q_3 \\ N_3 \\ M_3 \\ Q_5 \\ N_5 \\ M_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}.$$

Для решения задач продольно-поперечного изгиба при заданных значениях  $P_1, P_2$  и  $P_3$  используем метод последовательных приближений: на первом шаге полагаем  $N_1 = -P_2, N_3 = -P_2, N_5 = -P_3, Q_1 = Q_3 = Q_5 = M_1 = M_3 = M_5 = 0$ , тем самым определяя вектор  $\mathbf{u}$ . Затем определяем элементы матрицы  $U(\mathbf{u}, \mathbf{p})$  и вектора  $\mathbf{w}(\mathbf{u}, \mathbf{p})$  и решая систему (21), находим новые значения  $M_i, Q_i, N_i$  ( $i = 1, 3, 5$ ), через них определяем новые значения элементов матрицы  $U(\mathbf{u}, \mathbf{p})$  и вектора  $\mathbf{w}(\mathbf{u}, \mathbf{p})$  и т.д. Метод оказывается быстро сходящимся из-за малости значений функции  $h(x, t)$  по сравнению с размерами поперечного сечения.

При решении задач устойчивости для нахождения значения критических сил используем уравнение

$$\det[U(\mathbf{u}, \mathbf{p})] = 0. \quad (22)$$

Решение этого уравнения определяет некоторую поверхность (назовем ее критической) в системе координат  $P_1, P_2, P_3$ . Зададимся некоторым значением  $P_2 = P_2^{(0)}$ . Это значение определит кривую, получающуюся в результате пересечения упомянутой поверхности плоскостью  $P_2 = P_2^{(0)}$ . Затем задаемся начальными значениями  $P_1$  и  $P_3$  и используем метод последовательных приближений точно так же, как и при решении задач продольно-поперечного изгиба, в результате находим значение определителя  $\det[U(\mathbf{u}, \mathbf{p})]$ . Если он оказывается не равным нулю, то фиксируем значение  $P_1$  и меняя значение  $P_3$  находим такое его значение, при котором выполняется уравнение (22), при этом для каждого значения  $P_3$  используя метод последовательных приближений. Затем задаемся новым значением  $P_1$  и для него находим значение  $P_3$ , при котором выполняется (27) и т.д. Используя полиномиальную аппроксимацию, можно найти уравнение сечения критической поверхности плоскостью  $P_2 = P_2^{(0)}$ . Меняя значения  $P_2^{(0)}$ , строим новое сечение критической поверхности и т.д.

**Пример.** Исследуем на устойчивость железобетонную раму при следующих значениях параметров:  $H = 16 \text{ м}$ ,  $L = 16 \text{ м}$ ,  $E_b = 27 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ ,  $E_a = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ; параметры поперечных сечений стержней 1,2,3:

$d_1 = d_2 = d_3 = 0,4 \text{ м}$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = 0,8 \text{ м}$ ,  $\delta = 0,04 \text{ м}$ ; параметры арматуры:  $r_a = 0,01 \text{ м}$ ,  $n_a = 8$ ; параметры зоны коррозии:  $h_0 = 0,08 \text{ м}$ ,  $\beta = 7,5 \text{ лет}$ ,  $v_0 = 0,1 \text{ м/год}$ .

На рис. 7 представлены графики сечений критических поверхностей, построенные при помощи изложенного выше алгоритма (линии 1, 2, 3 для  $P_2 = 0$  и  $t = 0$ ,  $t = 50$  лет,  $t = 100$  лет соответственно; линии 4, 5, 6 для  $P_2 = 5000 \text{ кН}$  и  $t = 0$ ,  $t = 50$  лет,  $t = 100$

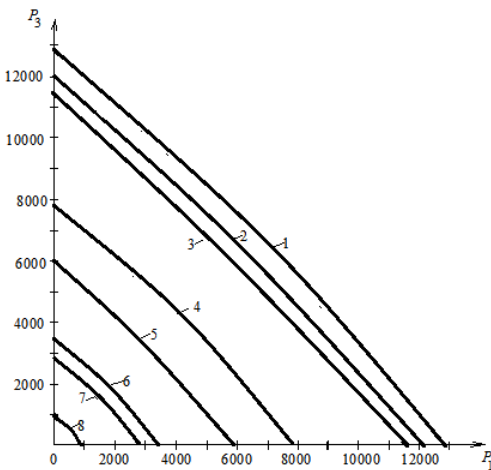


Рис. 7

лет соответственно; линии 7 8 для  $P_2 = 10000 \text{ кН}$  и  $t = 0$ ,  $t = 50$  лет; значения  $P_1$  и  $P_3$  на графиках - в килоньютонах). Заметно значительное



понижение значений критических сил с увеличением периода эксплуатации конструкции.

### ***Вывод***

Произведен расчет на устойчивость двухпролетной железобетонной рамы при агрессивном воздействии среды, что необходимо для своевременного ее усиления для обеспечения надежности конструкции.

### **Summary**

**Stability structural analysis of two-span RC frame subjected to aggressive environmental impact is carried out, what is necessary for its on-time strengthening to secure reliability of constructions.**

### ***Литература***

1. Фомина И.П. Устойчивость П-образной железобетонной рамы подверженной воздействию агрессивной среды// Вісник ОДАБА. Вып.57 , – Одесса, 2015. – с.346-444 .
2. Баженов В.А., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. и др. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов - Одесса: Астропринт, 2001. - 288с.