

К ИССЛЕДОВАНИЮ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В.П.Бреднёва, к.т.н., А.М.Бреднёв, к.т.н., В.П.Шупта к.т.н.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Общие принципы расчетов конструкций с произвольной конечной группой симметрии установлены еще в 70-х годах в работах Злоковича Дж., Фомина В.М., Бурышкина М.Л., Гордеева В.Н. [1-3 и др.]. Исследование структуры матриц канонических разрешающих уравнений метода перемещений для свободных колебаний и построение специального базиса было проведено в середине 90-х годов М.Л. Бурышкиным и С.Я. Бекшаевым [4-6].

В настоящей работе рассматривается инженерная методика расчета свободных колебаний тонкостенных конструкций, обладающих группой S_{2n} симметрии, которая сопровождается численными примерами, выполненными под руководством проф., докт. техн. наук М.Л. Бурышкина. Обозначения и теоретические положения более подробно приведены в [4].

Методика расчета состоит из следующих этапов.

Этап 1. Определяются число n поворотов вокруг оси симметрии z ; параметр $\alpha = 2\pi/n$; число L различных обобщенных циклических свойств ($L = (n + 6)/2$ – при четном n и $L = (n + 3)/2$ – при нечетном n); числа V^{ps} независимых элементов блоков $U_{\langle p,s \rangle}$ матрицы взаимодействия узлов, фиксируются плоскости отражения Π_0, Π_1 и выделяется основная элементарная ячейка

Этап 2. Из инженерных соображений на элементарной ячейке определяются места расположения двух динамических узлов так, чтобы первый из них располагался в плоскости Π_0 , а второй – либо в Π_0 , либо в Π_1 . Тем самым устанавливается тип дискретной модели I-I или I-II. Далее рассматриваются только модели типа I-I

Этап 3. Статическим расчетом определяются все независимые коэффициенты жесткости $a_m^{ps} (m = 0, 1, 2, \dots, V^{ps} - 1; p, s = 1, 2)$. На основе специальных аэродинамических или натуральных испытаний определяются коэффициенты диссипации $b_m^{ps} (m = 0, 1, 2, \dots, V^{ps} - 1)$

Этап 4. Масса конструкции разносится по динамическим узлам (т.е. находятся значения m_1 и m_2)

Этап 5. Вычисляются параметры $u^{(i)ps}$ матриц канонической системы по выражениям (8.4) и (8.5) из [4].

Этап 6. Периоды свободных колебаний для модели I-I определяются соотношениями (1).

Этап 7. Соответствующие этим периодам формы находятся из сумм (8.14), (8.15) [4]

Этап 8. Для уточнения значений сосредоточенных масс модели проводится анализ форм. Необходимость в этом возникает при появлении быстро осциллирующих форм. Тогда назначаются новые значения масс и производится перерасчет периодов, определенных на этапе 6 либо замена типа модели и перерасчет с этапа 3

Этап 9. Логарифмические декременты затухания описываются формулами (2).

Пример 1. Короткая оболочка

Этап 1. Рассматривается короткая оболочка с группой C_{16v} симметрии. Ее ребра жесткости образуют раму, стержневые элементы показаны на рис. 1 сплошными линиями. Сечения всех ребер одинаковы и характеризуются следующими числовыми данными:

$F = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ – площадь поперечного сечения, $I_k = 10^{-8} \text{ м}^4$, $I_x = I_y = 6,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$ – соответствующие моменты инерции. Толщина оболочки – 10^{-3} м , материал – сталь с модулем упругости $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ т/м}^2$. Расположение сосредоточенных масс: $m_1 = 0,02553 \text{ тс}^2/\text{м}$, $m_2 = 0,322 \text{ тс}^2/\text{м}$ - см рис. 1

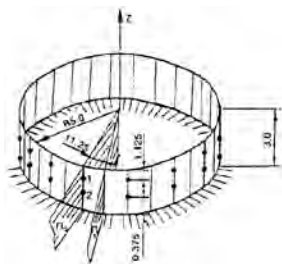


Рис. 1



Рис.2

Этап 2. Места расположения сосредоточенных масс приняты в плоскости Π_0 .

$$T_{1,2}^{(1)} = - \frac{2\pi\sqrt{2m_1m_2}}{\sqrt{m_1a^{(0)22} + m_2a^{(0)11} \mp \sqrt{(m_1a^{(0)22} + m_2a^{(0)11})^2 + 4m_1m_2(a^{(0)12})^2}}}$$

$$T_{1,2}^{\left(\frac{n}{2}+2\right)} = \frac{2\pi\sqrt{2m_1m_2}}{\sqrt{m_1a^{\left(\frac{n}{2}\right)22} + m_2a^{\left(\frac{n}{2}\right)11} \mp \sqrt{\left(m_1a^{\left(\frac{n}{2}\right)22} + m_2a^{\left(\frac{n}{2}\right)11}\right)^2 + 4m_1m_2\left(a^{\left(\frac{n}{2}\right)12}\right)^2}} \quad (1)$$

$$T_{1,2}^{(v)} = \frac{2\pi\sqrt{2m_1m_2}}{\sqrt{m_1a^{(v-2)22} + m_2a^{(v-2)11} \mp \sqrt{(m_1a^{(v-2)22} + m_2a^{(v-2)11})^2 + 4m_1m_2(a^{(v-2)12})^2}}}$$

$$\lambda_s^{(v)} = - \frac{b^{(v)11} + 2b^{(v)12}\tilde{X}_s^{(v)\mu 2} + b^{(v)22}\left(\tilde{X}_s^{(v)\mu 2}\right)^2}{4\left[m_1 + m_2\left(\tilde{X}_s^{(v)\mu 2}\right)^2\right]} \quad (2)$$

$$(v=1, 3, 4, \dots, n/2+2; \quad s=1, 2)$$

Этап 3. Величины a_m^{ps} ($m = 0, 1, 2, \dots, 8; p, s = 1, 2$) вычислены с помощью программы ПАРСЕК [1]. Используемая при этом конечно-элементная модель основной элементарной ячейки изображена на рис. 2.

Видно, что первый динамический узел совпадает с 15-м статическим, а второй - с 7-м статическим. Общее число конечных элементов в конструкции - 544. Число узлов в основной ячейке - 18, из них подвижных - 16 (узлы 1 и 2 - жестко закреплены). Общее число подвижных узлов - 256. Каждый статический узел имеет по шесть степеней свободы. Общее число неизвестных перемещений в статическом расчете - 1536. Закрепив статические узлы с номерами 15 и 7 от перемещений по нормали к поверхности, узлу 15 основной ячейки задают соответствующее единичное перемещение. Реакции в закреплениях узлов с номером 15 определяют величины a_m^{11} , а в узлах с номером 7 - a_m^{21} . Аналогично вычисляются a_m^{22} и a_m^{12} .

Этап 4. Опускается, так как масса уже сосредоточена необходимым образом

Этап 5. Вычисляются параметры $a^{(j)ps}$ ($j = 0, 1, \dots, 8$), т/м

Этап 6. С помощью выражений (1) определяются периоды $T_s^{(v)}$ (сек) из серий с номерами $v = 1, 3, 4, \dots, 10$

Этап 7. Используя величины масс и полученные данные, находим соответствующие собственные формы в исходном базисе из выражений (8.14) и (8.15) [4].

Этап 8. Опускается, так как массы модели являются сосредоточенными

Этап 9. Определяются логарифмические декременты затухания по выражениям (2).

Анализ поверхностей, отвечающих амплитудным деформациям оболочки, показывает, что деформации всех ее образующих подобны друг другу (т.е. отличаются лишь множителем). Тот же факт имеет место и для всех горизонтальных сечений

Пример 2. Градирня

Этап 1. Форма и габариты градирни, а также поворотная ось z , плоскости Π_0 и Π_1 отражения, вырезающие основную ячейку, приведены на рис. 3. На рис. 4а показана конструкция основной ячейки с пронумерованными узлами и стержнями, на рис. 4б вынесено поперечное сечение ее стержневых элементов. Градирня обладает симметрией C_{12v} , т.е. число поворотов симметрии $\mathbf{n} = 12$, поэтому $\alpha = 30^\circ$, $L = 9$, $V^{II} = V^{II}$, $V^{II} = 7$, $V^{II} = 6$.

Эман 2. Динамические узлы 1 и 2 основной ячейки совпадают с узлами 11 и 29 (рис. 4а)

Эман 3. Определенные в результате статического расчета независимые коэффициенты жесткости a_m^{ps} градири в динамических узлах представлены в таблице 1.

Таблица 1

m	0	1	2	3	4	5	6
a_m^{ps}							
a_m^{11}	1989,0	-425,0	307,0	166,0	-51,6	-42,7	68,8
a_m^{21}	165,5	-129,7	-84,3	48,9	89,9	2,14	-85,1
a_m^{22}	1585,0	-333,0	-138,4	140,2	352,0	55,0	-232,0

Эман 4. В первом динамическом узле собирается масса узлов с номерами 8, 9, ..., 20, а во втором – с номерами 21, 22, ..., 39. Массы динамических узлов определяются суммированием половины масс стержней градири, сходящихся в этих узлах. В результате $m_1 = 7,428 \text{ тс}^2/\text{м}$, $m_2 = 6,608 \text{ тс}^2/\text{м}$

Эман 5. Параметры $a^{(j)ps}$ матриц канонической системы приведены в таблице 2

Эман 6. С помощью выражений (1) определяют периоды $T_{1,2}^{(v)}$ из серий с номерами $v = 1, 3, 4, \dots, 8$

Таблица 2

j	0	1	2	3	4	5	6
$a^{(j)ps}$							
$a^{(j)11}$	1964,0	1619,0	1001,0	1201,0	2603,0	2940,0	3175,0
$a^{(j)21}$	-65,8	-151,9	-150,6	599,0	300,0	304,9	248,8
$a^{(j)22}$	1504,6	654,6	581,0	2797,0	1698,0	1999,0	2056,0

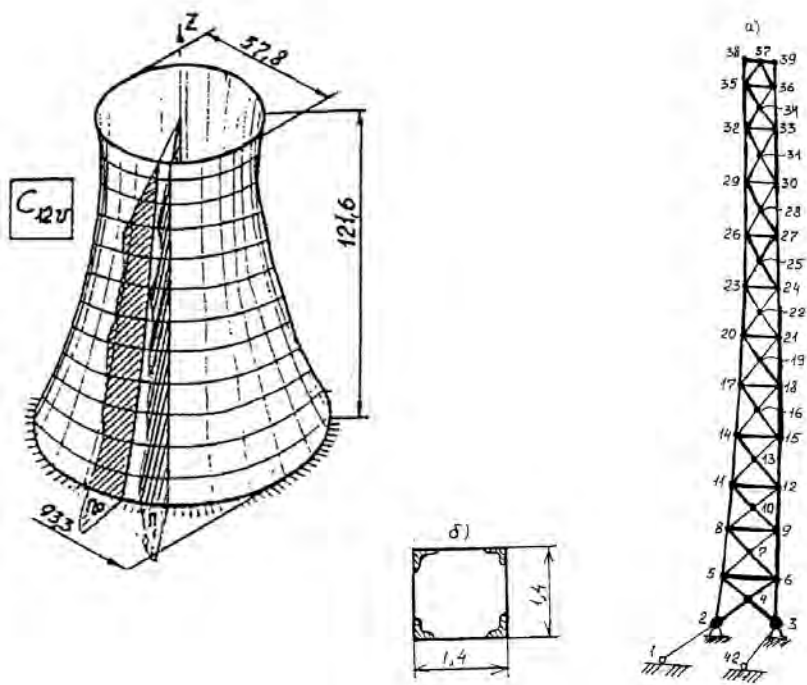


Рис.3

Этап 7. Согласно полученным данным, формы свободных колебаний в новом базисе (векторы $\tilde{X}_s^{(v)\mu}$) представлены в табл. 3.

Таблица 3

Номер серии v	1	3	4	5	6	7	8
Кратность частоты	1	2	2	2	2	2	1
$\bar{X}_1^{(v)\mu}$	1 4,3	1 6,0	1 3,73	1 -0,315	1 -2,73	1 -2,69	1 -3,70
$\bar{X}_2^{(v)\mu}$	1 -0,26	1 -0,87	1 -0,42	1 3,60	1 0,41	1 0,42	1 0,30

Этап 8. Опускается, поскольку отсутствует осцилляция низших форм

Этап 9. Определяются логарифмические декременты затухания по выражениям (2).

Обобщая приведенные результаты, отметим, что первый и четвертый периоды, а также соответствующие им формы практически идентичны в обоих методах. Погрешность расчета остается на допустимом уровне, если толщина оболочки не превосходит $1/20$ высоты. Кроме того, отношение высоты к радиальному размеру объекта не должно превышать 1:1,5. Модель нуждается в уточнении, если среди низших частот будет присутствовать вторая частота какой-либо серии

Выводы

Рассмотренная методика исследования симметричных систем применительно к динамике коротких циклически симметричных тонкостенных конструкций может эффективно использоваться в инженерной практике.

Summary

The efficiency of the results obtained is illustrated by the solving of the free vibration problems for a short shell with the C_{nv} symmetry

1. Бурышкин М.Л., Гордеев В.Н. Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций. - Киев: Будивельник, 1984. - 119 с
2. Бурышкин М.Л. Общая схема решения неоднородных линейных задач для симметричных механических систем. ПММ, 1981, т.45, вып.5. - С. 849-861.
3. Бурышкин М.Л., Брындин В.Н., Тропп Э.А. К теории расчета симметричных линейно-упругих тел дискретным методом перемещений. Препринт ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН: N 1190. – Л.: 1990. - 60 с.
4. Бреднева В.П., Бурышкин М.Л., Галактионов Е.В. Динамические характеристики симметричных тел. Аналитический подход. Препринт ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН: N 1632. - Санкт-Петербург, 1995. - 60 с.
5. Бекшаев С.Я., Бурышкин М.Л. Структура матриц разрешающих уравнений метода перемещений для механических конструкций и систем с симметрией типа C_{nv} . - Деп. В ГНТБ Украины, №1428-Ук, 1994. – 30 с.
6. Бекшаев С.Я., Бредньова В.П., Буришкін М.Л. Наближене аналітичне визначення динамічних характеристик симетричних конструкцій. //Матеріали II-го Міжнародного симпозіуму «Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій». - Львів-Дубляни, 1996. - С. 31 – 34.