

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАЛОГО УПРАВЛЯЮЩЕГО МОМЕНТА С НЕРАВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Я.С. Зинкевич, к.ф.-м.н.

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры*

**1. Введение.** Развитие исследований задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки состоит в учете того обстоятельства, что тела не являются абсолютно твердыми, а близки к указанным идеальным моделям. Необходимость анализа влияния различных неидеальностей обусловлена ростом требований к точности решения задач космонавтики, гироскопии и др. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.) Оно сводится к наличию дополнительных слагаемых в уравнениях движения Эйлера некоторого фиктивного твердого тела. Анализ пассивных движений твердого тела в среде с сопротивлением посвящен ряд работ [1 – 5]. Проблема управления вращениями квазитвердых тел (тело содержит полость, целиком заполненную вязкой жидкостью, действие которой учитывается внутренним моментом сил вязкой жидкости) с помощью сосредоточенных моментов сил, имеющая значение для приложений, менее исследована.

Ниже рассматривается задача квазиоптимального торможения вращений динамически несимметричного тела. На твердое тело действует тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Компоненты управляющих моментов представлены в виде произведений  $\varepsilon b_i u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где выражения  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  имеют размерность момента сил,  $\varepsilon$  – малый параметр,  $u_i \sim 1$ ,  $i = 1, 2, 3$  безразмерные управляющие функции, подлежащие определению. Отметим, что в [6] рассмотрена аналогичная задача при  $b_1 = b_2 = b_3 = b \neq 0$ .

В монографии [7] получены приближенные решения возмущенных задач оптимального торможения вращений твердого тела относительно центра масс, имеющих приложения в динамике космических

аппаратов. Исследованы задачи стабилизации тел с внутренними степенями свободы. Изучено торможение вращений твердого тела, близкого к сферическому, под действием момента сил линейного сопротивления среды.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается динамически несимметричное твердое тело, моменты инерции которого удовлетворяют неравенствам  $A_1 > A_2 > A_3$ . На основе подхода [7] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси, связанной с твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) записываются в виде [2, 3, 7]

$$\dot{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \mathbf{M}'' + \mathbf{M}^r. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{G}$  – кинетический момент тела,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  – вектор абсолютной угловой скорости;  $\mathbf{J} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – постоянный тензор инерции тела,  $\mathbf{M}''$  – вектор управляющего момента сил;  $\mathbf{M}^r$  – вектор момента сил диссипации.

Кинетический момент определяется известным образом

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)^T,$$

$$G_i = A_i \omega_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad G = |\mathbf{G}| = (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2)^{1/2}.$$

В работе предполагается, что момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту

$$\mathbf{M}^r = -\lambda' \mathbf{G}.$$

Здесь  $\lambda'$  – постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Сопротивление среды предполагается слабым порядка малости  $\varepsilon$ :  $\lambda' = \varepsilon \lambda$ . При этом, проекции момента на главные оси инерции тела являются величинами  $\varepsilon \lambda G_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\varepsilon \ll 1$  [2, 3].

Величина управляющего момента сил  $\mathbf{M}''$  предполагается малой порядка  $\varepsilon$ . Компоненты управляющих моментов представлены в виде произведений постоянных  $b_i$  имеющих размерность момента сил на малый параметр  $\varepsilon$  и безразмерные управляющие функции  $u_i$ , подлежащие определению,

$$M_i'' = \varepsilon b_i u_i.$$

Произведения  $\varepsilon b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  характеризуют эффективность системы управления по соответствующей оси связанной системы координат.

Уравнения управляемого движения (1) в проекциях на главные центральные оси инерции в данной постановке задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 + G_3\omega_2 - G_2\omega_3 &= \varepsilon b_1 u_1 - \varepsilon \lambda G_1, \\ \dot{G}_2 + G_1\omega_3 - G_3\omega_1 &= \varepsilon b_2 u_2 - \varepsilon \lambda G_2, \\ \dot{G}_3 + G_2\omega_1 - G_1\omega_2 &= \varepsilon b_3 u_3 - \varepsilon \lambda G_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Для системы (2) требуется найти оптимальные управления  $u_i = u_i(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , которые удовлетворяют ограничению

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 1$$

и переводят систему (2) за минимальное время из произвольного начального состояния  $\omega(t_0) = \omega^0$  в состояние покоя  $\omega(T) = 0$ .

В случае  $b_1 = b_2 = b_3 = b$  ( $b > 0$ ), где параметр  $b$  может быть функцией времени, оптимальное управление имеет вид  $\mathbf{u} = \mathbf{G}/G$ , где  $\mathbf{u}$  – вектор, проекции которого на главные оси инерции тела суть  $u_1, u_2, u_3$  [7, 8]. Если величины  $b_i$  близки, то указанное управление можно считать квазиоптимальным [7, 9].

Для прикладных задач представляет интерес исследование движения твердого тела с заданным законом управления достаточно простого вида [7, 9]:

$$M_i^u = \varepsilon b_i u_i, \quad u_i = -G_i/G, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим замкнутую систему уравнений управляемого движения в проекциях на главные центральные оси инерции, поэтому кинематические соотношения не выписываем.

**3. Решение задачи квазиоптимального торможения.** Домножим первое уравнение (2) с учетом (3) на  $G_1$ , второе – на  $G_2$ , третье – на  $G_3$  и сложим. Получим скалярное произведение  $G_1$ . Учитывая свойство производной скалярного квадрата  $\dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{G} = d|\mathbf{G}|^2/2dt = G\dot{G}$ , после его деления на  $G$  получим скалярное уравнение

$$\dot{G} = -\varepsilon \lambda G - \frac{\varepsilon}{G^2} \sum_{i=1}^3 b_i G_i^2. \quad (4)$$

Домножим первое уравнение (2) с учетом (3) на  $\omega_1$ , второе – на  $\omega_2$ , третье – на  $\omega_3$  и сложим. Согласно известному интегралу энергии, кинетическая энергия твердого тела определена равенством  $H = (A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2)/2$ . В результате имеем выражение для производной от кинетической энергии

$$\dot{H} = -2\varepsilon\lambda H - \frac{\varepsilon}{G} \sum_{i=1}^3 b_i A_i \omega_i^2. \quad (5)$$

Рассмотрим невозмущенное движение ( $\varepsilon = 0$ ). При отсутствии возмущений вращение тела будет движением Эйлера-Пуансо. Переменные  $G$ ,  $H$  являются постоянными, а углы Эйлера  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  – некоторыми функциями времени  $t$ . Медленными переменными в возмущенном движении ( $\varepsilon \neq 0$ ) будут  $G$ ,  $H$ , а быстрыми – углы Эйлера.

Рассмотрим движение при условии  $2HA_1 \geq G^2 > 2HA_2$ , соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции  $Oz_1$ . Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2H(t)A_1 - G^2(t))}{(A_1 - A_2)(G^2(t) - 2H(t)A_3)}, \quad (0 \leq k^2 \leq 1),$$

являющуюся в невозмущенном движении постоянной – модулем эллиптических функций, описывающим это движение, однозначно связанным с величиной кинетического момента  $G$  и кинетической энергией  $H$ .

Для построения усредненной системы первого приближения подставим функции  $\omega_i$ ,  $i=1,2,3$  из невозмущенного движения Эйлера-Пуансо [10] в правую часть уравнений (4), (5) и проведем усреднение по периоду этого движения. При этом для медленных переменных  $G$ ,  $H$  сохраняются прежние обозначения. В результате для  $\tau = \varepsilon t \in [0, T]$  получим

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\tau} &= -2\lambda H - \frac{G}{S(k)} \left\{ b_1(A_2 - A_3) \frac{E(k)}{K(k)} + b_2(A_1 - A_3) \mathcal{W}(k) + \right. \\ &\quad \left. + b_3(A_1 - A_2)(k^2 - \mathcal{W}(k)) \right\}, \\ \frac{dG}{d\tau} &= -\lambda G - \frac{G}{S(k)} \left\{ b_1 A_1(A_2 - A_3) \frac{E(k)}{K(k)} + b_2 A_2(A_1 - A_3) \mathcal{W}(k) + \right. \\ &\quad \left. + b_3 A_3(A_1 - A_2)(k^2 - \mathcal{W}(k)) \right\}, \\ S(k) &= A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2, \quad \mathcal{W}(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)} \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $K(k)$  и  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [11]. Из первого уравнения (6) следует,

что под влиянием сопротивления среды и управляющего момента происходит эволюция кинетической энергии тела  $H$ . Выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части первого уравнения (6), положительно (при  $A_1 > A_2 > A_3$ ), так как справедливы неравенства [11]

$$(1 - k^2)K \leq E \leq K.$$

Поэтому  $dH/d\tau < 0$  поскольку  $H > 0$ , т.е. переменная  $H$  строго убывает для любых  $k^2 \in [0, 1]$ . Аналогично показывается, что кинетический момент тоже убывает.

**4. Численный расчет.** В общем случае решение системы (6) можно построить численно. Для этого приведем систему к безразмерному виду, выбрав за характерные параметры задачи заранее неизвестное время торможения  $T$ , коэффициент проекции управляющего момента  $b_3$  и значения кинетического момента в начальный момент времени  $G_0$ . Безразмерные величины имеют вид

$$\tilde{t} = \frac{\tau}{T}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda T, \quad \tilde{H} = \frac{H}{b_3}, \quad \tilde{A}_i = \frac{A_i}{G_3 T}, \quad \tilde{G} = \frac{G}{G_0}.$$

Введем характерное число

$$\sigma = \frac{b_3 T}{G_0},$$

которое определяет основной процесс задачи – процесс торможения твердого тела под действием управляющего момента за минимальный промежуток времени  $T$ .

Система уравнений движения в безразмерной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{H}}{d\tilde{t}} &= -2\tilde{\lambda}\tilde{H} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{S}(k)} \left\{ \chi_1 (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) \frac{E(k)}{K(k)} + \chi_2 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) W(k) + \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) (k^2 - W(k)) \right\}, \\ \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= -\tilde{\lambda}\tilde{G} - \frac{\sigma}{\tilde{S}(k)} \left\{ \chi_1 \tilde{A}_1 (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) \frac{E(k)}{K(k)} + \chi_2 \tilde{A}_2 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_3) W(k) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{A}_3 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) (k^2 - W(k)) \right\}, \\ \frac{dk^2}{d\tilde{t}} &= \frac{2\sigma}{\tilde{G}} \left\{ \chi_1 k^2 \frac{E(k)}{K(k)} + \chi_2 (k^2 - 1) W(k) + (W(k) - k^2) \right\}, \\ \tilde{S}(k) &= \tilde{A}_1 (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) + \tilde{A}_3 (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) k^2, \quad W(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Интегрирование проводилось для начальных условий  $k^2(0)=0.9999$ ,  $\tilde{G}(0)=1$ , кинетическая энергия в начальный момент времени определялась из соотношения

$$H(0) = \frac{\tilde{G}^2(0)(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3 + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)k^2(0))}{2\sigma\tilde{S}(k^2(0))}.$$

Третье уравнение системы (7) описывает закон изменения величины  $k^2$ , следовательно, при начальном условии  $k^2 \approx 1$  правая часть уравнения должна быть отрицательной. Второе и третье слагаемые в фигурных скобках отрицательные, следовательно, должно выполняться условие для безразмерных коэффициентов управляющего момента:

$$\chi_1 < \frac{\chi_2(1-k^2)W(k) + k^2 - W(k)}{k^2 F(k)}.$$

Проводился численный расчет при различных значениях величин  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  и  $\sigma$ . Для разных значений характерного числа  $\sigma$  существуют значения безразмерных коэффициентов управляющего момента  $\chi_1$  и  $\chi_2$ , при которых происходит квазиоптимальное торможение твердого тела. Характер самого торможения имеет различный вид.

Проведем исследование при  $\sigma=1.3$ . На рис. 1 представлены графики изменений кинетического момента тела с приведенным тензором инерции масс:  $\tilde{A}_1=8$ ,  $\tilde{A}_2=6$ ,  $\tilde{A}_3=4$ , при значении безразмерного коэффициента момента сопротивления среды  $\tilde{\lambda}=0.1$ . Кривая 1 соответствует значениям  $\chi_1=0.5$  и  $\chi_2=0.8$ , кривая 2 –  $\chi_1=0.6$  и  $\chi_2=1$ , кривая 3 –  $\chi_1=0.7$  и  $\chi_2=1.4$ .

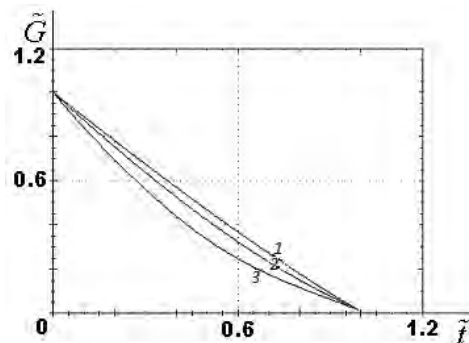


Рис. 1. Эволюция безразмерного кинетического момента тела

Из рис. 1 видно, что чем больше  $\chi_1$  и  $\chi_2$ , тем больше изогнутость кривой; в первом расчетном случае функция  $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{t})$  имеет практически линейный характер. Такой характер имеет функция кинетического момента и при других значениях характерного числа  $\sigma$ .

На рис. 2 представлен результат численного интегрирования для твердого тела с той же геометрией масс, в такой же среде с сопротивлением для характерного числа  $\sigma = 1.4$ . Кривая 1 соответствует безразмерным коэффициентам управляющего момента  $\chi_1 = 0.6$  и  $\chi_2 = 0.8$ , кривая 2 –  $\chi_1 = 0.7$  и  $\chi_2 = 1.1$ , кривая 3 –  $\chi_1 = 0.8$  и  $\chi_2 = 1.8$ . Имеем, что чем больше управляющий момент, тем быстрее происходит процесс торможения твердого тела, а графики функции  $k^2 = k^2(\tilde{t})$  имеют более сложный характер с явно выраженными промежутками вогнутости и выпуклости.

Характер поведения функции кинетической энергии в случае квазиоптимального торможения твердого тела представлен на рис. 3. Численное исследование проводилось для твердого тела с той же геометрией масс и в такой же сопротивляющейся среде. Из рисунка видно, что во всех расчетных случаях за квазиоптимальное время торможения тело приходит в состояние покоя. Кривая 1 получена для безразмерных коэффициентов управляющего момента  $\chi_1 = 0.2$  и  $\chi_2 = 1.6$ , и характерного числа  $\sigma = 0.7$ .

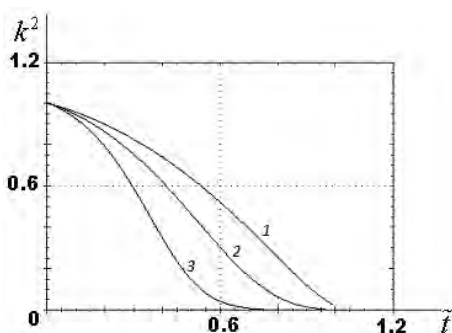


Рис. 2. Графики изменений квадрата модуля эллиптических функций для твердого тела в среде с сопротивлением

Вторая кривая построена для характерного числа  $\sigma = 0.8$  при коэффициентах управляющего момента  $\chi_1 = 1.0$  и  $\chi_2 = 1.2$ . Было проведено исследование для значения  $\sigma = 1.1$  и получено

квазиоптимальное торможение для значений  $\chi_1 = 0.5$  и  $\chi_2 = 1.1$ , что соответствует кривой 3. Кривая 4 показывает вид функции  $\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{t})$ , которая соответствует кривой 2 рис. 3. Заметим, что во всех расчетных случаях функция является монотонно убывающей до нуля за квазиоптимальное время  $T$ .

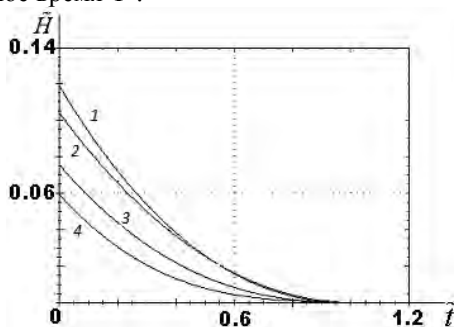


Рис. 3. График изменения безразмерной кинетической энергии в случае квазиоптимального торможения твердого тела

### **Выводы**

Аналитически и численно исследована задача синтеза квазиоптимального по быстрдействию торможения вращений динамически несимметричного твердого тела в среде с сопротивлением. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстрдействия (функция Беллмана), эволюции квадрата модуля эллиптических функций  $k^2$ , безразмерных кинетической энергии и кинетического момента. Установлены качественные свойства квазиоптимального движения.

Работа частично поддержана проектом № 953.1/010 третьего совместного конкурса Государственного фонда фундаментальных исследований Украины и Российского фонда фундаментальных исследований 2013 года.

### **Summary**

The problem of quasi-optimal deceleration of rotations of a dynamically nonsymmetric quasirigid body in a resistive medium was studied analytically and numerically. The qualitative properties of the quasi-optimal motion were found.



## *Литература*

1. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1982. №3.- С. 5-13.
2. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. - М.: Наука, 1985. - 288 с.
3. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т.II. - М.: Наука, 1983. - 544 с.
4. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращений спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. №2. - С. 13-26.
5. Iñarra M., and Lanchares V. Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit // Intern. J. Non-Linear Mechanics. 2006. Vol. 41. No.1.- P. 86-100.
6. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений динамически несимметричного тела в сопротивляющейся среде // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. №1. - С. 16-21.
7. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1987. - 368 с.
8. Смольников Б.А. Обобщение Эйлера случая движения твердого тела // Прикл. мат. и мех. 1967. Т.31, Вып. 2. - С. 735-736.
9. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. - М.: Наука, 1980. - 384 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.1. Механика. - М.: Наука, 1973. - 208 с.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971. - 1108 с.
12. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений несимметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. №1. - С. 40-49.