УДК 624.074.1

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ГРАФОВ

А.В.Ковров, *к.т.н., проф.,* **А.М.Чучмай,** *асс.,* **А.С.Шиляев,** *асс.*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Введение. Плоские и пространственные стержневые системы с перекрестными связями находят применение в разных отраслях промышленности. Особенно широко они используются в строительстве, где являются расчетными схемами монолитных железобетонных каркасов. Как известно [1, 2], проектирование и расчет указанных систем сопровождается определенными проблемами — большое количество конструктивных элементов; высокая, как правило, степень статической неопределимости; наличие геометрической и (или) физической нелинейности; схематизация узлов сопряжения и др.

Расчетами систем с перекрестными связями, которые упрощенно будем называть рамами (плоскими или пространственными), занимались многие исследователи, предлагая различные подходы к решению задач. Последние десятилетия активно используется метод конечных элементов (МКЭ), но при этом возникают дополнительные трудности, присущие МКЭ в целом [3]. Хорошо зарекомендовал себя, особенно в задачах статики, устойчивости и динамики стержневых систем, сравнительно "молодой" метод — численно-аналитический метод граничных элементов (ЧА МГЭ) [3, 4].

Постановка задачи. Как в МКЭ, так и в ЧА МГЭ, на этапе программной реализации алгоритмов возникает необходимость в описании топологии системы — указании расположения узлов сопряжения, опорных и промежуточных шарниров, жесткостей элементов и т.п. Рассмотрим решение этой проблемы для систем с перекрестными связями с использованием теории графов [5].

Результаты исследования. Граф представляет собой структуру в пространстве, состоящую из множества точек, которые связаны множеством непрерывных самопересекающихся линий (прямых или кривых) [5]. Эти множества называются соответственно вершинами и ребрами графа. Если граничные точки ребра образуют упорядоченную пару вершин, то граф является ориентированным.

Каждый ориентированный граф, имеющий n вершин и m ребер, характеризуется матрицей инциденций размером $n \times m$, строки которой соответствуют вершинам графа, а столбцы — его ребрам. Элементы матрицы инциденций могут принимать значения 0, +1 и -1.

Для плоской системы с перекрестными связями (рис. 1) ориентированный граф имеет вид, показанный на рис. 2.

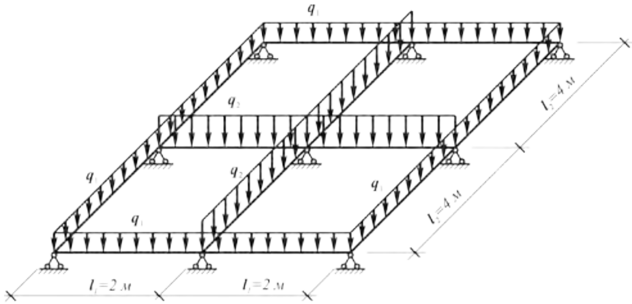

Рис. 1. Плоская система с перекрестными связями

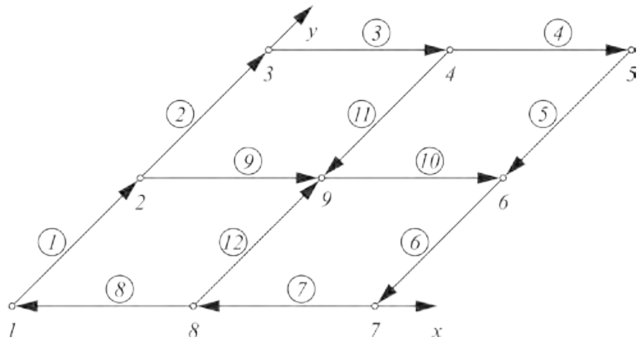

Рис. 2. Ориентированный граф плоской системы
с перекрестными связями

Такому графу, имеющему 9 вершин и 12 ребер, соответствует матрица инциденций размером 9×12 :

$$\mathrm{I}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1\end{Vmatrix}. \quad (1)$$

Анализ матрицы инциденций позволяет определить, какие стержни системы с перекрестными связями сопряжены в том или ином узле (вершине графа). Так, цифры, стоящие в последней строке матрицы (1), говорят о том, что в девятом узле сходятся четыре стержня, три из которых входят в узел (стержни 9, 11, 12), а один (стержень 10) — выходит из узла. Эта информация оказывается весьма существенной при дискретизации системы на одномерные модули в численно-аналитическом методе граничных элементов [3].

Легко видеть, что каждый столбец матрицы инциденций содержит по одной цифре 1 и -1, которые определяют начало и конец соответствующего стержня. Информацию, содержащуюся в матрице инциденций, необходимо дополнить координатами узлов системы, а также вычислить длину каждого элемента.

Поместим начало координат в узел 1 (рис. 2) и введем вектор $\vec{\mathbf{K}}^{\mathrm{T}}$ ("Т" — символ транспонирования матрицы), содержащий координаты узлов системы в выбранной прямоугольной системе координат:

$$\vec{\mathbf{K}}^{\mathrm{T}}=\begin{Vmatrix}\|x_1 \quad y_1\| \, \|x_2 \quad y_2\| \ldots \|x_9 \quad y_9\|\end{Vmatrix}. \quad (2)$$

Для рассматриваемой системы

$$\vec{\mathbf{K}}^{\mathrm{T}}=\begin{Vmatrix}\|0 \quad 0\| \, \|0 \quad 4\| \, \|0 \quad 8\| \, \|2 \quad 8\| \, \|4 \quad 8\| \, \|4 \quad 4\| \, \|4 \quad 0\| \, \|2 \quad 0\| \, \|2 \quad 4\|\end{Vmatrix}. \quad (3)$$

Тогда вектор проекций длин стрежней рамы на координатные оси x и y определяется абсолютной величиной произведения матриц $\mathbf{I}^{\mathrm{T}}$ и $\vec{\mathbf{K}}$:

$$\vec{\mathbf{L}}=\mathrm{mod}\left(\mathbf{I}^{\mathrm{T}}\cdot\vec{\mathbf{K}}\right). \quad (4)$$

Длина каждого элемента системы может быть вычислена как

$$l_n=\sqrt{\begin{Vmatrix}l_{xn} & l_{yn}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}l_{xn}\\ l_{yn}\end{Vmatrix}}, \quad (5)$$

где n — число стержней рамы; l_{xy}, l_{yn} — компоненты вектора $\vec{\mathbf{L}}$.

Транспонируя матрицу (1) и учитывая (3), по формуле (4) получим

$$\vec{\mathbf{L}} = \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} l_{x1} \\ l_{y1} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x2} \\ l_{y2} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x3} \\ l_{y3} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x4} \\ l_{y4} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x5} \\ l_{y5} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x6} \\ l_{y6} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x7} \\ l_{y7} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x8} \\ l_{y8} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x9} \\ l_{y9} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x10} \\ l_{y10} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x11} \\ l_{y11} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x12} \\ l_{y12} \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} = \operatorname{mod}\left(\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 8 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2 \\ 8 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 4 \\ 8 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 4 \\ 4 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 4 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} \right) = \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix}.$$

По формуле (5) найдем длину каждого элемента системы:

$$l_1 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 0 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix}} = 4\text{м}; \; l_2 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 0 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix}} = 4\text{м}; \; l_3 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix}} = 2\text{м};$$

$$l_4 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix}} = 2\text{м}; \; l_5 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 0 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix}} = 4\text{м}; \; l_6 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 0 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix}} = 4\text{м};$$

$$l_7 = \sqrt{\begin{Vmatrix}2 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}2\\0\end{Vmatrix}} = 2м;\ l_8 = \sqrt{\begin{Vmatrix}2 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}2\\0\end{Vmatrix}} = 2м;\ l_9 = \sqrt{\begin{Vmatrix}2 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}2\\0\end{Vmatrix}} = 2м;$$

$$l_{10} = \sqrt{\begin{Vmatrix}2 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}2\\0\end{Vmatrix}} = 2м;\ l_{11} = \sqrt{\begin{Vmatrix}0 & 4\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0\\4\end{Vmatrix}} = 4м;\ l_{12} = \sqrt{\begin{Vmatrix}0 & 4\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0\\4\end{Vmatrix}} = 4м.$$

Приведенную здесь информацию о системе следует дополнить вектором жесткости ее элементов. Для пространственной системы с перекрестными связями построение ориентированного графа и соответствующей ему матрицы инциденций никак не отличается от описанного выше. При этом отметим, что вид матрицы инциденций не позволяет определить мерность задачи, т.е. не дает представления о том, исходная система с перекрестными связями является плоской или пространственной. Для пространственной системы остаются справедливыми формулы (2), (4), (5), но в (2) и (5) появится третья координата.

Выводы. Таким образом, задавая матрицу инциденций ориентированного графа системы, вектор координат узлов и вектор жесткости всех конструктивных элементов, можно получить полную информацию о расчетной схеме системы с перекрестными связями. При этом сохраняется общность изложенного подхода, независимо от того, под какими углами сопрягаются те или иные стержни, а также от того, плоская это система или пространственная.

Summary

The application of graph theory to describe the topology of plane and spatial cross-linked rod systems is considered. It is shown that the incidence matrix of a directed graph, the coordinate vector components and structural elements stiffness vector stiffness, provides full information about the calculation scheme of the cross-linked rod system. A specific numerical example is shown.

1. Ковров А.В. Напряженно-деформированное состояние железобетонных пространственных рамных конструкций / А.В. Ковров, А.М. Кушнир, А.В. Ковтуненко, Н.К. Высочан. — Одесса: ОГАСА, 2015. — 216 с. 2. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення: ДБН В.2.6-98:2009. — Офіц. вид. Київ: Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2011. — 71 с. — (Нормативний документ Мінрегіонбуд України). 3. Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. / Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ. — Труды Санкт-Пербургского политехнич. ун-та. / Инженерно-строительный журнал. — № 4 (22). — СПб, 2011. — С. 33-39. 4. Дащенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса, ВМВ, 2010. — В 2–х томах.— Т.1.— 416 с.— Т.2.— 512 с. 5. Татт У. Теория графов. Пер. с англ. / У. Татт. — М.: Мир, 1988. — 424 с.