

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ЗАРОДЫШЕВЫХ ТРЕЩИН НА ГРАНИЦАХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БЕТОНЕ

В.С.Дорофеев, д.т.н., проф., А.В.Зинченко, аспирант

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Одесса*

Известно, что к причинам образования трещин на поверхности бетона относят пластическую усадку [1, 2], которая происходит в течение первых нескольких часов после укладки, пока бетон еще находится в пластическом состоянии. Вероятность возникновения трещин по этой причине зависит от интенсивности водоотделения и испарения воды от бетонной смеси. Физико-механические свойства материалов (бетонов) в значительной мере зависят от степени дефектности их структуры [3-5].

Ниже рассматривается начальная стадия работы бетона в процессе формирования цементного камня и появления усадочных напряжений, причем концентрация напряжений происходит на включениях. Под включением будем понимать область с измененными свойствами. Это позволяет использовать соотношения линейной теории упругости для кусочно-однородного тела без разрывов и трещин. В дальнейшем будем исследовать только двумерные распределения напряжений: плоскую или плоское напряженное состояние. С одной стороны, эти случаи широко распространены в практике проектирования, а с другой, - для описания двумерного напряженного состояния в математической теории упругости развит исключительно мощный математический аппарат – аппарат теорий аналитических функций комплексного переменного, впервые примененного Колосовым Г.В. и развитого Мусхелишвили Н.И. [6] (рис 1).

Применение этого аппарата дает возможность получить числовые результаты, характеризующие начальную стадию работы композитов для любых характеристик материалов, форм включений и внешних воздействий.

Решение поставленных задач сводится к определению двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$. Компоненты

напряженного состояния выражаются через $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. при помощи соотношений:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z) \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[z\varphi''(z) + \overline{\psi'(z)} \right]$$

Здесь $\operatorname{Re} \varphi'(z)$ – материальная часть аналитической функции $\varphi(z)$. А перемещения:

$$2\mu(u - iv) = x\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (2)$$

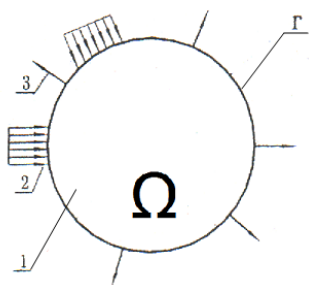


Рис.1 расчетная модель однородного материала:

1 - однородный материал с границей Γ ;
2, 3 - распределенная и сосредоточенная нагрузки

Определение искомых функций осуществлялось из системы функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\mu} \varphi(t^{(m)}) - \frac{1}{\mu} \left[t^{(m)} \overline{\varphi'(t^{(m)})} + \overline{\psi(t^{(m)})} \right] - \frac{x_0}{\mu_0} \varphi_m(t^{(m)}) \\ & + \frac{1}{\mu_0} \left[t^{(m)} \overline{\varphi'(t^{(m)})} + \overline{\psi_m(t^{(m)})} \right] = g(t^{(m)}); \end{aligned} \quad (3)$$

$$g(t^{(m)}) = g_1(t) + ig_2(t);$$

$$t^{(m)} \in \Gamma^{(m)}; m = 0, 1, \dots$$

Заметим, что $g(t)$ задает величину смещения, которую следует задать в точке $t^{(m)}$ ядра $\Omega^{(m)}$, чтобы совместить ее с точкой $t^{(m)}$ элемента границы $\Gamma^{(m)}$ области Ω , когда последняя находится в недеформированном состоянии. Например, в случае равномерной усадки круговых упругих ядер начальным радиусом R в отверстия единичного радиуса

$g(t^{(0)}) = (R - 1)e^{i\theta}$, θ – полярный угол точки $t^{(0)}$ в системе координат, связанной с центром отверстия.

Кроме условий (3), для каждого элемента границы Γ должны выполняться условия равновесия, которые приводят ко второму функциональному уравнению:

$$\begin{aligned} \varphi\left(t^{(m)}\right)+t^{(m)} \overline{\varphi'\left(t^{(m)}\right)}+\overline{\psi\left(t^{(m)}\right)}-\varphi_m\left(t^{(m)}\right)- \\ -t^{(m)} \overline{\varphi'_m\left(t^{(m)}\right)}-\overline{\psi_m\left(t^{(m)}\right)}=0 \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (3) и (4) совместно с (2) дает возможность определить $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi_m(z)$, $\psi_m(z)$, ($m=0,1,\dots, n=1$) по заданным $g(t)$ и условиям на бесконечности.

Максимальные тангенциальные напряжения $\tau_{\max}$ и главные напряжения σ_1 и σ_2 в точке z с Ω выражаются через комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

$$\tau_{\max} = [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (5)$$

$$\sigma_1 = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (6)$$

$$\sigma_2 = \varphi'(z) + \overline{\varphi'_1(z)} + [\bar{z}\varphi''_1(z) + \psi'_1(z)], \quad (7)$$

В качестве модели, описывающей распределение напряжений в композите, рассматривается бесконечное изотропное упругое тело с регулярным кольцом круговых включений. Поэтому их можно представить как упругие ядра с равными эффективными характеристиками. Упругие свойства материалов ядер и матриц отличаются друг от друга и описываются модулем упругости и коэффициентом Пуассона ν либо константами Ляме λ и μ , которые связаны с E и ν соотношениями

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{E}{2(1-\nu)}$$

Кроме них вводится упругая постоянная:

$$\chi = \frac{3-\nu}{1-\nu}$$

Исследуется распределение напряжений в композите, обусловленное скачками перемещений на границах ядер. Тем самым моделируются усадочные явления, происходящие как в материале матрицы, так и в материале ядер. Будем считать, что при любых деформациях трещины между ядрами и матрицей не возникают, а центры тяжести ядер совпадают с центрами тяжести соответствующих плоскостей в матрице (рис. 2).

Обозначим Ω – пересечение комплексной плоскости xOy с матрицей Ω_r ($r=0,1,\dots, n-1$) – область, занимаемая $r - m$ Γ_r ($r=0,1,\dots, n-1$) – граница между ядром Ω_r и областью Ω (рис.3).

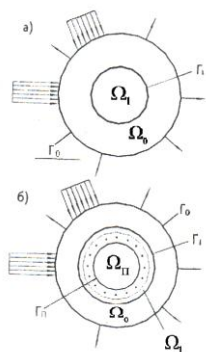


Рис.2 Расчетная модель неоднородного материала: а – наличие четной границы; б – случай плавного изменения свойств

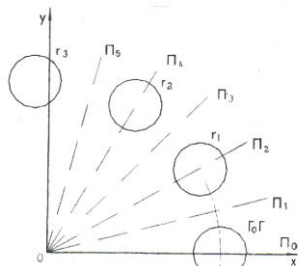


Рис.3 Модель расчета с регулярным кольцом круговых включений

При решении системы функциональных уравнений, для циклически симметричной области применим общий метод учета симметрии среды, разработанный М.Л. Бурышкиным [7]. Исходная задача распадается на несколько обобщенных симметричных задач.

Пусть система координат $x'Oy'$ получена из xOy поворотом на угол τ . Тогда компоненты напряженно-деформированного состояния в новой системе координат определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x' + \bar{\sigma}_y' &= 4\operatorname{Re}\varphi'(z) \\ \bar{\sigma}_y' - \bar{\sigma}_x' + 2i\tau_{xy} &= 2[z\varphi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta} \\ 2\mu(U' - iv') &= [z\varphi(z) - z\varphi'(z) - \psi(z)]e^{-i\theta}\end{aligned}\quad (8)$$

Соотношения (8) пригодны для отыскания напряжений и смещений в полярной системе координат. в полярной системе координат. При этом, $\bar{\sigma}_x' = \bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_y' = \bar{\sigma}_\theta$, $\tau_{xy}' = \tau_{r\theta}$, $u' = u_r$, $v = u_\theta$, θ – полярный угол..

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, описывающая напряженно-деформированное состояние матрицы Ω , будем отыскивать в виде:

$$\varphi(z) = \varphi^*(z) + \hat{\varphi}(z), \quad \psi(z) = \psi^*(z) + \hat{\psi}(z),$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описывает напряженно-деформированное состояние без отверстий под действием нагрузок, приложенных на бесконечности, а $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ возмущение, вносимое отверстиями и исчезающее на бесконечности.

Для плоскости, испытывающей растяжение усилиями P вдоль оси Ox :

$$\varphi(z) = Pz/4; \quad \psi(z) = -Pz/2$$

Решение обобщенной циклической задачи сводится к нахождению функций $\phi^{(p)}(z), \psi^{(p)}(z), \varphi_{vp}^{(i)}(z), \psi_{vp}^{(i)}(z)$ из уравнений

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_{vp}(t)} + t\overline{\varphi'_{vp}(t)} + \overline{\varphi_{vp}(t)} - \overline{\varphi_{vp}^{(e)}(t)} - t\overline{\varphi_{vp}^{(e)}(t)} - \overline{\psi_{vp}^{(e)}(t)} = P_{vp}(t); \\ \chi\overline{\varphi_{vp}(t)} - \frac{1}{\mu}[\overline{t\varphi_{vp}^{(e)}(t)} + \overline{\psi_{vp}(t)}] - \frac{\chi}{\mu_1}\overline{\varphi_{vp}^{(e)}(t)} + \\ + \frac{1}{\mu_1}[\overline{t\varphi_{vp}^{(e)}(t)} + \overline{\psi_{vp}^{(e)}(t)}] = g_{vp}(t); \quad t \in \Gamma_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Принимая

$$\begin{aligned} \phi^{(p)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} (z-e)^{-k}; \quad \psi^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp} (z-e)^{-k} \\ \varphi_{kp}^{(e)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{kp} (z-e)^k; \quad \psi^{(e)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{kp} (z-e)^k \end{aligned}$$

Методом рядов (7) система (9) сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_{kp}, b_{kp}, A_{kp}, B_{kp}$ ($k=1,2,\dots, p=1,2$), которая решается методом редукции.

Так как изначально принято, что структура конструкций состоит из структурных элементов различного масштабного уровня [3], то можно предположить, что под действием внешних воздействий в бетоне на одном из уровней неоднородностей происходит структурные изменения. Это вызывает локальные изменения свойств материалов конструкции. В этой связи можно допустить, что в теле возникла область Ω_1 , свойства которого отличается от свойств материалов области Ω_0 (рис. 2а). Тогда область Ω_1 можно рассматривать как включение в Ω_0 . Напряженное состояние составного тела будет описываться двумя параметрами комплексных функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ ($z \in \Omega_0$) – для основного материала и $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ ($z \in \Omega_1$) – для включения.

На границе контакта должны выполняться условия равновесия и условия непрерывности перемещений.

$$\overline{\varphi_0(t)} + t\overline{\varphi'_0(t)} + \overline{\psi_0(t)} = \overline{f(t)}, \quad (t \in \Gamma_0) \quad (10)$$

$$\overline{\varphi_0(t)} + \overline{t\varphi'_0(t)} + \overline{\psi_0(t)} = \overline{\varphi_1(t)} + t\overline{\varphi'_1(t)} + \overline{\psi_1(t)}, \quad (t \in \Gamma_0) \quad (11)$$

$$\frac{\chi_0}{\mu_0} \varphi_0(t) - \frac{1}{\mu_0} [t\varphi_0(t) + \varphi_0(t)] = \frac{\chi_1}{\mu_1} \varphi_1(t) - \frac{1}{\mu_1} [t\varphi'_1(t) + \psi_1(t)] \quad (t \in \Gamma_1) \quad (12)$$

В формулах (10) ... (12) предполагается наличие границы между основным материалом и включением. В случае плавного изменения свойств (на макроуровне) период можно описать несколькими концентрическими контурами, между которыми свойства материала предполагаются одинаковыми (рис.26). В этом случае вводится $(n+1)$ пара комплексных функций, где φ_0 и ψ_0 описывают напряженное состояние нового материала, φ_i и ψ_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) – напряженное состояние концентрических областей Ω_i , а φ_n и ψ_n – напряженное состояние внутреннего ядра. Все эти функции могут быть найдены из системы уравнений аналогично (10) ... (12), в которых условия равновесия и непрерывности записываются для каждого контура.

При заданных скачках смещений состояния объекта определяется шестью параметрами: упругими характеристиками материала матрицы χ и μ , материала ядер χ_0 и μ_0 и геометрическими параметрами области p и a . В ходе расчетов фиксировались параметры материалов матрицы ($\chi=2$, $\mu=0,4$), что отвечает единичному модулю упругости и коэффициенту Пуассона 0,3, и в широком диапазоне менялись p , a , χ_0 , μ_0 . Анализ числовых результатов показывает, что при $0,01 < \mu/\mu_0 < 1,00$ распределение напряжений на основном контуре мало отличается от равномерного с интенсивностью $\sigma_\theta = 2\mu^{(1+\chi)}/(2\mu-1)$. Характер распределения напряжений на смежном контуре определяется величиной $\chi/\chi_1 > 1$ картина распределения напряжений на смежном контуре такая же, как в случае одинаковых материалов плоскости и ядер, а при $\chi/\chi_1 > 1$ эпюра σ_θ на контуре Γ_0 меняет знак.

Сравнение максимальных значений σ_θ на Γ_0 и Γ_1 дает возможность сделать вывод о малом взаимном влиянии смежных ядер при $10^{-2} < \mu/\mu_0 < 10^2$.

Таким образом, при анализе причин развития технологических трещин вполне адекватной моделью может служить бесконечная плоскость с одним включением. Поскольку, в процессе развития трещина уходит с границ контакта, то для описания процесса развития трещины допустимо принять в качестве модели однородную плоскость, на однородное напряженное состояние, которой накладывается поле напряжений, порождаемых самой трещиной.

В качестве примера на рисунке 4 изображены эпюры напряжений σ_r/μ_Δ на контурах кольца с пятью абсолютно жесткими ядрами. Коэффициент Пуассона материала матрицы принят 0,3. Линии 1 и 2 отве-

чают значениям ширины перемычки между отверстиями, соответственно, $a=0,3$ и $a=0,7$. Штриховой линией показана единичная эпюра объекта.

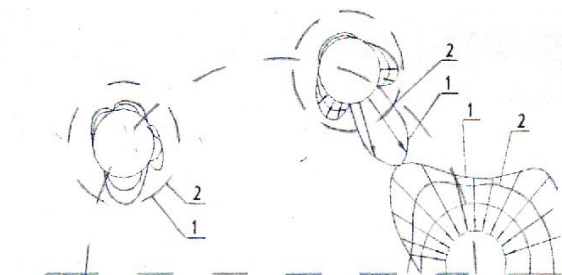


Рис.4. Эпюры напряжений на контуре кольца: 1 – ширина перемычки между отверстиями $a=0,3$; 2 – ширина перемычки между отверстиями $a=0,7$

В ходе вычислений фиксировались параметры материала матрицы ($\chi=2$, $\mu=0,4$), что соответствует материалу с единичным модулем упругости и коэффициентом Пуассона 0,3. В широких пределах изменились геометрические параметры конструкции n и a и параметры χ_0 и μ_0 материала ядер.

Характерные эпюры σ_θ приведены на рис.5.

Практически во всех случаях максимальная концентрация напряжений достигается на основном контуре. Линии уровня коэффициента концентрации напряжений $k = \sigma_{\theta\max} / p$ в зависимости от свойств материала и геометрических параметров области изображены на рис. 5.

Большое количество параметров затрудняет использование таблиц в практических вычислениях. Однако, рассматриваемая задача имеет три простых случая: А – растяжение плоскости с кольцом отверстий, Б – с кольцом абсолютно жестких ядер, В – растяжение сплошной плоскости.

Выводы

1. Проведенный численный эксперимент дал возможность заключить, что при твердении грубогетерогенных материалов (бетонов) возникает неравномерное поле деформаций, которое ведет к концентрации напряжений на границе включений и появлению зародышевых трещин.

2. При анализе причин развития технологических трещин адекватной моделью может служить бесконечная плоскость с одним включением.

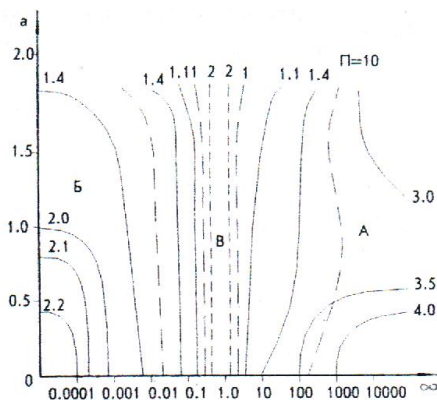


Рис. 5 Номограмма коэффициента концентрации напряжений при растяжении бесконечной плоскости:

А – растяжение плоскости с кольцом отверстий; Б – то же, с кольцом абсолютно жестких ядер; В – растяжение сплошной плоскости

3. При внешних воздействиях на бетон на микро- и макро-уровнях и вследствие усадочных явлений в нем на границах включений возникает концентрация напряжений, которая может перерасти в трещины. Начальные (технологические) трещины зависят от состава бетона, интенсивности водоотделения и испарения воды [2] и могут достигать ширины раскрытия 2 мм.

Summary

This article describes numerical studies of the embryonic cracks appearance at the borders inclusion in the concrete.

Литература

1. EN 1992-1-1. Общие правила и правила для зданий. 2. Руководство для проектировщиков к еврокоду 2: Проектирование железобетонных конструкций. Э.В. Биби, Р.С. Нараянан. Изд. 2, М., 2013, 291 с. 3. Соломатов В.И., Дорофеев В.С., Выровой В.Н., Сиренко А.В. Композиционные строительные материалы и конструкции пониженной материалоемкости. – К., Будівельник, 1991. – 144 с. 4. Beeby A.W. Cracking and Corrosion. Concrete in the Oceans Report №2 CIRIA Underwater Engineering Group, London, 1978. 5. Schiessl P. and Ranpach M. Laboratory studies and calculations on the influence of chloride-induced corrosion of steel in concrete. AC Materials Journal. 94, 1997, с.56-62. 6. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1976. – 707 с. 7. Бурышкин М.Л., Тропп Э.А., Шупта В.П. Эффективный метод решения задач термоупругости для дисков циклической структуры // АН СССР, ФТН А.Р. Йоффе, 1336. Л., 1989.