УДК 539.3

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ПРЯМИХ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ ТА ДИНАМІКИ МАСИВНИХ КОНСТРУКЦІЙ

В.К.Чибіряков, *д.т.н., проф.,* **А.М.Станкевич,** *к.т.н., доц.,*
Д.В.Левківський, В.Ф.Мельничук

Київський національний університет будівництва і архітектури

Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану масивних конструкцій при статичних та динамічних впливах є актуальною проблемою будівельної механіки, ще далекою від остаточного розв'язання, у зв'язку з цим продовжується розробка методів розрахунку масивних конструкцій. Сучасні програмні комплекси розв'язання цих задач в основному використовують метод скінченних елементів. Але не виключається також розробка альтернативних методів розв'язання багатовимірних задач, які інколи забезпечують більш високу точність розрахунку, меншу трудомісткість та вищу ефективність алгоритмів.

Аналіз досліджень і публікацій. Класичний підхід до розв'язання багатовимірних задач будівельної механіки базується на зниженні вимірності задач та розв'язанні спрощених вихідних рівнянь аналітичними або чисельними методами. Процес зниження вимірності (редукування) вихідних рівнянь раніше базувався на певних гіпотезах відносно особливостей напружено-деформованого стану (наприклад, теорія згину балки, теорія тонких пластин, теорія тонких оболонок та ін.). Останнім часом з цією метою застосовують математичні методи (наприклад, теорія оболонок І.Н. Векуа). Такий підхід складається з двох етапів - на першому етапі знижується вимірність вихідних рівнянь, на другому - редуковані рівняння розв'язуються аналітичними або чисельними методами.

Одним із важливих варіантів такого підходу в будівельній механіці є метод прямих. Головною особливістю метода прямих є зведення вихідних багатовимірних по просторових координатах диференціальних рівнянь в частинних похідних до системи звичайних диференціальних рівнянь. Основні теоретичні засади метода прямих були розроблені в 30-х 40-х роках минулого століття [1-3], [4-6], [7]. Вони передбачали застосування метода прямих переважно для розв'язування задач статики. Зниження вимірності, в основному, виконувалось за допомогою метода скінченних різниць, який застосовувався для апроксимації диференціальних операторів по просторовим змінним. На другому етапі – розв’язуванні граничних задач для системи звичайних диференціальних рівнянь – використовувались аналітичні методи або деякі наближені ітераційні методи [7]. Головні ускладнення при побудові редукованих рівнянь – формулювання граничних умов, врахування законтурних точок, на другому етапі – обмеженість застосування метода прямих при дослідженні об’єктів з неоднорідного матеріалу, неможливість розгляду динамічних задач.

З появою сучасних ефективних методів розв’язування систем звичайних диференціальних рівнянь другий етап метода прямих отримав апарат розв’язування редукованих рівнянь для статичних задач [8], а також квазістатичних задач (знаходження частот власних коливань пластин і оболонок [9]). Але сучасний стан метода прямих не відповідає досягнутому рівню розвитку методів будівельної механіки.

Мета дослідження. Авторами даної роботи запропоновано іншу схему першого етапу метода прямих, за допомогою якої для вихідної граничної або початково-граничної багатовимірної задачі будується система одновимірних по просторових координатах редукованих рівнянь, граничних та початкових умов. Редуковані граничні та початково-граничні задачі, що будуються в результаті виконання першого етапу модифікованого метода прямих, орієнтовані на застосування сучасних чисельних методів з максимальним використанням обчислювальної техніки.

Виклад основного матеріалу

Основні особливості першого етапу запропонованого варіанту метода прямих розглянемо на конкретному прикладі. При дослідженні НДС системи паля (або анкер) – оточуючий грунт при статичних або динамічних впливах можна розглядати таку фізичну модель процесу. Враховуючи, що паля (або анкер) мають один розмір (довжину) значно більший за два інших, при дослідженні НДС палі використовуємо в якості розрахункової моделі стержень, який працює на розтяг-стиск та згин у двох взаємно-перпендикулярних площинах, що проходять через вісь стержня. Паля і, відповідно, розрахункова модель – стержень можуть бути сталого або змінного по довжині перерізу.

У якості розрахункової моделі оточуючого грунту розглянемо тривимірне пружнє середовище, з якого виділимо прямокутний паралелепіпед, віднесений до декартової системи координат, розміри в плані якого остаточно вибираються в результаті дослідження НДС системи з метою з’ясування, при яких розмірах вплив відкинутої частини грунтової маси на НДС палі та оточуючого грунту несуттєвий (рис. 1).

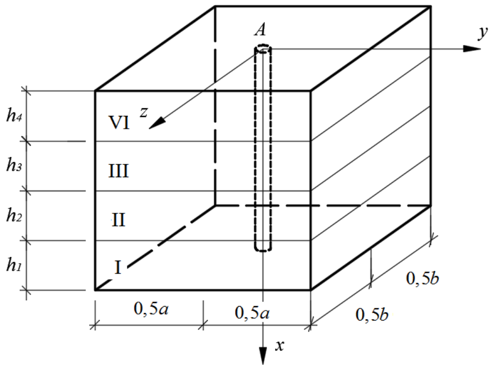

Рис. 1. Прямокутний паралелепіпед, виділений з тривимірного пружного середовища

Матеріал грунтової маси неоднорідний в напрямку осі OX , зміну модуля пружності грунта будемо враховувати за допомогою кусково-сталої функції $\psi(x)$, тобто

$$E(x) = E_0 \cdot \psi(x),$$

де за E_0 прийнято модуль пружності першого шару грунта. Фізичні характеристики палі будемо позначати верхнім індексом "c". Взаємодію граней виділеного паралелепіпеда з відкинутою масою грунту будемо моделювати за допомогою пружних стержнів відомої жорсткості k, наприклад, в точках грані $y = \frac{a}{2}$ маємо модель, зображену на рис.2.

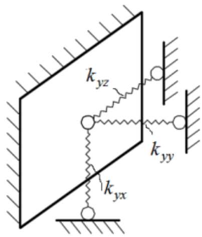

Рис. 2. Модель з пружних стержнів

На грані $x = 0$ до палі (анкера) в точці А може бути прикладено зосереджену силу, спрямовану в будь-якому напрямі, статичну або змінну в часі.

Взаємодію будь-якої точки моделі палі з відповідною точкою грунтового масиву будемо моделювати за допомогою пружних стержнів відомої жорсткості (рис. 3).

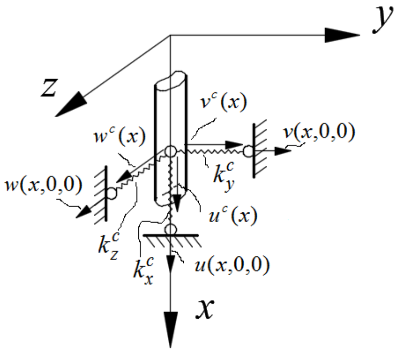

Рис 3. Модель взаємодії будь-якої точки моделі палі
з відповідною точкою грунтового масиву

Тут $u^c(x)$, $v^c(x)$, $w^c(x)$ – переміщення точки осі стержня з координатою x; $u(x,0,0)$, $v(x,0,0)$, $w(x,0,0)$ – переміщення відповідної точки тривимірного середовища; k_x^c, k_y^c, k_z^c – жорсткість пружних стержнів, що моделюють взаємодію палі (анкера) з оточуючим грунтом. Якщо $k = 0$, то взаємодія відсутня, при $k \to \infty$ у відповідному напрямку враховується абсолютний контакт.

З урахуванням зроблених припущень математична модель, що описує побудовану фізичну модель, є системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, яку будемо записувати у вигляді диференціальних рівнянь першого порядку, оскільки в цьому варіанті кожна похідна присутня в окремій складовій, що суттєво застосовується при зниженні вимірності. Таким чином, в якості вихідних рівнянь будемо розглядати такі рівняння.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X+\delta(y)\delta(z)k_x u(x,0,0)-k_x u^c(x)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y+\delta(y)\delta(z)k_y v(x,0,0)-k_y v^c(x)=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z+\delta(y)\delta(z)k_z w(x,0,0)-k_z w^c(x)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\sigma_x = \left((\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_0 \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right)\psi(x),$$

$$\sigma_y = \left(\lambda_0 \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right)\psi(x),$$

$$\sigma_z = \left(\lambda_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_0 \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{\partial w}{\partial z} \right)\psi(x),$$

$$\tau_{xy} = \mu_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)\psi(x), \qquad (2)$$

$$\tau_{xz} = \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\psi(x),$$

$$\tau_{yz} = \mu_0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)\psi(x).$$

Тут з рівнянь узагальненого закону Гука виключено компоненти тензора деформації за допомогою рівнянь Коші. У рівняння рівноваги теорії пружності введені за допомогою дельта-функції Дірака складові, що врахують взаємодію стержня та грунтової маси. При розгляді статичних задач права частина рівнянь (1) дорівнює нулю.

Система рівнянь (1), (2) доповнюється рівняннями, що зв'язують поздовжню силу N, перерізуючі сили Q_1 та Q_2, згинальні моменти M_1 та M_2, переміщення точок осі палі u^c, v^c, w^c та кути повороту перерізу палі φ_1 та φ_2. Особливий зміст з них мають рівняння рівноваги елемента палі, які зв'язують тривимірні по просторовим координатам рівняння, що описують НДС грунтової маси з одновимірними рівняннями, що описують НДС палі.

$$\frac{\partial N}{\partial x} + k_1[u(x,0,0) - u^c(x)] = \rho_c F_c \frac{\partial^2 u^c}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + k_2[v(x,0,0) - v^c(x)] = \rho_c F_c \frac{\partial^2 v^c}{\partial t^2}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} + k_3[w(x,0,0) - w^c(x)] = \rho_c F_c \frac{\partial^2 w^c}{\partial t^2}.$$

Тут ρ_c, F_c – щільність матеріалу палі та її площа поперечного перерізу.

Невідомі функції, які входять до рівнянь (1)-(3), повинні задовольняти початковим та граничним умовам. Початкові умови приймаються у звичайному вигляді при $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), \quad \dot{u}(x,y,z,0) = U_0(x,y,z),\\
v(x,y,z,0) = v_0(x,y,z), \quad \dot{v}(x,y,z,0) = V_0(x,y,z),\\
w(x,y,z,0) = w_0(x,y,z), \quad \dot{w}(x,y,z,0) = W_0(x,y,z);
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
u^c(x,0) = u_0^c(x), \quad \dot{u}^c(x,0) = U_0^c(x),\\
v^c(x,0) = v_0^c(x), \quad \dot{v}^c(x,0) = V_0^c(x),\\
w^c(x,0) = w_0^c(x), \quad \dot{w}^c(x,0) = W_0^c(x).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Тут великими латинськими літерами позначено задані значення швидкостей.

Натомість крайові умови формуються згідно з використанням пружних в’язей заданої жорсткості і включають як переміщення, так і напруження. На грані $x = 0$

$$
\begin{aligned}
\sigma_x^0 - k_{xx}^0 u^0 + q_{xx}^0 + k_{xx}^0 u_{cep}^0 = 0,\\
\tau_{xy}^0 - k_{xy}^0 v^0 + q_{xy}^0 + k_{xy}^0 v_{cep}^0 = 0,\\
\tau_{xz}^0 - k_{xz}^0 w^0 + q_{xz}^0 + k_{xz}^0 w_{cep}^0 = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

На грані $x = L$

$$
\begin{aligned}
-\sigma_x^L - k_{xx}^L u^L + q_{xx}^L + k_{xx}^L u_{cep}^L = 0,\\
-\tau_{xy}^L - k_{xy}^L v^L + q_{xy}^L + k_{xy}^L v_{cep}^L = 0,\\
-\tau_{xz}^L - k_{xz}^L w^L + q_{xz}^L + k_{xz}^L w_{cep}^L = 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Тут $f^0 = f(0,y,z), \quad f^L = f(L,y,z)$.

У такому вигляді вони є істотними крайовими умовами, з яких за допомогою граничного переходу випливають класичні крайові умови – при $k \to \infty$ – задані переміщення, при $k \to 0$ – задані напруження на грані. Запропонований вигляд крайових умов дозволяє уникнути втрати стійкості при реалізації граничного переходу при $k \to \infty$. Аналогічно формуються початкові та крайові умови для одновимірного об’єкта-стержня. При виборі функцій, що описують НДС та відповідних вихідних рівнянь, граничні умови є алгебраїчними співвідношеннями.

За основними принципами методу прямих на розрахункову область наносимо дві системи прямих – одну систему N_y прямих, паралельних осі Oy, другу – N_z прямих, паралельних осі Oz. Прямі наносяться зі сталим або змінним кроком [10]. У перерізах розрахункової області $x = const$ нанесені прямі утворюють координатну сітку, вздовж прямих якої всі функції, що входять до вихідних рівнянь (1)-(3) вважаються визначеними дискретно, натомість по координаті x – визначеними неперервно.

Для зниження вимірності вихідних рівнянь по координатах y та z пропонується використовувати проекційний метод (у варіанті методу Бубнова-Гальоркіна-Петрова [11]), де від базисних функцій не вимагається виконання істотних крайових умов. Процедура зниження виконується спочатку по одній координаті, наприклад, по y, а потім по іншій. Застосування проекційного методу передбачає вибір базисних функцій, застосування певної процедури проектування та побудови на її основі редукованих рівнянь.

В якості базисних функцій по змінній y та z вибираємо локально зосереджені функції, найпростіший варіант яких – кусково лінійні функції в межах двох сусідніх ділянок, причому в спільній точці цих ділянок базисна функція $\varphi(y_i) = 1$, в двох крайніх точках $\varphi(y_{i-1}) = 0$, $\varphi(y_{i+1}) = 0$. Використовуються також більш складні локально зосереджені функції [10]. По суті, в кожному перерізі $x = const$ розглядаються базисні функції від двох змінних, що є добутками $\varphi_i(y) \cdot \varphi_k(z),\ (i = 1, N_y; k = 1, N_z)$.

У функціональних просторах, як правило, процедура проектування пов’язана з визначенням скалярного добутку. В якості скалярного добутку двох функцій по одній змінній будемо розглядати інтеграл виду:

$$\begin{aligned} (f_1(y), f_2(y)) &= \int_{-a}^{a} f_1(y) f_2(y) dy, \\ (f_1(z), f_2(z)) &= \int_{-b}^{b} f_1(z) f_2(z) dz. \end{aligned} \tag{8}$$

Оскільки в такому скалярному добутку локально зосереджені функції не є ортогональними, то при побудові редукованих рівнянь виникає ситуація, аналогічна тій, що є основою розробки тензорного числення, якщо розглядаються вектори в косокутній системі координат. За аналогією з тензорним численням, разом з вибраним базисом, який називається основним (або коваріантним) і позначається нижніми індексами, розглядається взаємний (контраваріантний) базис, який пов'язаний з основним таким співвідношенням

$$(\varphi_i, \varphi^j) = \delta_{i\cdot}^{\cdot j}, \tag{9}$$

де

$$\delta_{i\cdot}^{\cdot j} = \begin{cases} 1 & \text{якщо } i=j \\ 0 & \text{якщо } i \neq j \end{cases} \quad \text{– символ Кронеккера.}$$

Кожна функція однієї змінної (наприклад y) може бути наближено апроксимована елементами основного базису

$$f(y) \approx f^i \varphi_i(y), \tag{10}$$

або взаємного базису

$$f(y) \approx f_i \varphi^i(y), \tag{11}$$

Тут компоненти f^i слід розглядати як контраваріантні компоненти, а f_i – коваріантні компоненти елемента $f(y)$ в даному базисі. А враховуючи факт, що інтеграли від добутків однієї функції на базисні функції в математиці називаються моментами цієї функції відносно базисних функцій, то коваріантні компоненти мають зміст коефіцєнтів у розкладі функції по основному базису.

Тут і далі використовується узгодження Ейнштейна – по індексах, що повторюються у двочленному виразі, передбачається підсумовування в межах зміни індексу.

Використання основного та взаємного базисів вимагає застосовувати двічі коваріантні g_{ij} та двічі контраваріантні g^{ij} компоненти метричного тензора другого рангу

$$g_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j), \quad g^{ij} = (\varphi^i, \varphi^j). \tag{12}$$

Крім того, використовується ще два варіанти компонент метричного тензора

$$\delta_{i\cdot}^{\cdot j} = (\varphi_i, \varphi^j), \quad \delta_{\cdot j}^{i\cdot} = (\varphi^i, \varphi_j). \tag{13}$$

Компоненти метричного тензору (12) дозволяють переходити від коваріантних до контраваріантних компонент (операція підняття індексів у тензорному численні) та навпаки (операція опускання індексів), компоненти метричного тензору (13) використовуються в операції заміни індексів.

У зв'язку із застосуванням правил тензорного числення при виконанні операцій проекціювання будемо використовувати індекси

$i, j, \alpha, \beta, \gamma$, пов'язані із змінною y та $k, l, \varepsilon, \eta, \theta$ пов'язані із змінною z.

Проілюструємо послідовність процесу редукування по змінній y на першому рівнянні із (1). Це рівняння скалярно множиться на систему базисних функцій $\varphi_i(y)$ та інтегрується по y.

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - X - \delta(y)\delta(z) k_x u(x,0,0) - k_x u_0(x), \varphi_i(y) \right);$$

При цьому обчислення інтегралів виконується по-різному. Якщо під інтегралом розглядається похідна по y від переміщення, то підставляється розклад цієї функції по основному базису, якщо це похідна по y від напруження, то спочатку інеграл перетворюється інтегруванням частинами і тільки після цього підставляється розклад функції напружень по основному базису. Потрібно також зазначити, що при інтегруванні зникає дельта-функція, тому що використовується відома її властивість:

$$\int_{h_y^-}^{h_y^+} f(y)\delta(y-a)\,dy = f(a).$$

Значення базисної функції в точці $y = 0$ входить до коефіцієнтів редукованого рівняння, які є звичайними значеннями. Слід підкреслити, що тільки проекційний метод дає можливість редукувати рівняння математичної фізики з коефіцієнтами у вигляді узагальнених функцій типу дельта-функції, причому редуковані рівняння є рівняннями із звичайними коефіцієнтами.

$$\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \delta^{n\cdot}_{\cdot i} \tau^i_{xy}(x,z,t) + \delta^{1\cdot}_{\cdot i} \tau^i_{xy}(x,z,t) + b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha}(x,z,t) -$$

$$- \frac{\partial \tau_{xzi}}{\partial z} - X_i - \delta(z) k_x \delta^{p\cdot}_{\cdot j} u^j(x,0) + k_x u_0(x),$$

$$(\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x}=\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-\delta_{\cdot i}^{n\cdot}\tau_{xy}^{i}(x,z,t)+\delta_{\cdot i}^{1\cdot}\tau_{xy}^{i}(x,z,t)+b_{ji}g^{j\alpha}\tau_{xy\alpha}(x,z,t)-$$

$$-\frac{\partial \tau_{xzi}}{\partial z}-X_i-\delta(z)k_x\delta_{\cdot j}^{p\cdot}u^j(x,0)+k_xu_0(x)),\ \varphi_k(z));$$

$$\frac{d\sigma_{xik}}{dx}=\rho \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial t^2}-\delta_{\cdot i}^{n\cdot}\tau_{xy\cdot k}^{\ \ i\cdot}+\delta_{\cdot i}^{1\cdot}\tau_{xy\cdot k}^{\ \ i\cdot}-\delta_{k\cdot}^{\cdot m}\tau_{xz\,i\cdot}^{\ \ \cdot k}+\delta_{k\cdot}^{\cdot 1}\tau_{xz\,i\cdot}^{\ \ \cdot k}+b_{ji}g^{j\alpha}\tau_{xy\alpha k}+$$

$$+b_{lk}g^{l\varepsilon}\tau_{xzi\varepsilon}-X_{ik}-k_x\delta_{\cdot j}^{p\cdot}\,\delta_{\cdot l}^{s\cdot}\,u^{jl}+k_xu_0.$$

В рівнянні присутні індекси $p=\frac{(N_y-1)}{2}+1$, $s=\frac{(N_z-1)}{2}+1$, які визначають центральну пряму (пряму на якій знаходиться паля).

Аналогічно редукуються інші рівняння із (1)-(3), результати чого після відповідних операцій та алгебраїчних перетворень запишемо далі відповідно.

$$\frac{d\tau_{xyik}}{dx}=\rho \frac{\partial^2 v_{ik}}{\partial t^2}-\delta_{\cdot i}^{n\cdot}\sigma_{y\cdot k}^{\ i\cdot}+\delta_{\cdot i}^{1\cdot}\sigma_{y\cdot k}^{\ i\cdot}-\delta_{k\cdot}^{\cdot m}\tau_{xz\,i\cdot}^{\ \ \cdot k}+\delta_{k\cdot}^{\cdot 1}\tau_{xz\,i\cdot}^{\ \ \cdot k}+$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{ji}g^{j\alpha}\sigma_{x\alpha k}+\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}b_{ji}g^{j\alpha}b_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}v_{\gamma k}+\frac{2\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)}b_{ji}g^{j\alpha}b_{kl}g^{l\varepsilon}w_{\alpha\varepsilon}+$$

$$\mu b_{lk}g^{l\varepsilon}b_{ij}g^{j\alpha}w_{\alpha\varepsilon}+\mu b_{lk}g^{l\varepsilon}b_{\varepsilon\eta}g^{\eta\theta}v_{i\theta}-Y_{ik}-k_y\delta_{\cdot j}^{p\cdot}\,\delta_{\cdot l}^{s\cdot}\,v^{jl}+k_yv_0.$$

$$\frac{d\tau_{xzik}}{dx}=\rho \frac{\partial^2 w_{ik}}{\partial t^2}-\delta_{\cdot i}^{n\cdot}\tau_{yz\cdot k}^{\ \ i\cdot}+\delta_{\cdot i}^{1\cdot}\tau_{yz\cdot k}^{\ \ i\cdot}-\delta_{k\cdot}^{\cdot m}\sigma_{zi\cdot}^{\ \ \cdot k}+\delta_{k\cdot}^{\cdot 1}\sigma_{zi\cdot}^{\ \ \cdot k}+$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{lk}g^{k\varepsilon}\sigma_{xi\varepsilon}+\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}b_{lk}g^{k\varepsilon}b_{\varepsilon\eta}g^{\eta\theta}w_{i\theta}+\frac{2\lambda\mu}{(\lambda+2\mu)}b_{ij}g^{j\alpha}b_{lk}g^{k\varepsilon}v_{\alpha\varepsilon}+$$

$$+\mu b_{ji}g^{j\alpha}b_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}w_{\gamma k}+\mu b_{ji}g^{j\alpha}b_{kl}g^{l\varepsilon}v_{\alpha\varepsilon}-Z_{ik}-k_z\delta_{\cdot j}^{p\cdot}\,\delta_{\cdot l}^{s\cdot}\,w^{jl}+k_zw_0.$$

$$\frac{du_{ik}}{dx}=\frac{1}{\lambda+2\mu}\sigma_{xik}-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{ij}g^{j\alpha}v_{\alpha k}-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{kl}g^{l\varepsilon}w_{i\varepsilon}$$

$$\frac{dv_{ik}}{dx}=\frac{1}{\mu}\tau_{xyik}-b_{ij}g^{j\alpha}u_{\alpha k}$$

$$\frac{dw_{ik}}{dx}=\frac{1}{\mu}\tau_{xzik}-b_{kl}g^{l\varepsilon}u_{i\varepsilon}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}+k_1\delta_{\cdot j}^{p\cdot}\,\delta_{\cdot l}^{s\cdot}[u^{jl}(x)-u^c(x)]=\rho_cF_c\frac{\partial^2 u^c}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}+k_2\delta_{\cdot j}^{p\cdot}\,\delta_{\cdot l}^{s\cdot}[v^{jl}(x)-v^c(x)]=\rho_cF_c\frac{\partial^2 v^c}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}+k_3\delta_{\cdot j}^{p\cdot}\delta_{\cdot l}^{s\cdot}[w^{jl}(x)-w^c(x)]=\rho_c F_c\frac{\partial^2 w^c}{\partial t^2}.$$

Редуковані початкові умови отримують з вихідних початкових умов редукуванням, оскільки вони є простими алгебраїчними співвідношеннями по змінним y та z:

$$u_{ik}(x,0)=u_{0ik}(x),\quad \dot{u}_{ik}(x,0)=U_{0ik}(x),$$
$$v_{ik}(x,0)=v_{0ik}(x),\quad \dot{v}_{ik}(x,0)=V_{0ik}(x),$$
$$w_{ik}(x,0)=w_{0ik}(x),\quad \dot{w}_{ik}(x,0)=W_{0ik}(x);$$
$$u_{ik}^c(x,0)=u_0^c(x),\quad \dot{u}_{ik}^c(x,0)=U_0^c(x),$$
$$v_{ik}^c(x,0)=v_0^c(x),\quad \dot{v}_{ik}^c(x,0)=V_0^c(x),$$
$$w_{ik}^c(x,0)=w_0^c(x),\quad \dot{w}_{ik}^c(x,0)=W_0^c(x).$$

Оскільки вихідні граничні умови є також алгебраїчними співвідношеннями по змінним y та z, то вони редукуються дуже просто:

$$\sigma_{xik}^0-k_{xx}^0u_{ik}^0+q_{xxik}^0+k_{xx}^0u_{cepik}^0=0,$$
$$\tau_{xyik}^0-k_{xy}^0v_{ik}^0+q_{xyik}^0+k_{xy}^0v_{cepik}^0=0,$$
$$\tau_{xzik}^0-k_{xz}^0w_{ik}^0+q_{xzik}^0+k_{xz}^0w_{cepik}^0=0,$$
$$-\sigma_{xik}^L-k_{xx}^Lu_{ik}^L+q_{xxik}^L+k_{xx}^Lu_{cepik}^L=0,$$
$$-\tau_{xyik}^L-k_{xy}^Lv_{ik}^L+q_{xyik}^L+k_{xy}^Lv_{cepik}^L=0,$$
$$-\tau_{xzik}^L-k_{xz}^Lw_{ik}^L+q_{xzik}^L+k_{xz}^Lw_{cepik}^L=0.$$

Висновки. Підсумовуючи наведене, зазначимо, що запропонований варіант методу прямих дозволяє застосовувати його не тільки для статичних задач, але й для всіх динамічних задач, а розроблений вигляд редукованих рівнянь дозволяє застосовувати для розв`язання крайових та початково-крайових задач сучасні чиселні методи.

Summary

This paper proposes a new version of dimension reduction calculation equations of elasticity theory for the study of stress-strain states of massive structural elements under static and dynamic actions in the framework of the classical method of structural mechanics — the method of lines.

Література

1. Л. В Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1949.
2. Л. В. Канторович Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. Изв. АН СССР, VII серия, 1933.
3. Л. В. Канторович Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. ДАН СССР, 1934
4. М. Г. Слободянский Оценка погрешности искомой величины при решении линейных задач вариационным методом. ДАН СССР, т. 86, № 2, 1952.
5. М. Г. Слободянский Оценка погрешности приближенного решения в линейных задачах, сводящаяся к вариационным, и их применение к определению двусторонних приближений в статических задачах теории упругости. Прикл. матем. и мех., т. 16, вып. 4, 1952.
6. М. Г. Слободянский Оценка погрешности приближенных решений линейных задач. Прикл. матем. и мех., т. 17, вып. 2, 1953.
7. Л. П. Винокуров Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. Харьков. Изд-во Харьк. ун-та, 1956.
8. В. Г. Корбач Алгоритм численного решения многоточечных краевых задач механики деформированного твердого тела. Прочность конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. Тр. / Редкол.: Львов М.П. и др. – Харьков: Харьк. Авиац. ин-т, 1990. С. 88-95.
9. А. Я. Григоренко Анализ свободных колебаний прямоугольных пластин переменной толщины на основе численного и экспериментального исследований / А. Я. Григоренко, Т. В. Трегубенко // Приклад. механика. - 2000. - 36, № 2. - С. 131-134
10. В.К.Чибіряков, А.М. Станкевич, Д.В. Левківський, В.Ф. Мельничук Про підвищення точності узагальненого методу прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 556 – К.: КНУБА, 2015 – с.613-624.
11. С. М. Михлин Вариационные методы в математической физике// Гос-ное из-во технико-теоретической л-ры. – М., 1957 – 476 с.