

УДК 624.014.2

**АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ТОНКОСТЕННЫХ БАЛОК ОТКРЫТОГО СЕЧЕНИЯ**

Волкова В.Е., д.т.н., профессор,
Смолий И.С., аспирант,
Национальный горный университет, г. Днепропетровск
drvev@mail.ru

Аннотация. В настоящее время стремительно расширяется область применения тонкостенных балочных конструкций. С появлением сложных инженерных сооружений проявляется интерес к вопросам динамики балочных конструкций. Проведен анализ развития теории колебаний балочных конструкций, а также аналитических моделей собственных колебаний тонкостенных балок двутаврового сечения. Исследованы зависимости между геометрическими характеристиками балок открытого сечения и соответствующими им динамическими характеристиками – собственными частотами и формами колебаний. Рассмотрен вариант конструктивного решения двутавровой металлической балки с постоянным поперечным сечением по длине. Выполнено численное моделирование свободных колебаний методом конечных элементов для различных значений гибкости стенки балки. Для определения частот и форм собственных колебаний использовался блочный метод Ланцоша. Практическая сходимость результатов исследований обеспечивается совпадением полученных значений при изменении размеров конечных элементов. Сделан вывод о влиянии инерционных сил вращения на собственные частоты балки, а также о возможности применения различных теорий в отношении динамических расчетов. Проведено сопоставление результатов численного моделирования и аналитических данных.

Ключевые слова: металлические конструкции, балочные тонкостенные конструкции, динамические характеристики, геометрические характеристики, собственные частоты колебаний, собственные формы колебаний, метод конечных элементов.

**АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ
ТОНКОСТІННИХ БАЛОК ВІДКРИТОГО ПЕРЕРІЗУ**

Волкова В.Є., д.т.н., професор,
Смолій І.С., аспірант,
Національний гірничий університет, м. Дніпропетровськ
drvev@mail.ru

Анотація. В даний час стрімко розширюється сфера застосування тонкостінних балкових конструкцій. З появою складних інженерних споруд проявляється інтерес до питань динаміки балкових конструкцій. Проведено аналіз розвитку теорії коливань балочних конструкцій, а також аналітичних моделей власних коливань тонкостінних балок двотаврового перерізу. Досліджені залежності між геометричними характеристиками балок відкритого перерізу та відповідними їм динамічними характеристиками – власними частотами та формами коливань. Розглянуто варіант конструктивного рішення двотаврової металевої балки з постійним поперечним перерізом по довжині. Виконано чисельне моделювання вільних коливань методом кінцевих елементів для різних значень гнучкості стінки балки. Для визначення частот і форм власних коливань використовувався блоковий

метод Ланцоша. Практична збіжність результатів досліджень забезпечується збігом отриманих значень при зміні розмірів кінцевих елементів. Зроблені висновки про вплив інерційних сил обертання на власні частоти балки, а також про можливість використання різноманітних теорій по відношенню до динамічних розрахунків. Проведено зіставлення результатів чисельного моделювання і аналітичних даних.

Ключові слова: металеві конструкції, балочні тонкостінні конструкції, динамічні характеристики, геометричні характеристики, власні частоти коливань, власні форми коливань, метод скінченних елементів.

THE ANALYSIS OF THE MODELS OF THE OPEN SECTION THIN WALLED BEAMS

Volkova V.E., Doctor of Engineering, Professor
Smolii I.S., post-graduate student
National mining university, Dnipropetrovsk
drvev@mail.ru

Abstract. Presently an domain of application of the thin-walled beam structures broadens swiftly. With appearance of complex engineering's structures interest shows up to the problem of dynamics of beam structures. The analysis of development of vibrations of beam structures theories is carried out. The analytical model of natural oscillations of thin walled I-beams is provided. Dependencies between geometrical characteristics of open section beam structures and corresponded dynamical characteristics – natural frequencies and mode shapes are investigated. The construction of metallic I-beam with the constant cross section is investigated. The numeral modeling of free oscillations is implemented by the finite element method for the different values of slenderness of beam wall. The sectional method of Lanczos was utilized for determination of eigenfrequencies and mode shapes. Practical convergence of results of researches is provided by the coincidence of the received values at the varying of finite elements sizes. The conclusions are drawn about influence of inertial rotation force on natural frequencies of the beam and ability to use various theories for dynamical calculations. The results of analytical research and numerical modeling have been compared.

Keywords: metallic structures, thin walled beam structures, dynamical characteristics, geometrical characteristics, natural frequencies, natural shapes, finite element method.

Введение. В качестве несущих конструкций пролетных строений конвейерных галерей применяют составные и тонкостенные балки, фермы с параллельными поясами, прямоугольные и круглые цилиндрические оболочки, а также другие виды конструкций. Применение балок рационально с точки зрения экономических показателей – металлоемкости, для пролетных строений длиной до 30 м, для пролетов в диапазоне от 24 до 42 м рекомендованы решетчатые несущие конструкции, а именно фермы [1].

За рубежом тонкостенные балки широко применяются в конструкциях при динамических нагрузках, с целью снижения общей металлоемкости и, соответственно, затрат на изготовление и монтаж конструкций. Однако отечественными нормами разрешено использование тонкостенных балок исключительно при статическом нагружении. Использование тонкостенных балок открытого сечения в условиях динамического нагружения является актуальной научной проблемой [2].

Цели и задачи. Цель исследования состоит в построении зависимостей между геометрическими характеристиками балки двутаврового сечения и её динамическими характеристиками – собственными частотами и формами колебаний.

Объекты и методы исследования. Объектом исследования являются тонкостенные металлические сварные балки двутаврового сечения. Предмет исследования – динамические характеристики металлических балок открытого сечения.

Ранние исследования балочных моделей базировались на изгибной теории, к ним относятся такие исследователи как Эйлер, Бернулли, Навьер и другие. Общая теория изгибно-крутильных колебаний и динамической устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля была разработана В.З. Власовым в 1930-х гг.

Теория для закрытых профилей была разработана А.А. Уманским. В дальнейшем они получили развитие в работах П.А Лукаша, Н.А Кузьмина, И.Е. Милейковского, Г.Ю. Джанелидзе и многих других. В 2005-м году В.И. Сливкеру удалось объединить оба типа профиля в единой полусдвиговой теории [3]. Также существенное влияние оказал Э. Каррера в своей унифицированной формулировке теории тонкостенных стержней [4].

В процессе развития теории неоднократно предпринимались попытки учета сдвигов и влияния деформации сдвига на работу тонкостенного стержня, поскольку сдвиговые деформации оказывают существенное влияние на характеристики конструкции. Данным вопросом занимались Ададунова, Дженелидзе и Пановко, Гольденвейзер, Воробьев, Мещеряков [3]. Дальнейшее развитие теория Власова получила в работах Э. Каррера, В.И. Сливкера и др. Каррера, предлагает унифицированную формулировку балочной теории. Поверхности перемещения получены в унифицированной манере.

Классические формулы Тимошенко и Власова предполагают отдельное описание изгибных и крутильных форм колебания. Однако, формы колебаний реальных балок представляют собой объединение крутильной и изгибной составляющих, что необходимо учитывать в расчетах собственных частот и форм колебаний. При решении задач, связанных с динамическими нагрузками на стержень, используется принцип Даламбера, в уравнение равновесия элемента вводятся силы инерции. В дальнейшем, как правило, учитываются только силы инерции, соответствующие поперечным перемещениям элементов стержня.

Статическая задача о равновесии стержня в случае отсутствия внешних сдвигающих сил по продольным краям, приводится к дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} EF\zeta'' + \int_L p_z ds = 0; EJ_x \varepsilon^{IV} - \int_L \frac{\delta p_z}{\delta z} x ds - q_x = 0; \\ EJ_y \eta^{IV} - \int_L \frac{\delta p_z}{\delta z} y ds - q_y = 0; EJ_\omega \theta^{IV} - GL_d \theta'' - \int_L \frac{\delta p_z}{\delta z} \omega ds - m_A = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

где E – приведенный модуль упругости продольного растяжения, F – площадь поперечного сечения, ζ – продольные перемещения, ε – проекция на плоскость Oxz , η – проекция на плоскость Oyz , θ – угол закручивания, ω – секториальная координата, $p_z = p_z(z, s)$ – проекция интенсивности поверхностной нагрузки на направление образующей цилиндрической поверхности; s – круговая координата, $q_x(z)$ и $q_y(z)$ – проекции интенсивности погонной поперечной нагрузки; $m_A(z)$ – интенсивность внешнего крутящего момента от поперечных нагрузок q_x и q_y относительно центра изгиба [5].

Метод конечных элементов (МКЭ) ориентирован на применение исключительно компьютерных технологий. Он объединяет в себе особенности метода сосредоточенных масс и метода обобщенных координат. МКЭ позволяет построить удобную и обоснованную модель системы. При моделировании конструкция рассматривается как некоторая совокупность конструктивных элементов, соединенных между собой в узловых точках. При заданных соотношениях между силами и перемещениями для каждого отдельного элемента, можно исследовать поведение конструкции в целом.

Результаты исследования. В работе рассмотрен вариант конструктивного решения двутавровой металлической балки – с постоянным поперечным сечением по длине балки (рис. 1). Размеры поперечного сечения балок приняты в соответствии с рекомендациями [6]. Данные были получены для сварной балки двутаврового сечения пролетом 12 м.

Рассмотрим свободные колебания балки двутаврового сечения длиной 12 м. Высота сечения балки составляла 2,1 м, а толщины полок $t_f = 64$ мм. В работе анализировалось

влияние приведенной гибкости стенки на значения собственных частот. Рассмотрены варианты балок с приведенной гибкостью $\bar{\lambda}_w = 2,5; 3,2$ и $5,5$; толщина стенок 27; 21 и 12,5 мм соответственно.

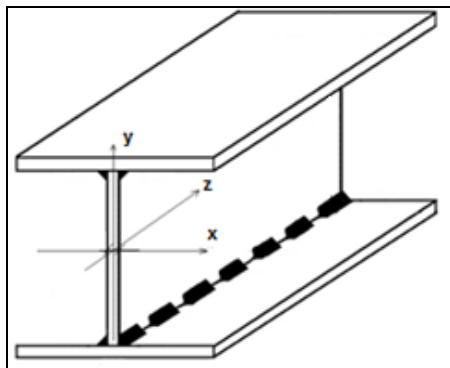


Рис. 1. Сварная металлическая двутавровая балка

Материалом балки является низкоуглеродистая сталь со следующими механическими характеристиками: $E = 2,0601 \cdot 10^{11}$ Па, $\gamma = 7701$ кг/м³. Геометрические характеристики сечения балок для рассматриваемых вариантов: моменты инерции относительно центральных осей $I_{x1} = 0,10217816064$ м⁴, $I_{x2} = 0,098343821312$ м⁴, $I_{x3} = 0,092911837184$ м⁴, $I_{y1} = 0,002799437312$ м⁴, $I_{y2} = 0,002797724672$ м⁴, $I_{y3} = 0,00279652352$ м⁴, площадь поперечного сечения $F_1 = 0,135164$ м², $F_2 = 0,123332$ м², $F_3 = 0,10657$ м²

На основе теории С.П. Тимошенко [7], собственные частоты изгибных колебаний балок могут быть определены по формулам:

$$k_{nx}^2 = \frac{EI_x \lambda_n^4}{F} \frac{g}{y}; k_{ny}^2 = \frac{EI_y \lambda_n^4}{F} \frac{g}{y}. \quad (2)$$

В работе [5] Власов В.З. предлагает учитывать составляющие инерционных сил вращения элемента балки $I_x \lambda_n^2$ и $I_y \lambda_n^2$:

$$k_{nx}^2 = \frac{EI_x \lambda_n^4}{I_x \lambda_n^2 + F} \frac{g}{y}; k_{ny}^2 = \frac{EI_y \lambda_n^4}{I_y \lambda_n^2 + F} \frac{g}{y}. \quad (3)$$

Анализируя приведенные формулы можно сделать вывод о том, что влияние инерционных сил вращения балки приводит к снижению частот собственных колебаний.

Результаты получены на основе метода конечных элементов в среде ПК SCAD. Для определения частот и форм собственных колебаний использовался блочный метод Ланцоша. Как показано в [8], применение метода Ланцоша в анализе динамических систем имеет ряд преимуществ, особенно для систем с густым спектром низших частот.

Результаты получены на основе использования программного комплекса SCAD, реализующего для динамического анализа метод Ланцоша. В исследовании применялась прямоугольная сетка конечных элементов. Использовались конечные элементы – пластины размером 100×100 мм с толщинами 12,5...40 мм в стенке и 160×100 при толщине 64 мм в полке [8]. Нормами рекомендуется анализировать 3...5 низших форм колебаний. Во избежание накопления ошибок интегрирования, в моделировании задавалось 10 форм колебаний. Практическая сходимость результатов исследований обеспечивается совпадением полученных значений при изменении размеров конечных элементов [9].

Выводы. В результате исследования были получены значения частот собственных колебаний двутавровой сварной балки приведенные в табл. 1. Отклонения результатов для балок с приведенной гибкостью $\bar{\lambda}_w = 2,5$ составили ~ 1,8%. Для балок с $\bar{\lambda}_w = 3,2$ отклонение составило ~ 2,5%, $\bar{\lambda}_w = 5,5$ ~ 4,1%.

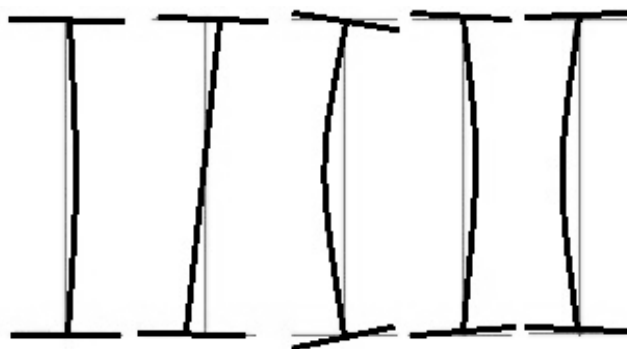


Рис. 2 Формы колебаний балок

Таблица 1 – Сравнение полученных результатов

$\bar{\lambda}_w$	SCAD		Тимошенко (2)		Власов (3)	
2,5	7,891 Гц	0%	8,042 Гц	1,91%	8,036 Гц	1,84%
3,2	8,203 Гц	0%	8,416 Гц	2,6%	8,41 Гц	2,52%
5,5	8,69 Гц	0%	9,052 Гц	4,17%	9,044 Гц	4,07%

Исходя из результатов исследования, можно сделать вывод о достоверности применения расчетного комплекса SCAD для расчета динамических характеристик тонкостенных металлических сварных двутавровых балок открытого сечения, т.к. предельные отклонения от расчета, проведенного по классической теории Власова не превышают 4,1%.

При увеличении приведенной гибкости сечения балки, расхождение в результатах расчета между классическими теориями и расчетным комплексом также увеличивается.

Литература

1. Горев В.В. Металлические конструкции. Специальные конструкции и сооружения. Том 3 / В.В. Горев. – М.: Высшая школа, 2002. – 543 с.
2. Volkova V. Natural Oscillations of Welded Steel Beams in the Span Structures of Conveyor Galleries / Viktorija Volkova, Iliia Smolii. – IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 96 (1), 012071. 2015. – С.1-7.
3. Рыбаков В.А. Напряженно-деформированное состояние элементов каркасных сооружений из тонкостенных стержней / В.А. Рыбаков, О.С. Гамаюнова. – Строительство уникальных зданий и сооружений. – Санкт-Петербург, 2013. – №7 (12). – С. 79-123.
4. Carrera E. Beam structures: classical and advanced theories – 1st ed. / E. Carrera, G. Giunta, M. Petrol. – New Delhi, India: John Wiley & Sons, Ltd, 2011. – 195 p.
5. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни / В.З. Власов. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 568 с.
6. Пособия по проектированию конвейерных галерей (к СНиП 2.09.03-85). – М.: Стройиздат, ГПИ Ленпроектстальконструкция, 1989. – 111 с.
7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М: «Машиностроение», 1985. – 472 с.
8. Фиалко С. Реализация в программном комплексе SCAD блочного метода Ланцоша со сдвигами применительно к сейсмическому анализу сооружений / С. Фиалко. – CADmaster, 2007. – №5. – С. 102-105.
9. Карпиловский В.С. Structure CAD для пользователя / В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов. – Киев, 2003. – 328 с.