УДК 624.012.45.001

АЛГОРИТМ І ПРОГРАМНИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ВІЛЬНИХ ТА ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ КІНЦЕВИМ ЧИСЛОМ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ

Шкурупій О.А., к.т.н., професор,
Пащенко А.М., к.т.н., доцент,
Лазарєв Д.М., к.т.н., доцент,
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка
shbm@ukr.net

Анотація. В статті наведено алгоритм розрахунку вільних коливань динамічних систем із кінцевим числом ступенів вільності методом інерційних сил в сукупності з методами ітерацій та вичерпування. Використання методу ітерацій в сукупності з методом вичерпування дає можливість на кожній ітерації одночасно визначати частоту та відповідну їй форму коливань. Такий підхід дає можливість суттєво спростити розрахунки спектру частот та відповідних їм головних форм вільних коливань. При розрахунку вимушених коливань обчислюються значення сил інерції в точках прикладання мас, їх переміщення та коефіцієнти динамічності по зусиллям і переміщенням. На основі даних методів розроблений алгоритм та програмний комплекс «Dinamo» для ПЕОМ в OS Windows.

Ключові слова: динамічна система, ступінь вільності динамічної системи, вільні та вимушені коливання, частота, головна форма коливань, сила інерції, коефіцієнт динамічності, ітерація.

АЛГОРИТМ И ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РАСЧЕТА СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Шкурупий А.А., к.т.н., профессор,
Пащенко А.Н., к.т.н., доцент,
Лазарев Д.Н., к.т.н., доцент
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка
shbm@ukr.net

Аннотация. В статье приведен алгоритм расчета свободных колебаний динамических систем с конечным числом степеней свободы методом инерционных сил в совокупности с методами итераций и исчерпания. Использование метода итераций в совокупности с методом исчерпания дает возможность на каждой итерации одновременно определять частоту и соответствующую ей форму колебаний. Такой подход позволяет существенно упростить расчеты спектра частот и соответствующих им главных форм свободных колебаний. При расчете вынужденных колебаний определяются значения сил инерции в точках приложения масс, их перемещения и коэффициенты динамичности по усилиям и перемещениям. На основе данных методов разработан алгоритм и программный комплекс «Dinamo» для ПЭВМ в OS Windows.

Ключевые слова: динамическая система, степень свободы динамической системы, свободные и вынужденные колебания, частота, главная форма колебаний, сила инерции, коэффициент динамичности, итерация.

ALGORITHM AND SOFTWARE PACKAGE FOR CALCULATION OF FREE AND FORCED OSCILLATIONS OF DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS WITH FINITELY NUMBER OF FREEDOM DEGREES

Shkurupiy O.A., Ph.D., Professor,
Pashchenko A.M., Ph.D., Associate Professor,
Lazariev D.M., Ph.D., Associate Professor,
Poltava National Technical after Yuri Kondratyuk University
shbm@ukr.net

Abstract. The algorithm for the calculation of free oscillations of dynamical systems with a finite number of degrees of freedom is presented in the article. It uses a combination of two methods such as a method of iterations and scooping method. This makes it possible to detect simultaneously each iteration frequency and the corresponding mode shapes. This approach can greatly simplify calculations of the frequency spectrum and the corresponding major forms of free oscillations. In the process of calculating the forced oscillations the forces of inertia in the points of mass, their displacement and dynamic coefficients for the efforts and displacements are determined. On the basis of these methods, an algorithm and software package «Dinamo» to the PC in OS Windows was developed. This computer program is implemented in a modern compiler. It contains several utilities routines. They are combined and presented as "Dynamo" software. The program has been tested and successfully implemented in the educational process. Block diagram of the calculation algorithm of free and forced oscillations of dynamic system with a finite number of the freedom degrees of the “DINAMO” program is shown in Fig. 2. Dialog windows are shown in Fig. 3, 4 and 5.

Keywords: dynamic system, the degree of freedom of the dynamical system, free and forced oscillations, the frequency, the main form of oscillations, the force of inertia, dynamic coefficient, iteration.

Вступ. Існують різні методи визначення частот і головних форм коливань динамічної системи з *n* ступенями вільності, завдяки великому об’єму обчислень, пов’язаних з розгортанням вікового рівняння в поліном, визначенням його коренів і розв’язанням *n* раз системи (1). Визначення спектра частот і відповідних їм головних форм коливань – одна з актуальних задач.

Цілі та завдання. Метою роботи є розроблення алгоритму та програмного комплексу для ПЕОМ в OS Windows, котрий дасть можливість студентам та інженерам автоматизувати розрахунки вільних (методами ітерацій та вичерпування) та вимушених коливань дискретних динамічних систем із кінцевим числом ступенів вільності.

Об’єкти і методи дослідження. Об’єктом дослідження є дискретні динамічні системи із кінцевим числом ступенів вільності. Методи дослідження: інерційних сил, ітерацій та вичерпування.

Результати досліджень. Розв’язання задачі обчислення спектру частот і визначення відповідній частоті головної форми коливань динамічної системи, породило зусиллями багатьох математиків значну кількість методів (Крилова, Лавер’є, Данилевського, Якобі (ітерації) [1 - 5] та ін.). Дану задачу пропонується вирішувати методами ітерацій та вичерпування [6], що дає можливість за один ітераційний цикл визначити ***i***-ту частоту та відповідну їй форму коливань.

Для визначення частот вільних коливань динамічної системи використовують розрахунки на основі пружної роботи їх елементів, які мають форми методу сил, методу переміщень та методу скінченних елементів.

Вільні коливання системи з ***n*** ступенями вільності розглядаємо з застосуванням методу інерційних сил (рис. 1).

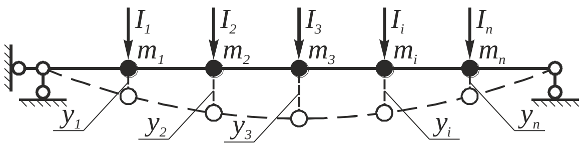

Рис. 1. Динамічна системи з кінцевим числом ступенів вільності

Вільні коливання системи з кінцевим числом ступенів вільності описуються системою ***n*** лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами (1):

$$\begin{cases} y_1(t) = \underbrace{-m_1\frac{d^2y_1(t)}{dt^2}}_{I_1}\delta_{11} \underbrace{-m_2\frac{d^2y_2(t)}{dt^2}}_{I_2}\delta_{12} - \ldots \underbrace{-m_n\frac{d^2y_n(t)}{dt^2}}_{I_n}\delta_{1n} \\ y_2(t) = -m_1 y_1(t)\delta_{11} - m_2 y_2(t)\delta_{22} - \ldots - m_n y_n(t)\delta_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(t) = I_1\delta_{n1} + I_2\delta_{n2} + \ldots + I_n\delta_{nn} \end{cases}. \quad (1)$$

За умови, що маси системи здійснюють гармонійні коливання з частотою ω та різними амплітудами:

$$\begin{cases} y_1(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_0),\, y_2(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi_0),\ldots, y_n(t) = A_n\sin(\omega t + \varphi_0); \\ y_1(t) = -A_1\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0),\, y_2(t) = -A_2\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0),\ldots, y_n(t) = -A_n\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0). \end{cases} \quad (2)$$

Після підстановки (2) в (1) і скорочення всіх членів рівнянь на $sin(\omega t + \varphi_0)$ та приведення подібних членів, одержимо:

$$\begin{cases} (m_1\omega^2\delta_{11} - 1)A_1 + m_2\omega^2\delta_{12}A_2 + \ldots + m_n\omega^2\delta_{1n}A_n = 0 \\ m_1\omega^2\delta_{21}A_1 + (m_2\omega^2\delta_{22} - 1)A_2 + \ldots + m_n\omega^2\delta_{2n}A_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1\omega^2\delta_{n1}A_1 + m_n\omega^2\delta_{n2}A_2 + \ldots + (m_n\omega^2\delta_{nn} - 1)A_n = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

де ω_i – i-та кругова частота вільних коливань; A_{ni} – амплітуда коливань n- ної маси з i - тою частотою.

Існують різні методи визначення частот і головних форм коливань динамічної системи з n ступенями вільності, завдяки великому об’єму обчислень, пов’язаних з розгортанням вікового рівняння системи (3) в поліном, визначенням його коренів і n раз її розв’язанням. Застосуємо методи інерції і вичерпування для розв’язання цієї задачі. Для цього, діленням на ω_i^2 і введенням позначення $\lambda_i = 1/\omega_i^2$ приведемо систему (3) до вигляду:

$$\begin{cases} (m_1\omega_i^2\delta_{11} - 1)A_{1i} + m_2\omega_i^2\delta_{12}A_{2i} + \ldots + m_n\omega_i^2\delta_{1n}A_{ni} = 0 \\ m_1\omega_i^2\delta_{21}A_{1i} + (m_2\omega_i^2\delta_{22} - 1)A_{2i} + \ldots + m_n\omega_i^2\delta_{2n}A_{ni} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1\omega_i^2\delta_{n1}A_{1i} + m_n\omega_i^2\delta_{n2}A_{2i} + \ldots + (m_n\omega_i^2\delta_{nn} - 1)A_{ni} = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

У матричній формі система однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь (4) має вигляд:

$$(B_1 - \lambda_i E)\bar{v}_i = 0, \quad (5)$$

де $B_1 = \delta \cdot M$; $\delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nn} \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & m_n \end{pmatrix}$, m_1, m_2, ..., m_n – точкові маси системи; E – одинична матриця; δ – матриця податливості; δ_{ik} – статичне переміщення i- тої маси від k - тої одиничної сили ($i, к = 1, 2, 3,\ldots,n$); λ_i – i- те власне число ($i = 1, 2, 3,\ldots,n$), ω_i – i-та частота; $\bar{v}_i$ – i- тий власний вектор матриці B_1, – i- та форма коливань,

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \ldots \\ A_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{1i} \\ \rho_{2i} \\ \ldots \\ \rho_{ni} \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб система (4) мала розв'язок (проблема власних значень), який відрізняється від нульового ($A_{1i} \neq 0, A_{2i} \neq 0, \ldots, A_{ni} \neq 0$), необхідно, щоб головний визначник системи (3), (4) чи (5) дорівнював нулю, тобто:

$$det(B_1 - \lambda_i E) = 0\,. \qquad (6)$$

Рівняння (6) називають характеристичним (віковим), частотним або рівнянням частот вільних коливань. Для пружної системи, стійкої в стані спокою, рівняння (6) має в загальному випадку n дійсних коренів λ_i (i = $1, 2, 3, \ldots, n$). Ряд чисел λ_i і частот ω_i, розташованих в порядку зростання частот (зменшення λ_i), називається спектром власних чисел λ_i і власних частот ω_i, а їм відповідає спектр форм власних коливань системи з n ступенями вільності.

Так як система (5) однорідна, то із неї може бути визначено лише співвідношення між компонентами A_{ik}. Визначник системи (5) дорівнює нулю, а це означає, що залежність між рівняннями системи (5) – лінійна. Один із компонентів приймаємо за одиницю, після чого відповідний стовпець в системі (5) перетворюється в стовпець вільних членів. Із n рядків системи (5) вибирають будь які (n-1), що дають систему неоднорідних рівнянь відносно інших (n-1) компонентів вектора.

Таким чином, розв'язавши систему (n-1) рівнянь n разів (попередньо обчисливши визначник (6), тобто визначивши спектр частот вільних коливань), обчислюють відповідні головні форми коливань. Але це досить трудомісткий і роздільний процес. Застосування методів ітерацій та вичерпування дає можливість суттєво скоротити розрахунки.

Для визначення власних чисел λ_i і відповідних їм власних векторів $\bar{v}_i$ досить зручним є метод ітерацій в сполученні з методом вичерпування. Розглянемо їх алгоритми.

$$B_1\,\bar{v}_i = \lambda_i\,\bar{v}_i\,. \qquad (7)$$

Задаючись довільним вектором $\bar{v}_1^{(0)}$ на нульовій ітерації, наприклад:

$$\bar{v}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix},$$

підставляємо його в ліву частину (7) і одержуємо:

$$B_1\bar{v}_1^{(1)} = \lambda_1^{(0)}\bar{v}_1^{(0)},$$

де $\lambda_1^{(1)}$ – перше наближення старшого власного числа λ_1; $\bar{v}_1^{(1)}$ – перше наближення вектора (перша форма коливань), координата A_{11} якого дорівнює 1.

Підставляючи в ліву частину (7) $\bar{v}_1^{(1)}$, одержимо $\lambda_1^{(2)}$, $\bar{v}_1^{(2)}$ і т.д. Процес ітерацій закінчується, коли $\left|\bar{v}_1^{(j-1)} - \bar{v}_1^{(j)}\right| \leq \varepsilon$, де ε – задана точність. Методом ітерацій можна визначити лише перше (старше) власне число λ_1 (першу частоту – частоту основного тону коливань ω_1) і відповідний власний вектор $\bar{v}_1$ (першу форму коливань з частотою ω_1). Для одержання λ_2 і $\bar{v}_2$ необхідно створити матрицю B_2, що буде мати такі ж власні числа й вектори як і матриця B_1, за винятком λ_1 і $\bar{v}_1$, котрі будуть дорівнювати нулю.

Матриця B_2 створюється згідно формули (8) за допомогою методу вичерпування:

$$B_2 = B_1 - \lambda_1\bar{v}_1\bar{u}_1'\,. \qquad (8)$$

де $\bar{u}_1'$ – транспонований в матрицю рядок власний вектор матриці B_1' (транспонована матриця B_1), котрий визначають методом ітерацій. При цьому вектори $\bar{v}_1$ і $\bar{u}_1'$ повинні бути нормовані так, щоб $\sum_{k=1}^{n} v_{k,1}u_{k,1} = 1$, тобто:

$$\alpha = 1 \cdot u_{11} + v_{21}u_{21} + \ldots + v_{n1}u_{n1}\,,\; \bar{u}_{ki}' = \frac{u_{ki}}{\alpha}\,.$$

Застосовуючи до матриці B_2 метод ітерацій визначаємо λ_2 і $\bar{v}_2$, і т.д. Послідовне застосування методу ітерацій та вичерпування з використанням (7) і (8) дає можливість обчислити всі власні числа і відповідні їм власні вектори матриці B_1, тобто спектр частот і відповідні їм форми вільних коливань. При цьому необхідно відмітити, що яке б власне число λ_i ми не приймали за початкове із власного вектора матриці B_1, то в кінцевому результанті спектр частот залишається однаковим, а форми коливань взаємно ортогональними. Розрахунок динамічної системи зі скінченим числом ступенів вільності на вільні та вимушені коливання зводиться до розв'язування складно описаного нелінійного трансцендентного рівняння, яким є рівняння частот вільних коливань. Розв'язок цього рівняння є складним, особливо за умов високих порядків визначника.

За наведеною вище методикою був розроблений алгоритм та програмний комплекс для ПЕОМ «Dinamo» для розрахунку динамічних стержневих систем зі скінченим числом ступенів вільності на вільні та вимушені коливання. При розрахунку вимушених коливань обчислюються значення сил інерції в точках прикладання мас, їх переміщення та коефіцієнти динамічності по зусиллям і переміщенням. Ця комп'ютерна програма реалізована у сучасному компіляторі, містить декілька підпрограм-утиліт, які поєднані та представлені у вигляді однойменного програмного комплексу. Програма пройшла апробацію та успішно впроваджена в навчальний процес. Структурна схема алгоритму розрахунку вільних і вимушених коливань динамічної системи з кінцевим числом ступенів вільності програми «Dinamo» наведена на рис. 2. Діалогові вікна на рис. 3, 4 і 5.

Рис. 2. Структурна схема алгоритму розрахунку вільних і вимушених коливань динамічної системи за програмою «Dinamo»

Склад програмного пакета «Dinamo»:

- Dinamo.exe (обов’язковий) – основний програмний файл.
- Dinamo.ini (необов’язковий) – ініціалізація значень критерію пошуку кореня рівняння стійкості, може створюватися автоматично.
- Dinamo.txt (необов’язковий) – файл з коротким описом програми.
- Demo*.dtm (необов’язковий) – демо файли описаних вікових рівнянь, котрі можна завантажити для набуття навичок роботи з програмою.

Детальніше інформація наведена в роботі [7] (додаток В).

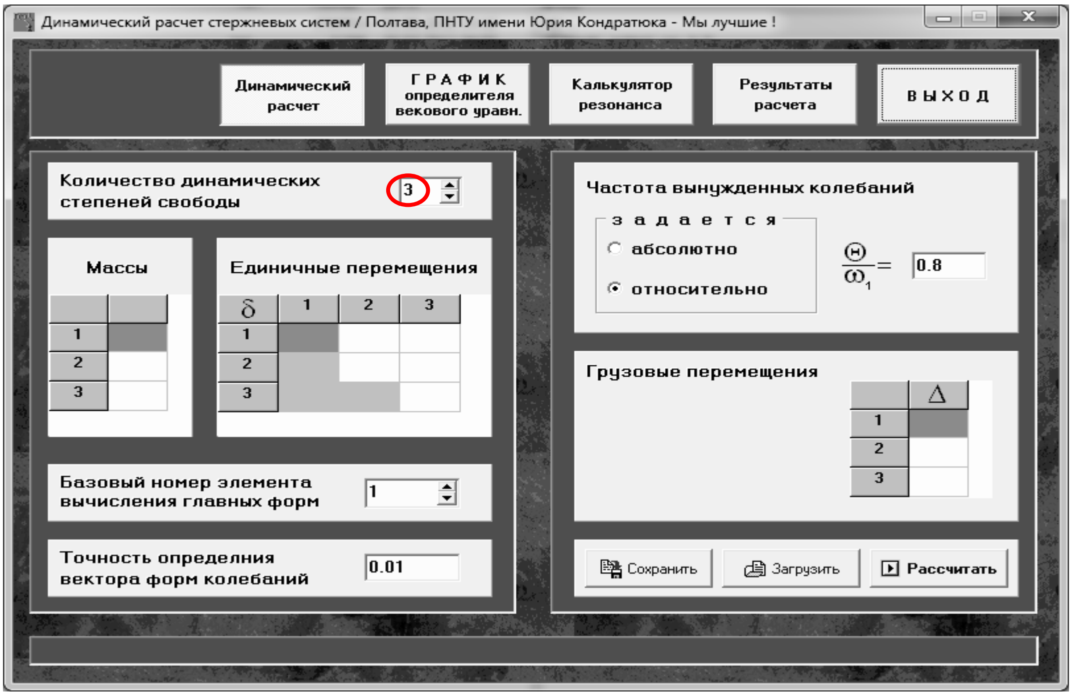

Рис. 3. Вікно задавання вихідних даних

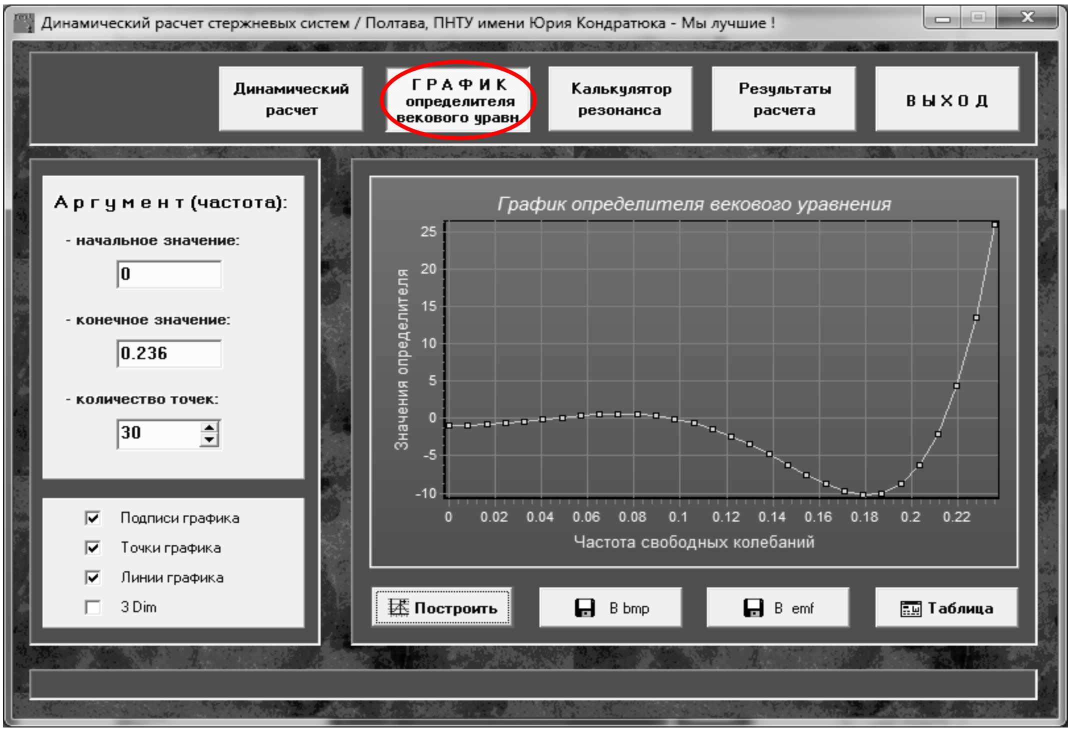

Рис. 4. Побудова графіка значень спектру частот вільних коливань динамічної системи з кінцевим числом ступенів вільності

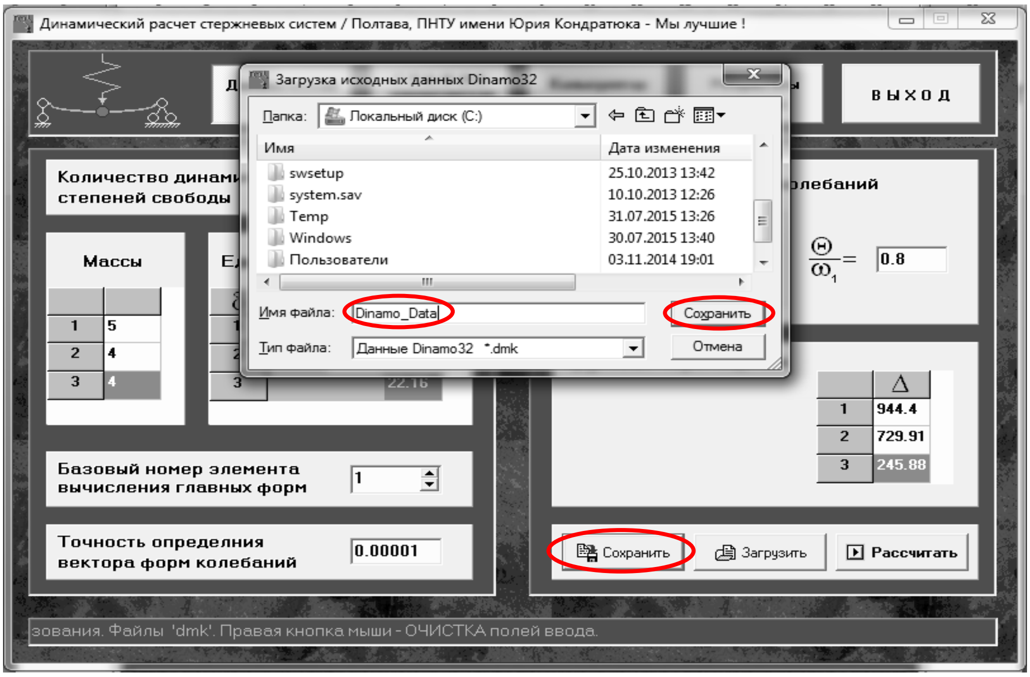

Рис. 5. Збереження описаних даних динамічного розрахунку

Висновки. Розроблено алгоритм і програмний комплекс «Dinamo» для ПЕОМ в OS Windows. Дана комп'ютерна програма реалізована в сучасному компіляторі, містить декілька підпрограм-утиліт, які поєднані та представлені у вигляді однойменного програмного комплексу. Вона дасть можливість студентам й інженерам автоматизувати розрахунки вільних та вимушених коливань дискретних динамічних систем із кінцевим числом ступенів вільності, обчислити спектри частот та відповідні їм головні форми коливань, а також визначити значення сил інерції в точках прикладання точкових мас, їх переміщення та коефіцієнти динамічності по зусиллям і переміщенням. Програма пройшла апробацію та впроваджена в навчальний процес.

Література

1. Смирнов А.Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.

2. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс. – 3-е изд., исправ. и доп. / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.

3. Баженов В.А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології: підручник / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов. – К.: Каравела, 2009. – 696 с.

4. Баженов В.А. Будівельна механіка. Динаміка споруд: навч. посібник / В.А. Баженов, Є.С. Дехтярюк. – К.: ІЗМН, 1998. – 208 с.

5. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти томах / Ред.совет: В.Н. Челомей (предс.). – Том 1. Колебания линейных систем. – Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

6. Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева // М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 656 с.

7. Шкурупій О.А. Стійкість форми рівноваги та динаміка дискретних систем: навчальний посібник / О.А. Шкурупій. – Полтава: ПолтНТУ, 2015. – 228 с.

Стаття надійшла 22.07.2016