

ЗМІШАНИЙ ВАРІАЦІЙНИЙ ФУНКЦІОНАЛ В ЗАДАЧАХ ПОВЗУЧОСТІ ТА ПОШКОДЖУВАНОСТІ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Савін О.Б., к.т.н., доцент,

Соболь В.М., к.т.н.,

Харківський національний університет будівництва та архітектури
sobol_vn@ukr.net

Анотація. У роботі сформульована математична постановка задач повзучості та пошкоджуваності осесиметричних тіл. Запропоновано розрахунковий метод оцінки конструкційної міцності та довговічності з урахуванням повзучості та пошкоджуваності осесиметричних тіл, який засновано на сполученні чисельного методу продовження рішення за часом і аналітичним рішенням варіаційної рівності для змішаного функціонала на кроці часу варіаційно-структурним методом теорії R-функцій. Виконано дослідження з точності розв'язків, одержуваних на основі запропонованого методу розрахунку. Встановлено закономірності впливу процесів повзучості та пошкоджуваності на час до руйнування труб тиску, зміну контактного тиску в ущільнювальних кільцях.

Ключові слова: повзучість, пошкоджуваність, змішаний функціонал, труби тиску, ущільнювальні кільця.

СМЕШАННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ФУНКЦИОНАЛ В ЗАДАЧАХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Савин А.Б., к.т.н., доцент,

Соболь В.Н., к.т.н.,

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры
sobol_vn@ukr.net

Аннотация. В работе сформулирована математическая постановка задач ползучести и повреждаемости осесимметричных тел. Предложен расчетный метод оценки конструкционной прочности и долговечности с учетом ползучести и повреждаемости осесимметричных тел, который основан на сочетании численного метода продолжения решений во времени и аналитического решения вариационного равенства для смешанного функционала на шаге времени вариационно-структурным методом теории R-функций. Выполнены исследования точности решений, полученные на основе предложенного метода расчета. Установлены закономерности влияния процессов ползучести и повреждаемости на время до разрушения труб давления, изменение контактного давления в уплотнительных кольцах.

Ключевые слова: ползучесть, повреждаемость, смешанный функционал, трубы давления, уплотнительные кольца.

A MIXED VARIATIONAL FUNCTIONAL IN CREEP-DAMAGE PROBLEMS OF AXISYMMETRIC BODIES

Savin A.B., PhD, Assistant Professor,

Sobol V.N., PhD,

Kharkiv National University of Civil Engineering and Architecture
sobol_vn@ukr.net

Abstract. The mathematical statement of creep-damage problems for axisymmetric bodies is presented. The mathematical statement includes the variation principle for the mixed functional, which is formulated on independently varied functions of displacements and stresses for known creep strains at arbitrary moment of time, and the numerical method, based on methods of Runge–Kutta–Merson and RFM (Rvachov’s Functions Method), for solution of the initial-boundary creep problem. The integral estimations on the basis of Lagrange, Reissner and Castilliano functionals are used for the investigations of convergence and reliability of the obtained test results. On a new theoretical basis the program complex, which realizes the solution method of creep-damage problems for the axisymmetric bodies, has been done. The test examples are presented. Numerical data demonstrate the convergence of approximate solutions. Practically important numerical estimations of strength and durability of constructive machine elements, such as tubes and sealing rings, are given.

Keywords: creep, damage, mixed functional, tubes, sealing rings.

Вступ (постановка проблеми). Проблеми оцінювання довготривалої міцності сучасної техніки займають важливе місце при проектуванні, створенні, доведенні і експлуатації машин, приладів та апаратури. Для багатьох відповідальних елементів конструкцій техніки використовують розрахункові схеми у вигляді осесиметричних тіл. Традиційно, у розрахунках на повзучість конструктивних елементів машин визначають сталі поля напружено-деформованого стану і за критеріями еквівалентних напружень виконують оцінку конструкційної міцності і довговічності. Але для більш достовірної оцінки довговічності конструктивних елементів машин, які експлуатуються в умовах повзучості, необхідно враховувати розподіли за часом полів напружень і незворотних деформацій повзучості, які супроводжуються накопиченням пошкоджуваності матеріалу і завершуються прихованим руйнуванням. Існуючі розробки за темою роботи переважно присвячені числовим розв’язкам задач термоповзучості на основі методу скінчених елементів з використанням класичних теорій повзучості і критеріїв тривалої міцності, що не враховують пошкоджуваність матеріалів внаслідок повзучості. Тому створення ефективних методів розв’язку задач повзучості і пошкоджуваності осесиметричних тіл є практично важливим для сучасного машинобудування.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У науковій літературі міститься значна кількість публікацій, де запропоновані різні підходи та моделі процесів повзучості й пошкоджуваності матеріалів, здатні з різним ступенем адекватності оцінювати довготривалу міцність конструктивних елементів машин на етапі їх проектування. Традиційно, у розрахунках на повзучість конструктивних елементів машин визначають сталі поля напружено-деформованого стану і за критеріями еквівалентних напружень виконують оцінку конструкційної міцності та довговічності. Але для більш достовірної оцінки довговічності конструктивних елементів машин, які експлуатуються в умовах повзучості, необхідно враховувати розподілення у часі полів напружень та незворотних деформацій, що супроводжуються накопиченням пошкоджуваності матеріалу та завершуються прихованим руйнуванням. Більшість з існуючих публікацій вітчизняних й закордонних авторів присвячено дослідженню нелінійних процесів повзучості та розв’язку таких задач на базі методу скінчених елементів [1, 2]. Практично відсутні розробки на базі чисельно-аналітичних методів. Про актуальність теми роботи свідчить зацікавленість багатьох вітчизняних та закордонних наукових шкіл у розробці розрахункових методів оцінки міцності та довговічності конструкцій, які деформуються в умовах повзучості із пошкоджуваністю [1-5].

Мета та завдання. Метою роботи є розробка розрахункового методу та програмного забезпечення щодо оцінювання довготривалої міцності осесиметричних тіл, які експлуатуються при високій температурі й повзучості. Основні завдання роботи наступні: сформулювати математичну постановку задач повзучості осесиметричних тіл; створити чисельно-аналітичний метод і програмне забезпечення для розрахунків на довготривалу

міцність з урахуванням повзучості та пошкоджуваності труб тиску та ущільнювальних кілець; визначити оцінки довготривалої міцності даних елементів конструкцій, які експлуатуються при дії зовнішніх тисків, високій температурі й повзучості.

Об'єкти та методи дослідження. Об'єктами дослідження в даній роботі є осесиметричні конструктивні елементи машин, такі як циліндричні труби тиску, ущільнювальні кільця [6]. Методи дослідження містять теоретичні методи континуальної механіки і теорії повзучості, а також чисельні методи для розв'язання початково-крайової задачі повзучості на ЕОМ: варіаційно-структурний метод теорії R-функцій (RFM) для знаходження точок стаціонарності змішаного варіаційного функціоналу, метод Рунге-Куты-Мерсона для чисельного інтегрування рівнянь стану повзучості, метод Гауса для розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, метод Гауса для чисельного інтегрування коефіцієнтів систем Рітца.

Розглянемо повзучість й пошкоджуваність просторових тіл, закріплених на частині поверхні – S_u і навантажених об'ємними та на частині поверхні – S_p поверхневими силами. У загальноприйнятих позначеннях [1-5] повна система рівнянь початково-крайової задачі повзучості тіл щодо невідомих компонентів тензорів напружень, деформацій і переміщень представлена у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0, \quad \varepsilon_{ij} = 1/2(u_{j,i} + u_{i,j}), \quad \varepsilon_{ij} = d_{ijkl}\sigma_{kl} + c_{ij}, \quad x_i \in V, \\ \sigma_{ij}n_j = p_i - x_i \in S_p, \quad u_i - u_i^* = 0 - x_i \in S_u. \end{aligned} \quad (1)$$

Для такого випадку змішаний варіаційний функціонал і його варіація відносно невідомих компонентів тензорів переміщень, напружень і деформацій повзучості при заданих об'ємних, поверхневих силах має вигляд [3, 4]:

$$\begin{aligned} R_{u\sigma} = \iiint_V \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij}(u_{j,i} + u_{i,j}) - \sigma_{ij}C_{ij} - \Lambda(\sigma_{ij}) - \rho f_i u_i \right] dV - \\ - \iint_{S_p} p_i u_i dS - \iint_{S_u} n_i \sigma_{ij}(u_j - u_j^*) dS, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{u\sigma} = \iiint_V \left[\delta \sigma_{ij} \left\{ \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) - d_{ijkl}\sigma_{kl} - C_{ij} \right\} - \delta u_i (\sigma_{ij,j} + \rho f_i) \right] dV \\ - \iint_{S_u} n_i \delta \sigma_{ij}(u_j - u_j^*) dS - \iint_{S_p} (\sigma_{ij}n_j - p_i) \delta u_j dS. \end{aligned} \quad (3)$$

З умови стаціонарності функціонала (2) випливають рівняння Ейлера – Остроградського, що відповідають рівнянням (1).

Система рівнянь (1) доповнюється рівняннями стану повзучості. Відомо, що для ізотропного при повзучості матеріалу мезо-пошкодження адекватно описуються кінетичним рівнянням для параметру пошкоджуваності, що входить у рівняння стану повзучості. Найбільш обґрунтованим для високотемпературної повзучості виявляється закон типу Бейлі-Нортон, за яким [3]:

$$\dot{C}_{ij} = \frac{3}{2} \cdot \frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega^r)^m} S_{ij}, \quad \dot{\omega} = \frac{D\langle \sigma_e \rangle^k}{(1-\omega^r)^l}, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t_*) = \omega_*, \quad (4)$$

$$\langle \sigma_e \rangle = \begin{cases} \alpha \sigma_I + (1-\alpha) \cdot \sigma_i, & \sigma_e > 0 \\ 0, & \sigma_e \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

де B, D, n, m, k, l, r – експериментально визначені константи, σ_I – максимальне головне напруження, σ_i – інтенсивність напружень, α – параметр, що характеризує тип руйнування матеріалу ($0 \leq \alpha \leq 1$).

В роботі для широкого класу крайових задач запропоновано структури рішення, які дозволили у загальному випадку записати розв'язки крайових задач повзучості в аналітичному вигляді [3]. Використовуючи значення напружень із системи рівнянь (1) у

початковий момент часу, виконується інтегрування рівнянь стану повзучості виду (4) з використанням методу Рунге-Кутта в модифікації Мерсона й триває рішення за часом на основі змішаного варіаційного функціонала (2).

Також у роботі запропоновано інтегральні оцінки наближених розв'язків задач повзучості, що мають вигляд:

$$\left\{ \forall u_i, \sigma^{ij} : L_u = R_{u\sigma} - \frac{1}{2} \iiint_V c_{ijkl} C_{ij} C_{kl} dV = K_\sigma - \frac{1}{2} \iiint_V c_{ijkl} C_{ij} C_{kl} dV \right\}. \quad (6)$$

Значення порівнюваних величин обчислюються на одержаних у кожен момент часу розв'язків по формулах:

$$L_u = \iiint_V \left[\frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \varepsilon_{kl}(\bar{u}) - c_{ijkl} C_{ij} \varepsilon_{kl}(\bar{u}) - \rho f_i u_i \right] dV - \iint_{S_p} u_i t_i dS,$$

$$K_\sigma = \iint_{S_u} \sigma_{ij} n_j u_i^* dS - \iiint_V \left[\frac{1}{2} d_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \sigma_{ij} C_{ij} \right] dV.$$

Рівності (6) узагальнюють для повзучості відомі в теорії пружності апостеріорні оцінки точності розв'язків варіаційної рівності (5), раніше одержані Ю.В. Ромашовим і В.А. Сало. Абсолютні значення зазначених тут величин збігаються на точно знайдених розв'язках варіаційної рівності, і по нормі їх відмінності дозволяють оцінити наближені розв'язки.

Результати досліджень. В якості прикладу розглянемо частину труби у вигляді товстостінного циліндра з вільними торцями, що перебуває під дією внутрішнього тиску $p_1^0 = 25 \text{ МПа}$. Циліндр виготовлений з матеріалу Д16АТ. Фізико-механічні постійні даного матеріалу в рівнянні стану (4) при температурі $T=300^0$, прийняті рівними: $E = 65 \text{ ГПа}$, $B = 0.34 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-n}/\text{ч}$, $D = 1.9 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-m}/\text{ч}$, $n = m = k = l = 2.93$, $r = 1$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0$. У розрахунках прийняті наступні значення геометричних параметрів циліндра: $R_1 = 0.1 \text{ м}$, $R_2 = 0.5 \text{ м}$ – внутрішній і зовнішній радіуси відповідно, $2h = 0.6 \text{ м}$ – довжина циліндра.

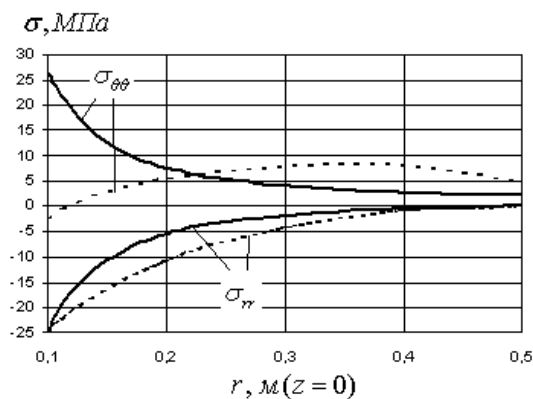


Рис. 1. Розподіл радіальних й окружних напружень

На рис. 1 наведені розподіли радіальних й окружних напружень у центральній частині циліндра в початковий момент часу $t_0 = 0$ ч (суцільна крива) і перед руйнуванням $t_* = 109$ годин (штрихова крива). Встановлено, що за час до встановлення повзучості напруження помітно перерозподіляються по перетину циліндра при малому рівні накоплення пошкоджуваності ($\omega_* < 0.1$). Пошкоджуваність збільшується практично без зміни напружень аж до руйнування, інтервал часу від встановлення напружень до руйнування становить 84,4%.

Далі розглянемо ущільнювальне кільце, що представлено на рис. 2 з внутрішнім діаметром $D = 200 \text{ мм}$, яке працює під внутрішнім тиском $p = 20 \text{ МПа}$. Геометричні параметри кільця приймемо наступними: $h = 2 \text{ мм}$, $D_1 = 205 \text{ мм}$, $D_2 = 245 \text{ мм}$.

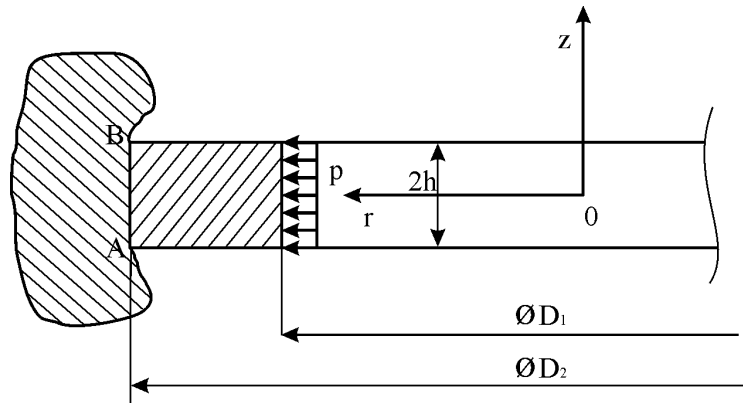


Рис. 2. Схема ущільнювального кільця прямокутного перерізу

Розглянемо пошкоджуваність внаслідок повзучості кільця виготовленого зі сталі 20 (500°C) [7]. Для даного матеріалу значення модуля пружності і коефіцієнта Пуасона будуть наступними: $E = 164.3 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$.

Рівняння стану повзучості для такого випадку конкретизувалися у вигляді:

$$\dot{C}_{ij} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Bt^{\varphi} \sigma_i^{n-1}}{(1-\omega^r)^m} S_{ij}, \quad \dot{\omega}_{ij} = \frac{Dt^{\varphi} (\sigma_e)^k}{(1-\omega^r)^l}, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t_*) = \omega_*, \quad (7)$$

$$\sigma_e = \alpha \sigma_t + (1-\alpha) \cdot \sigma_i.$$

Значення постійних у рівняннях (7) прийняті рівними: $B = 1,19 \cdot 10^{-16} \text{ МПа}^{-n}/\text{год}^{\alpha+1}$, $D = 8,38 \cdot 10^{-17} \text{ МПа}^{-k}/\text{год}^{\alpha+1}$, $n = m = k = 6.12$, $l = 11.51$, $r = 1,379$, $\varphi = -0.21$, $\alpha = 0$.

Розглянемо випадок взаємодії кільця із гладкими стінками затвора на зовнішньому радіусі. Результати розрахунків напружено-деформованого стану представимо для наступних моментів часу: а) початкового при $t_0 = 0$ годин, б) моменту прихованого руйнування $t_2 = 6393$ години ($\omega_* = 0.9$). На рис. 3 представлені розподіли радіальних напружень у початковий момент часу й у момент часу $t_2 = 6393$ години. Аналогічно на рис. 4 наведені розподіли окружних напружень. Слід зазначити істотне зростання значень окружних напружень та осьових переміщень. Осьові й дотичні напруження практично відсутні і за часом не змінюються. Значно ростуть осьові переміщення, а їх максимальні значення в момент руйнування становлять близько 300 мкм. Точка, що відповідає прихованому руйнуванню перебуває на внутрішньому радіусі, на краю ущільнення.

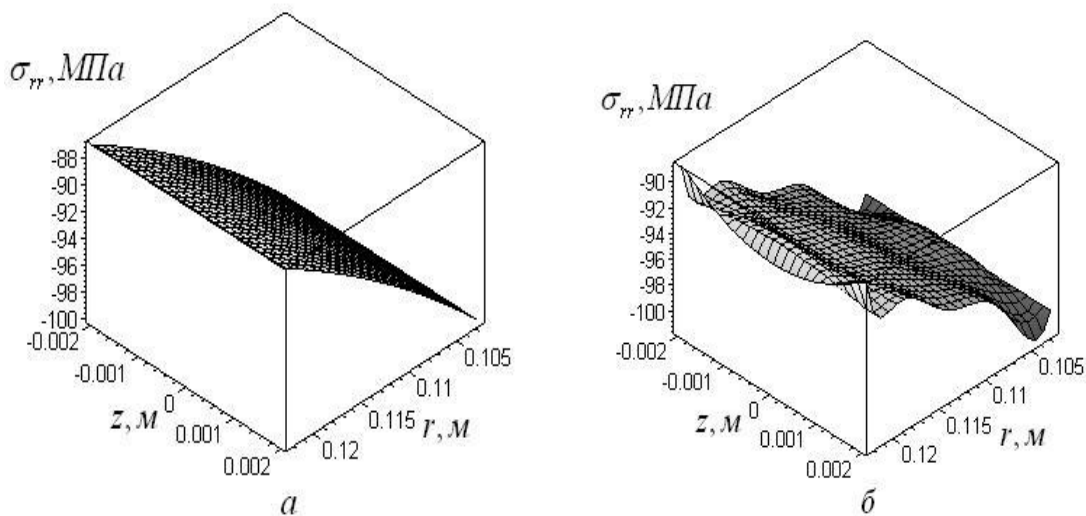


Рис. 3. Розподіл радіальних напружень

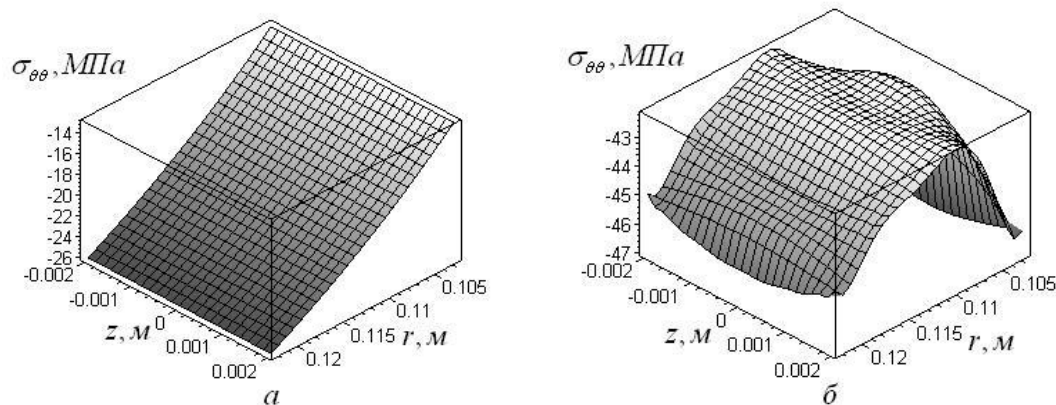


Рис. 4. Розподіл окружних напружень

Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі розглянуто повзучість труб тиску та ущільнювальних кілець прямокутного перерізу. Розрахунками встановлено, що зі збільшенням числа базисних функцій і кількості точок області дискретизації результати розрахунків практично не змінюються. Слід зазначити значний перерозподіл окружних напружень на внутрішній і зовнішній поверхні товстостінного циліндра. Для ущільнювальних кілець аналіз одержаних результатів дозволив зробити висновок про істотний перерозподіл полів нормальних і дотичних напружень, ослаблення з'єднань за рахунок зниження рівня контактних напружень за часом, особливо на краях кільця, що сприяє розгерметизації затвору. Повзучість сприяє значному росту переміщень у крайніх точках внутрішньої поверхні кільця.

Література

1. Altenbach H. Geometrically nonlinear bending of thin - walled shells and plates under creep - damage conditions / H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, A. Sychov // Arch. Appl. Mech., 67, (1997), p. 339 - 352.
2. Morachkovsky O. The methods for solution of static and dynamic creep problems for bodies of revolution / O. Morachkovsky, V. Sobol, A. Zamula // Тезиси докладов Международной конференции «Nonlinear Dynamics». – Харків, 2004. – С. 59.
3. Савін О.Б. Повзучість та пошкоджуваність стержнів і циліндрів на базі змішаного варіаційного функціонала / О.Б. Савін, В.М. Соболев // Науковий вісник будівництва. – Харків: ХНУБА, 2016. – № 4 (86). – С. 130-134.
4. Romashov Yu.V. Mathematical formulations and numerical solutions of initial-boundary-value problem of creep theory / Yu.V. Romashov, V.N. Sobol // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences / N.N. Kizilova, G.N. Zholtkevych (eds.). – Kharkov: Publishing house PPB Virovec' A.P. Publishing house is a group "Apostrophe", 2011. – 396 p. – P. 120-129.
5. Малинин Н.Н. Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1981. – 221с.
6. Сосуды и трубопроводы высокого давления: Справочник / Е.Р. Хисматуллин, Е.М. Королев, В.И. Лившиц и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.
7. Савін О.Б. Повзучість та пошкоджуваність стержнів і циліндрів на базі змішаного варіаційного функціонала / О.Б. Савін, В.М. Соболев // Науковий вісник будівництва. – Харків: ХНУБА, 2016. – № 4 (86). – С. 130-134.

Стаття надійшла 28.04.2017