УДК 539.3

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ПРЯМИХ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Чибіряков В.К., д.т.н., професор,
Станкевич А.М., к.т.н., професор,
Краснєєва А.О., асистент,
Шорін О.А., аспірант
Київський національний університет будівництва і архітектури
shoringm@gmail.com

Анотація. Дана робота присвячена поширенню застосування узагальненого метода прямих для розв'язання задач теорії пружності, визначених в областях неканонічної форми. Розглядається два варіанти плоских областей – в першому, який можна вважати товстою пластиною змінної товщини, будується двоточкова гранична задача для системи звичайних диференційних рівнянь, яку пропонується розв'язувати методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова. В другому варіанті для областей складної форми побудовано багатоточкову задачу та алгоритм її чисельного розв'язання.

Ключові слова: узагальнений метод прямих, область складної форми, проекційний метод, редуковані рівняння, двоточкова гранична задача, метод дискретної ортогоналізації, багатоточкова гранична задача.

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПРЯМЫХ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Чибиряков В.К., д.т.н., профессор,
Станкевич А.М., к.т.н., профессор,
Краснеева А.А., ассистент,
Шорин А.А., аспирант,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры
shoringm@gmail.com

Аннотация. Эта работа посвящена расширению применения обобщенного метода прямых для решения задач теории упругости определенных в областях неканонической формы. Рассматривается два варианта плоских областей – в первом, который можно считать толстой пластиной переменной толщины, строится двухточечная граничная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которую предлагается решать методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова. Во втором варианте для областей сложной формы, строится многоточечная задача и алгоритм её численного решения.

Ключевые слова: обобщенный метод прямых, область сложной формы, проекционный метод, редуцированные уравнения, двухточечная граничная задача, метод дискретной ортогонализации, многоточечная граничная задача.

GENERALIZED METHOD OF LINES IN TASKS OF THE THEORY OF ELASTICITY IN IRREGULAR SHAPE AREA

Chybiryakov V.K., Doctor of Engineering, Professor,
Stankevich A.M., PhD., Professor,
Krasneeva A.A., Assistant,

Shorin A.A., graduate student,
Kyiv National University of Construction and Architecture
shoringm@gmail.com

Abstract. This work is considering two options of using the generalized method of lines to solve problems of the theory of elasticity in flat area which has irregular shape. In the first option the area is limited by two straight parallel lines to one of coordinate axes and two curves which are a function graph of another coordinate.

We suggest using a projection method for reduction in measurement of equations and boundary conditions on one variable. As a result we have two-dot boundary problem for the system of ordinary differential equations which we suggest to solve by S. K. Godunov's method of discrete orthogonalization.

In the second option the area can have a free form and be limited by convex curve. On the basis of the generalized method of lines we build an algorithm of the approximate solving flat problem of the theory of elasticity for that area. We apply the system of parallel straight lines which contact the system of local concentrated function-"cap" to the area, which makes dimension on one coordinate go down.

Before the reduction equations have expanded on rectangular area which part is the basic area. Respectively, reduced equations have expanded to this area. We build general solution of reduced equations with numerous methods.

General solution and boundary conditions in the points of intersection of the straight lines with boundary convex curve define the multispot boundary task which allows building a system of algebraic equations in order to find arbitrary constants.

Keywords: generalized method of line, area of irregular shape, projective method, reduced equations, method of discrete orthogonalization, two dots boundary task, multispot boundary task.

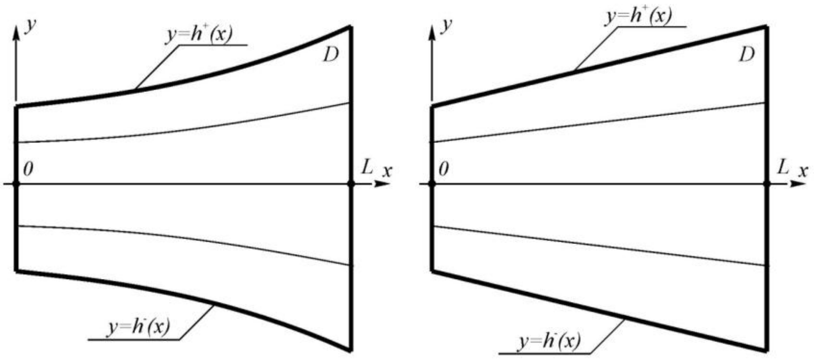
Вступ. Метод прямих є одним з ефективних комбінованих наближених методів математичної фізики [1]. Він полягає в зведені вихідних багатовимірних по просторових координатах рівнянь до системи звичайних диференційних рівнянь, формулюванні граничних умов та подальшому розв'язуванні граничних задач для системи звичайних диференційних рівнянь.

Традиційно перший етап – зниження вимірності вихідних рівнянь – виконувався скінченно-різницевим методом, а розв'язування граничних задач для системи звичайних диференційних рівнянь на другому етапі метода прямих – аналітичними методами [2]. З появою ефективних чисельних методів їх стали використовувати на другому етапі, а саме метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [3], але у випадку двоточкових редукованих задач.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Аналіз останніх публікацій показав, що автори, як правило дотримуються традиційного підходу до побудови редукованих диференційних рівнянь, хоча для розв'язування двоточкових редукованих рівнянь використовують сучасні чисельні методи. В наших попередніх роботах [4-6] запропоновано на першому етапі метода прямих для зниження вимірності вихідних рівнянь використовувати проекційний метод, причому в якості базисних функцій застосовувати локально зосереджені функції. Оскільки система таких функцій не є ортонормованою, то за аналогією з тензорним численням розроблено формалістику застосування таких функцій та використання їх для різних математичних операцій, що супроводжують процес зниження вимірності. При всіляких операціях використовується індексна форма представлення редукованих величин та індексна алгебра, що розроблена в тензорному численні.

Мета та завдання. Застосування проекційного метода значно розширює можливості зниження вимірності вихідних рівнянь теорії пружності. Навіть у випадку досить простих задач теорії пружності – статичних плоских задач – з'явилася можливість розглядати напружено-деформований стан (НДС) об'єктів досить складної форми (рис. 1а), в найпростішому випадку (рис. 1б).

Кожний вертикальний переріз $x=c$ розбиваємо на N-1 однакових ділянок, в результаті чого на область D наноситься N ліній, у випадку (рис. 1б). ці лінії є прямими, що є основою метода прямих. Хоча у випадку (рис. 1а) ці лінії не є прямими, будемо і тут користуватися назвою «метод прямих».



а) б)

Рис. 1. Пластини змінної товщини:
а – пластина обмежена лицевими поверхнями; б – пластина обмежена лицевими площинами

Вихідні рівняння плоскої задачі теорії пружності записуємо у вигляді п’яти диференційних рівнянь першого порядку в частинних похідних відносно невідомих компонент НДС u, v, σ_x, σ_y, τ_{xy}. В результаті зниження вимірності цих рівнянь по координаті *y*, отримаємо систему *4N* звичайних диференційних рівнянь, які записуємо у вигляді:

$$\frac{d}{dx}=\begin{bmatrix} u_i(x) \\ v_i(x) \\ \sigma_{x,i}(x) \\ \tau_{xy,i}(x) \end{bmatrix} = A(x)\begin{bmatrix} u_\gamma(x) \\ v_\gamma(x) \\ \sigma_{x,\gamma}(x) \\ \tau_{xy,\gamma}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_i^*(x) \\ Y_i^*(x) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

де матриця *A(x)* в блочно-індексній формі має вигляд:

$$A(x)=\begin{bmatrix} a_{11\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{12\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{13\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{14\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} \\ a_{21\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{22\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{23\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{24\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} \\ a_{31\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{32\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{33\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{34\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} \\ a_{41\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{42\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{43\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} & a_{44\,i.}^{\;\;\cdot\gamma} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Тут:

$$a_{41\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=a_{32\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=a_{23\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=a_{14\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=0;$$

$$a_{11\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=\left(\delta_{i.}^{\cdot N}\frac{dh^+(x)}{dx}\cdot g^{Nj}-\delta_{i.}^{\cdot 1}\frac{dh^-(x)}{dx}\cdot g^{1j}\right)\cdot\delta_{j.}^{\cdot\gamma}+\frac{d\Delta(x)}{dx}\cdot d_{ij}\cdot g^{j\alpha}\cdot\delta_{\alpha.}^{\cdot\gamma};$$

$$a_{12\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot b_{ij}\cdot g^{j\alpha}\cdot\delta_{\alpha.}^{\cdot\gamma};$$

$$a_{13\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=\frac{1}{\lambda+2\mu}\cdot\delta_{i.}^{\cdot\gamma};$$

$$a_{21\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=-b_{ij}\cdot g^{j\alpha}\cdot\delta_{\alpha.}^{\cdot\gamma};$$

$$a_{22\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=\left(\delta_{i.}^{\cdot N}\frac{dh^+(x)}{dx}\cdot g^{Nj}-\delta_{i.}^{\cdot 1}\frac{dh^-(x)}{dx}\cdot g^{1j}\right)\cdot\delta_{j.}^{\cdot\gamma}+\frac{d\Delta(x)}{dx}\cdot d_{ij}\cdot g^{j\alpha}\cdot\delta_{\alpha.}^{\cdot\gamma};$$

$$a_{24\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=\frac{1}{\mu}\cdot\delta_{i.}^{\cdot\gamma};$$

$$a_{31\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=(\delta_{i.}^{\cdot N}\cdot B^+\cdot k_x^+\cdot g^{Nj}-\delta_{i.}^{\cdot 1}\cdot B^-\cdot k_x^-\cdot g^{1j})\cdot\delta_{j.}^{\cdot\gamma};$$

$$a_{33\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=\frac{d\Delta(x)}{dx}\cdot d_{ij}\cdot g^{j\alpha}\cdot\delta_{\alpha.}^{\cdot\gamma};$$

$$a_{34\,i.}^{\;\;\cdot\gamma}=b_{ij}\cdot g^{j\alpha}\cdot\delta_{\alpha.}^{\cdot\gamma};$$

$$a_{42_{i.}^{\gamma}} = (\delta_{i.}^{\cdot N} \cdot B^{+} \cdot k_x^{+} \cdot g^{Nj} - \delta_{i.}^{\cdot 1} \cdot B^{-} \cdot k_x^{-} \cdot g^{1j}) \cdot \delta_{j.}^{\cdot\gamma} + \frac{4\mu(\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot b_{ji} \cdot g^{j\alpha} \cdot b_{\alpha\beta} \cdot g^{\beta\gamma};$$

$$a_{43_{i.}^{\gamma}} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot b_{ij} \cdot g^{j\alpha} \cdot \delta_{\alpha.}^{\cdot\gamma};$$

$$a_{44_{i.}^{\gamma}} = \frac{d\Delta(x)}{dx} \cdot d_{ij} \cdot g^{j\alpha} \cdot \delta_{\alpha.}^{\cdot\gamma};$$

$$X_i^{*}(x) = X_i(x) + \delta_{i.}^{\cdot N} B^{+}(q_{xc}^{+}(x) + k_x^{+}\Delta_{xc}^{+}(x)) + \delta_{i.}^{\cdot N} B^{-}(q_{xc}^{-}(x) + k_x^{-}\Delta_{xc}^{-}(x));$$

$$Y_i^{*}(x) = Y_i(x) + \delta_{i.}^{\cdot N} B^{+}(q_{yc}^{+}(x) + k_y^{+}\Delta_{yc}^{+}(x)) + \delta_{i.}^{\cdot N} B^{-}(q_{yc}^{-}(x) + k_y^{-}\Delta_{yc}^{-}(x));$$

$$\Delta(x) = \frac{h^{+}(x) - h^{-}(x)}{N-1}. \tag{3}$$

Слід зазначити, що граничні умови на бокових ділянках границі $y=h^{-}(x)$ та $y=h^{+}(x)$ використовуються при зниженні вимірності вихідних рівнянь і дають додатки в праву частину зовнішніх впливів (3). Натомість проектуванням граничних умов на торцевих ділянках границі $x=0$ та $x=L$ отримаємо граничні умови для редукованих рівнянь в точках $x=0$ та $x=L$ на відрізку визначення редукованих рівнянь [0;L]. Це також один з головних позитивних моментів узагальненого методу прямих.

В результаті зниження вимірності вихідних рівнянь та вихідних граничних умов на торцях отримаємо систему редукованих рівнянь, які є у формі Коші:

$$\frac{d\vec{Y}(x)}{dx} = A(x)\vec{Y}(x) + \vec{F}(x). \tag{4}$$

Та систему граничних умов у вигляді:

$$C_0(\vec{Y}(0) - \vec{\Phi}_0) = 0,$$
$$C_L(\vec{Y}(L) - \vec{\Phi}_L) = 0 - \tag{5}$$

так звану двоточкову граничну задачу.

Отже маємо граничну задачу (4), (5), яка ідеально підходить до використання метода дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [3].

Однією з особливостей методу прямих є можливість розглядати задачі, визначені в областях довільної конфігурації, якщо можливо побудувати загальний розв'язок системи редукованих рівнянь. Саме на це звернув увагу засновник методу прямих Л.В.Канторович [2]. Ним та його послідовниками для побудови загального розв'язку використовувались аналітичні методи. Це значно звужувало можливості метода прямих. В наш час існує багато ефективних чисельних методів, за допомогою яких можна будувати загальний розв'язок системи звичайних диференційних рівнянь. Але до сих пір ці можливості в методі прямих не використовувались для розв'язування задач математичної фізики в задачах, визначених в області складної форми. Нижче пропонується алгоритм, який розв'язує подібну задачу.

Розглядається плоска задача теорії пружності в області, що показана на рис. 1б, яку віднесено до декартової системи координат (рис. 2).

Плоска задача теорії пружності розглядається в області D, яка обмежена двома відрізками нахилених прямих $y=k_1x$ та $y=k_2x+b$. На горизонтальних ділянках задано граничні умови, на нахилених ділянках граничні умови загального вигляду [5].

Область D будемо розглядати як підобласть прямокутної області $D^*=[0;L]\otimes[h^-;h^+]$. На область D^* нанесено прямі, які розбивають область на $N-1$ ділянку завширшки $\Delta=H/(N-1)$. Вихідні рівняння, визначені в області D, подовжимо на область D^*. Відповідно граничні умови на горизонтальних ділянках границі області D подовжимо на горизонтальні ділянки прямокутної області D^*.

Використовуючи проекційний метод знизимо вимірність вихідних рівнянь, подовжених на область D^*. Отримаємо систему $4N$ звичайних диференційних рівнянь. До цих рівнянь, як зазначено вище, входять граничні умови на горизонтальних ділянках області D^*. Запишемо редуковані рівняння в матричному вигляді:

$$\frac{d\vec{Y}(x)}{dx} = A(x)\vec{Y} + \vec{F}\ . \tag{6}$$

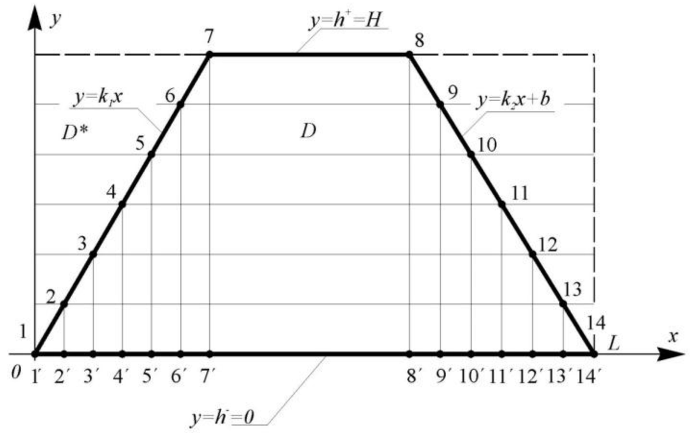


Рис. 2. Плоска область неканонічної форми

Загальний розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд:

$$\vec{Y}(x) = b_1\vec{Y}_1(x) + b_2\vec{Y}_2(x) + b_3\vec{Y}_3(x) + ... + b_{4N}\vec{Y}_{4N}(x) + \vec{Y}_0(x); \tag{7}$$

де $-\{\vec{Y}_1(x), \vec{Y}_2(x), \vec{Y}_3(x), ..., \vec{Y}_{4N}(x)\}$ фундаментальна система розв'язків – система лінійно незалежних часткових розв'язків однорідної системи диференційних рівнянь, $\vec{Y}_0(x)$ – частковий розв'язок неоднорідної системи. Якщо з елементів фундаментальної системи розв'язків утворити фундаментальну матрицю, де ці елементи є відповідними стовпчиками, то співвідношення (6) можна записати у вигляді:

$$\vec{Y}(x) = \vec{Y}(x)\vec{b}^1 + \vec{Y}_0(x), \tag{8}$$

де $\vec{b}^1 = [b_1, b_2, b_3, ..., b_{4N}]^T, Y(x)$ – фундаментальна матриця розміром *4N×4N*. Фундаментальну систему розв'язків можна побудувати, розв'язуючи *4N* задач Коші для системи однорідних рівнянь (6), використовуючи в якості початкових умов стовпчики одиничної матриці розміром *4N×4N* [7]. Частковий розв'язок неоднорідної системи диференційних рівнянь $\vec{Y}_0$ також можна побудувати розв'язанням задачі Коші з будь-якими початковими умовами. Простіше за все в якості початкових умов 4*N* – вимірний нульовий вектор $\vec{\Theta} = [0,0,0,...,0]^T$.

Таким чином, головним і найбільш трудомістким етапом побудови загального розв'язку є розв'язування *4N+1* задач Коші для системи редукованих рівнянь (5). Як правило, для розв'язування таких задач Коші використовують явні обчислювальні алгоритми, здебільш алгоритми Рунге-Кутта різного порядку точності (найчастіше четвертого порядку точності). Але при застосуванні явних обчислювальних алгоритмів для розв'язання редукованих задач виникають серйозні обчислювальні проблеми, пов'язані з втратою стійкості обчислювального процесу.

Для забезпечення стійкості С. К. Годунов [3] запропонував використовувати ортогоналізацію фундаментальної системи розв'язків. При цьому попередня система розв'язків, або фундаментальна матриця *Y(x)* замінюється ортонормованою системою фундаментальних розв'язків:

$$\{\ \vec{Z}_1(x), \vec{Z}_2(x), \vec{Z}_3(x), ..., \vec{Z}_{4N}(x),\ \},$$

з яких утворюють фундаментальну матрицю *Z(x)*. Після цього загальний розв'язок в точці ортогоналізації має вигляд:

$$\vec{Y}(x) = Z(x)\cdot\vec{b}_2 + \vec{Z}_0(x), \tag{9}$$

де вектор $\vec{Z}_0(x)$ є вектором, побудованим на основі вектора $\vec{Y}_0(x)$ і ортогональним до всіх векторів $\vec{Z}_i(x)\ (i = 1{,}4N)$. Маючи загальний розв'язок системи звичайних диференційних рівнянь, можна визначити довільні сталі використовуючи граничні умови в точках перетину прямих з ділянками границі області *D*.

Особливістю використання граничних умов для розв'язування граничної задачі, є залежність довільних сталих від процесу ортогоналізації. Так, вектор довільних сталих

$\vec{b}_2$ пов'язаний з вектором $\vec{b}_1$ до ортогоналізації співвідношенням:

$$\vec{b}^2 = \Omega_2 \cdot \vec{b}_1 + \vec{\Omega}_{0,2}, \tag{10}$$

де Ω_2 – нижньотрикутна матриця проекцій векторів фундаментальної системи часткових розв'язків $\vec{Y}_i(x)$ на ортонормовані вектори нової фундаментальної системи розв'язків $\vec{Z}_j(x)$ $(i, j = \overline{1,4N})$.

З вищезазначеного випливає наступний обчислювальний алгоритм. Оскільки область *D*, як і область *D**, при використанні проекційного методу проектується на відрізок [*0;L*], а граничні точки 1-14 проектуються відповідно в точки 1′-14′ на відрізку [*0;L*], то редукована гранична задача є так званою багатоточковою граничною задачею [7] на відміну від попередньої двоточкової граничної задачі. Для її розв'язування на відрізку [*0;L*] призначаються точки ортогоналізації, до яких обов'язково мають входити перша точка відрізка *x=0,* та остання точка відрізка *x=L*. В якості інших точок ортогоналізації вибираємо проекції граничних точок 2′-13′. Якщо в процесі роботи програми з'ясується недолік точок ортогоналізації, то можна вибирати додаткові точки ортогоналізації в проміжках між вже зазначеними.

Оскільки в першій точці для побудови загального розв'язку системи редукованих рівнянь вибрано систему ортонормованих початкових векторів, фундаментальна матриця в цій точці *Z(0)=E,* а нульовий вектор часткового розв'язку, ортогональний до векторів фундаментальної системи розв'язків, то в першій точці ортогоналізація зайва, а загальний розв'язок в перший точці має вигляд:

$$\vec{Y}(0) = Z(0) \cdot \vec{b}_1 + Z_0(0) = E \cdot \vec{b}_1 + \Theta = b_1. \tag{11}$$

Використовуючи граничні умови в т.1 та розв'язок (9) складаємо два алгебраїчних рівняння, які в загальному вигляді можна записати як:

$$\begin{cases} c_{11}b_1^1 + c_{12}b_2^1 + c_{13}b_3^1 + \ldots + c_{1,2N}b_{2N}^1 = P_1^1 \\ c_{21}b_1^1 + c_{22}b_2^1 + c_{23}b_3^1 + \ldots + c_{2,2N}b_{2N}^1 = P_2^1 \end{cases}$$

або в матричній формі:

$$C^1 \cdot \vec{b}_1 = \vec{P}^1. \tag{12}$$

Далі інтегруються *4N+1* задач Коші від першої точки ортогоналізації до другої. В результаті інтегрування в точці 2 отримуємо фундаментальну систему розв'язків $Y(x_2)$ та частковий розв'язок неоднорідних рівнянь $\vec{Y}_0(x_2)$, який вже є ортогональним. Але довільні сталі в загальному розв'язку зберігаються:

$$\vec{Y}(x_2) = Y(x_2)\vec{b}_1 + \vec{Y}_0(x_2).$$

Після ортогоналізації загальний розв'язок має вигляд:

$$\vec{Y}(x_2) = Z(x_2)\vec{b}_2 + \vec{Z}_0(x_2). \tag{13}$$

Саме його використовуємо для побудови ще однієї пари алгебраїчних рівнянь виходячи з граничних умов в т.2:

$$C_2^2\vec{b}_2 = \vec{P}_2. \tag{14}$$

Але це рівняння не можна розглядати сумісно з рівнянням (12). Щоб це можна було б зробити перетворимо рівняння (12), використовуючи співвідношення (10) у вигляді:

$$\vec{b}_1 = \Omega_2^{-1}(\vec{b}_2 - \Omega_{0,2}). \tag{15}$$

Використовуючи співвідношення (14) рівняння (11) перетворимо на наступні:

$$C_1^*\vec{b}_2 = \vec{P}_1^*, \tag{16}$$

які далі розглядаємо сумісно з (14):

$$\begin{cases} C_1^*\vec{b}_2 = \vec{P}_1^* \\ C_2^*\vec{b}_2 = \vec{P}_2^* \end{cases}. \tag{17}$$

Далі продовжуються аналогічні операції на ділянці від точки ортогоналізації *n* до точки ортогоналізації *n+1*. При цьому послідовно виконується:

1. Інтегрування *4N+1* задач Коші з початковими умовами:

$$Y(x_n) = Z(x_n),$$

$$\vec{Y}_0(x_n) = \vec{Z}_0(x_n).$$

2. В точці $(n+1)$отримаємо фундаментальну матрицю $Y(x_{n+1})$ та частковий розв'язок $\vec{Y}_0(x_{n+1})$. Загальний розв'язок в точці x_{n+1} має вигляд:

$$\vec{Y}(x_{n+1}) = Y(x_{n+1})\vec{b}_n + \vec{Y}_0(x_{n+1}).$$

3. В результаті ортогоналізації отримуємо фундаментальну матрицю $Z(x_{n+1})$ та вектор $\vec{Z}_0(x_{n+1})$. Відповідно загальний розв'язок в цій точці визначається так:

$$\vec{Y}(x_{n+1}) = Z(x_{n+1})\vec{b}_{n+1} + \vec{Z}_0(x_{n+1}). \tag{18}$$

4. За допомогою загального розв'язку (17):

$$C_{n+1}\vec{b}_{n+1} = \vec{P}^{n+1,*} \tag{19}$$

на основі граничних умов в точці x_{n+1} складаємо два алгебраїчних рівняння.

5. Для того, щоб об'єднати ці два рівняння з попередніми, що визначені для $\vec{b}_n$, необхідно усі $2n$ попередніх алгебраїчних рівнянь перетворити на рівняння відносно $\vec{b}_{n+1}$ за допомогою рекурентної формули, що узагальнює формулу (15):

$$\vec{b}_n = \Omega_{n+1}^{-1}(\vec{b}_{n+1} - \vec{\Omega}_{0,n+1}). \tag{20}$$

Виконуючи інтегрування до кінцевої точки та складаючи систему алгебраїчних рівнянь в кінцевій точці після ортогоналізації побудуємо систему $4N$ алгебраїчних рівнянь відносно $4N$ компонент вектора $\vec{b}$ в кінцевій точці.

Зворотнім ходом алгоритму за допомогою співвідношення (19) знаходимо значення вектора довільних сталих $\vec{b}$ в попередніх точках ортогоналізації та будуємо розв'язки граничної задачі у цих точках.

Наукові результати. В роботі розроблені нові методики розв'язування плоских задач теорії пружності в областях неканонічної форми чисельно-аналітичним методом.

Висновки. Ці методики можна застосовувати до розрахунків на статичні впливи, при гармонійних силових та кінематичних впливах та знаходження динамічних характеристик. Методики можуть бути поширені на розв'язування більш складних задач, які визначені в неканонічних тривимірних областях.

Література

1. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Гостехиздат, 1949. – 709с.
2. Канторович Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла / Л.В. Канторович // Известия Академии наук СССР. Серия 7. Отделение математических и естественных наук. – М.; Л., 1933. – Вып. 5. – С. 647-652.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – Т.16. – 1961. – Вып.3. С.171-174.
4. Станкевич А.М. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих / А.М. Станкевич., В.К. Чибіряков., Л.Т. Шкельов // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – Вип. 36. – С. 413-423.
5. Чибіряков В.К. Модифікований метод прямих в задачах статики та динаміки масивних конструкцій / В.К. Чибіряков., А.М. Станкевич., Д.В. Левківський., В.Д. Мельничук // Вісник ОДАБА. – 2016. – Вип. 61. – Одеса. – С.412-423.
6. Чибіряков В.К. Зниження вимірності рівнянь статики товстої пластини змінної товщини узагальненим методом прямих / В.К. Чибіряков., А.М. Станкевич., А.А. Стащук // Опір матеріалів і теорія споруд. – Вип. 85. К.; КНУБА. – 2012. – С.58-67.
7. Корбач В.Г. Алгоритм численного решения многоточечных краевых задач механики деформированного твердого тела. Прочность конструкций летательных аппаратов / Сб. научных трудов / В.Г. Корбач // Редколегия: Львов М.П. и др. – Харьков: Харьковский авиационный институт, 1990. – С.88-95.

Стаття надійшла 10.05.2017