УДК 539.3:624.016

ПРИРОДНА КРИВОЛІНІЙНА ЦИЛІНДРИЧНА СИСТЕМА КООРДИНАТ ДЛЯ СТЕРЖНІВ ІЗ ПЛОСКОЮ ВІССЮ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

Ковальчук С.Б., к.т.н.,
Горик О.В., д.т.н., професор,
Полтавська державна аграрна академія
oleksii.goruk@pdaa.edu.ua

Анотація. У роботі дане теоретичне представлення криволінійної циліндричної ортогональної системи координат, у якій природним чином моделюється будова криволінійного стержня із плоскою віссю довільної форми. Встановлено основні залежності і необхідні характеристики для перетворення функцій, компонент векторів та тензорів у випадку переходу від прямокутної просторової до природної криволінійної циліндричної системи координат. Розроблено методику побудови природної циліндричної ортогональної системи координат по заданому однопараметричному сімейству кривих і наведено приклади її застосування для побудови циліндричних кругової та логарифмічної систем координат.

Ключові слова: криволінійний стержень, плоска криволінійна вісь, криволінійна циліндрична система координат, координатна поверхня, сімейство кривих.

ЕСТЕСТВЕННАЯ КРИВОЛИНЕЙНАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ С ПЛОСКОЙ ОСЬЮ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Ковальчук С.Б., к.т.н.,
Горик А.В., д.т.н., профессор,
Полтавская государственная аграрная академия
oleksii.goruk@pdaa.edu.ua

Аннотация. В работе дано теоретическое представление криволинейной цилиндрической ортогональной системы координат, в которой естественным образом моделируется строение криволинейного стержня с плоской осью произвольной формы. Установлены основные зависимости и необходимые характеристики для преобразования функций, компонент векторов и тензоров, при переходе от прямоугольной пространственной системы к естественной криволинейной цилиндрической системе координат. Разработана методика построения естественных цилиндрических ортогональных систем координат по заданному однопараметрическому семейству кривых и приведены примеры ее применения для построения цилиндрических круговой и логарифмической систем координат.

Ключевые слова: криволинейный стержень, плоская криволинейная ось, криволинейная цилиндрическая система координат, координатная поверхность, семейство кривых.

NATURAL CURVILINEAR CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEM FOR RODS WITH A PLAIN AXIS OF AN ARBITRARY FORM

Kovalchuk S., PhD.,
Goryk O., Doctor of Engineering, Professor,
Poltava state agrarian academy
oleksii.goruk@pdaa.edu.ua

Abstract. The article deals with the theoretical model of the curvilinear cylindrical orthogonal coordinate system, in which the construction of a curvilinear bar with a plain axis of an arbitrary form is naturally simulated. Main characteristics and dependences which allow to modify scalar functions as well as their first-order derivatives when passing from the orthogonal spatial system to the natural curvilinear cylindrical coordinate system have been received for the suggested coordinate system. Analytical relations for the angle of planes of tangent lines to coordinate surfaces, which allowed to record the correlation for transformation of vectors and tensors have been received with the help of differential relationships. The methods of natural coordinatization on the given one-parameter family of curves have been developed using the analytical condition of curves family orthogonality. The suggested methods have been tested in obtaining correlations of the famous cylindrical circular coordinate system on the given family of concentric circles. Their possibilities are shown in the construction of a new curvilinear cylindrical coordinate system based on the family of logarithmic curves. The received correlations and the suggested method of the natural coordinate systems construction will be useful in a solution of the mechanical problem of deformation of homogeneous and heterogeneous rods with a curvilinear plain axis of an arbitrary form.

Keywords: curvilinear rod, plain curvilinear axis, curvilinear cylindrical coordinate system, coordinate surface, family of curves.

Вступ. Криволінійні стержні складають досить значну частину конструктивних елементів інженерно-технічних споруд різного призначення. Зазвичай застосування таких елементів призводить до покращення техніко-економічних та естетичних характеристик конструкції і дозволяє використовувати нестандартні інженерні рішення. Однак конструювання криволінійних стержневих елементів значно складніше порівняно із прямими, причиною чому є складність описання їх геометрії, навантаження та закріплення. І якщо для однорідних криволінійних довгих стержнів теорії розрахунку по міцності та жорсткості є у міру розвиненими, наприклад [1-3], то для коротких криволінійних стержнів, і особливо тих, що мають неоднорідну композитну структурну будову, у науковій літературі висвітлені лише окремі розв'язки задач деформування, наприклад [4-6]. Складність розв'язання подібних задач полягає у неможливості застосування елементарних підходів опору матеріалів і необхідності застосування більш точних засобів описання механіки суцільного середовища.

Незалежно від форми криволінійного стержня, його структурної будови та навантаження розв'язання будь-якої задачі пружного деформування теоретично може бути виконане із використанням класичних рівнянь теорії пружності, отриманих у прямокутній просторовій системі координат. Однак у такій системі координат описання геометрії, структурної будови та навантаження криволінійного стержня, навіть у найпростіших випадках (круговий брус, рівномірне навантаження), значно ускладнене. Це викликає необхідність застосування інших типів систем координат, у яких розглядувана задача має більш просте представлення.

Аналіз останніх досліджень. Загальні відомості теорії криволінійних систем координат висвітлені у великій кількості відомої математичної літератури. Застосування окремих типів криволінійних координат при розв'язанні плоских задач теорії пружності наведено у спеціалізованій літературі [6, 7]. Криволінійні системи координат широко застосовуються у ході розв'язання задач деформування оболонок заданої кривизни [8, 9]. Однак загальні підходи до побудови та встановлення основних характеристик криволінійної циліндричної ортогональної системи координат, у якій природним чином моделюється будова криволінійного бруса із плоскою віссю довільної форми залишаються не вивченими.

Цілі і завдання. Розробити підходи до побудови криволінійної циліндричної ортогональної системи координат, природної для геометрії криволінійного бруса із плоскою віссю довільної форми, та встановити основні її характеристики. Отримати основні аналітичні залежності, які дозволяють виконати перетворення скалярних функцій та компонент векторів і тензорів у випадку переходу від прямокутної просторової до природної криволінійної циліндричної системи координат.

Побудова природної системи координат. Розглянемо криволінійний стержень із плоскою віссю (рис. 1), яка є ділянкою плоскої шматково-гладкою кривою g_C і лежить у площині A, яка є головною площиною бруса (площиною симетрії).

Для бруса обрано допоміжну прямокутну просторову систему координат XYZ із початком у точці O та правою системою осей. Головна площина A розглядуваного бруса співпадає із координатною площиною XOZ.

Брус обмежений поздовжніми бічними криволінійними поверхнями Λ_ς $(\varsigma = 1, 2)$ із твірними υ_ς, поздовжніми циліндричними поверхнями Π_ς та торцевими поверхнями T_ς (рис. 1). Криволінійні поверхні Λ_ς симетричні відносно площини A, а циліндричні поверхні Π_ς та T_ς із площиною A ортогональні.

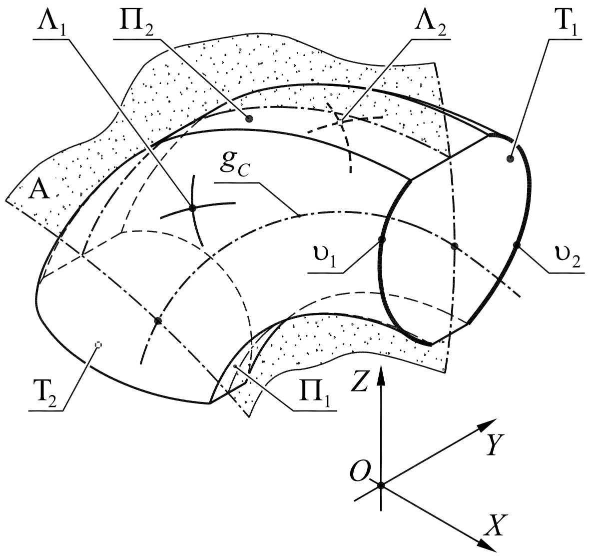

Рис. 1. Схема стержня із криволінійною плоскою віссю

У допоміжній прямокутній системі координат XYZ, функції, які описують структурну будову, форму та навантаження розглядуваного бруса, будуть функціями трьох змінних, що суттєво ускладнює задачу визначення компонентів НДС (напружено-деформованого стану), навіть у випадку криволінійних брусів простих форм і навантаження. Спростити аналітичне описання задачі можна обравши, або побудувавши, відповідну природну, для розглядуваного криволінійного бруса, систему координат. Розкриємо необхідні умови існування такої системи координат для розглядуваного бруса.

Нехай вісь кожного поздовжнього волокна бруса є кусково-гладкою плоскою кривою, що належить площині паралельній XOZ і проектується на неї у криву, яка належить однопараметричному сімейству g_ξ (рис. 2). А довільний поперечний переріз бруса, нормальний до усіх його поздовжніх волокон, має проекцію на площину XOZ у вигляді гладкої кривої, яка належить однопараметричному сімейству кривих f_η.

Вважатимемо, що у загальному випадку ортогональні сімейства кривих g_ξ та f_η аналітично можуть бути представлені системою рівнянь:

$$g_\xi(x, z, \xi) = 0, \qquad f_\eta(x, z, \eta) = 0, \tag{1}$$

де ξ, η – довільні дійсні сталі (параметри).

Довільна точка $K(x, y, z)$ криволінійного бруса належить деякому поздовжньому волокну бруса і поперечному перерізу, тому її проекція $K'(x, z)$ на площину XOZ (рис. 2) лежатиме на перетині деякої кривої сімейства g_ξ і деякої кривої сімейства f_η. Це можливо тільки у випадку коли система рівнянь (1) матиме розв'язок відносно змінних x та z:

$$x = \omega_x(\eta, \xi), \qquad z = \omega_z(\eta, \xi). \tag{2}$$

Тоді для довільної точки K бруса, згідно із (2) можемо записати:

$$K(x, y, z) = K(\omega_x(\eta, \xi), y, \omega_z(\eta, \xi)) = K(\eta, \xi, y). \tag{3}$$

Отже, розташування довільної точки бруса може бути однозначно задане параметрами ξ і η (рис. 2) та відстанню від площини симетрії бруса A (координата y). Тобто можна вважати, що сімейства кривих g_ξ та f_η утворюють криволінійну ортогональну систему координат $\mathrm{H}\Xi$ на площині A, а взаємно ортогональні циліндричні поверхні Π_ξ^g і T_η^f, утворені твірними g_ξ та f_η, відповідно, разом із сімейством площин Υ_y, нормальних до OY, утворюють криволінійну циліндричну систему координат $\mathrm{H}\Xi Y$, яка є природною для розглядуваного бруса. Очевидно, що у такій природній системі координат аналітичне описання будови та форми розглядуваного бруса є найбільш простим.

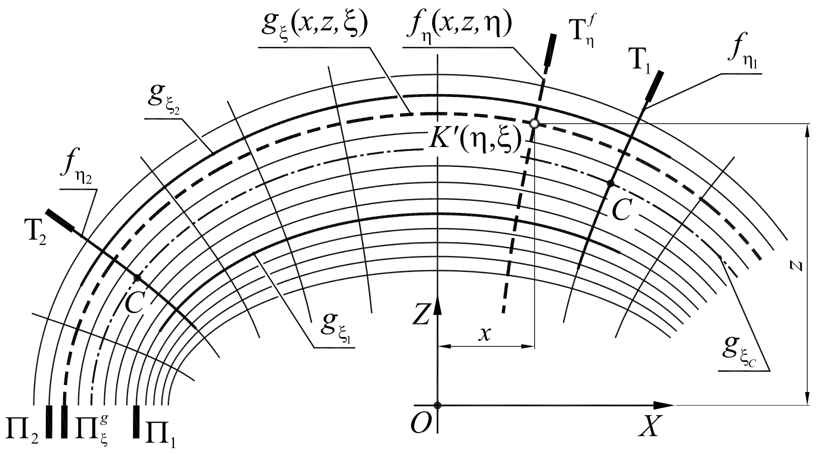

Рис. 2. Сімейства проекцій поздовжніх волокон та поперечних перерізів стержня на головну площину

Розв'язання задач механіки деформування твердих тіл пов'язане із встановленням розподілу векторних (переміщення) та тензорних (напруження, деформації) полів всередині тіла. У більшості випадків цей процес зводиться до визначення компонентів відповідного поля у обраній системі шляхом розв'язання системи диференціальних рівнянь, які пов'язують механічні величини. Такі рівняння найбільш простий вигляд мають у прямокутній просторовій системі координат, однак моделювання будови криволінійного стержня і його навантаження суттєво простіше у природній циліндричній системі $\mathrm{H}\Xi Y$. Тому доцільно встановити залежності для перетворення механічних величин у випадку переходу від системи XYZ до $\mathrm{H}\Xi Y$.

Перетворення механічних величин. Компоненти вектора переміщень, тензорів напружень та деформацій у системі координат XYZ є функціями трьох незалежних змінних: $\varphi = \varphi(x, y, z)$. У природній системі координат $\mathrm{H}\Xi Y$ дані функції згідно з (2) перетворяться у функції параметрів η, ξ, y:

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi\big(\omega_x(\eta,\xi), y, \omega_z(\eta,\xi)\big). \tag{4}$$

Частинні похідні першого порядку від функції (4) по параметрам η, ξ та y запишуться наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_x}\frac{\partial\omega_x}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_z}\frac{\partial\omega_z}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_x}\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_z}\frac{\partial\omega_z}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{5}$$

Якщо Якобіан системи перших двох рівнянь (5) :

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial\omega_x}{\partial\eta}\frac{\partial\omega_z}{\partial\xi} - \frac{\partial\omega_z}{\partial\eta}\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi} \neq 0, \tag{6}$$

то можливий нетривіальний розв'язок системи (5) відносно $\partial\varphi/\partial\omega_x$ і $\partial\varphi/\partial\omega_z$, який дає зв'язок між частинними похідними функцій у прямокутній та криволінійній циліндричній системах координат:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \frac{\partial\omega_z}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\left(-\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{\partial\omega_x}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right). \tag{7}$$

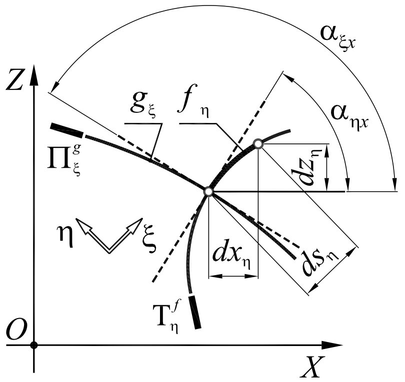

Рис. 3. Сліди координатних поверхонь системи $H\Xi Y$ на площині XOZ

Диференціали незалежних змінних у прямокутній системі XYZ та криволінійній природній $H\Xi Y$ системах координат, згідно із (2), пов'язані такими залежностями:

$$dx = \frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\omega_x}{\partial\eta}d\eta,\; dz = \frac{\partial\omega_z}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial\omega_z}{\partial\eta}d\eta,\; dy = dy. \quad (8)$$

Якщо розглядати приріст координат x і z на окремих координатних кривих сімейств g_ξ та f_η (рис. 3), відповідно, отримаємо:

$$dx_\xi = \frac{\partial\omega_x}{\partial\eta}d\eta,\; dz_\xi = \frac{\partial\omega_z}{\partial\eta}d\eta;\; dx_\eta = \frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}d\xi,\; dz_\eta = \frac{\partial\omega_z}{\partial\xi}d\xi. \quad (9)$$

де dx_ξ, dz_ξ, dx_η, dz_η – прирости координат точки кривої g_ξ на прирості довжини дуги ds_ξ та кривої f_η на ds_ξ у системі XOZ, відповідно.

Співвідношення (9) дозволяють записати вирази для диференціала дуги на довільних кривих сімейств g_ξ та f_η:

$$ds_\xi = L_\xi d\eta, \qquad ds_\eta = L_\eta d\xi, \quad (10)$$

де L_ξ, L_η – коефіцієнти Ламе системи координат $H\Xi Y$:

$$L_\eta = \sqrt{\left(\partial\omega_x/\partial\xi\right)^2 + \left(\partial\omega_z/\partial\xi\right)^2}, \qquad L_\xi = \sqrt{\left(\partial\omega_x/\partial\eta\right)^2 + \left(\partial\omega_z/\partial\eta\right)^2}. \quad (11)$$

Із використанням співвідношень (9) та (10) можна у довільній точці бруса аналітично встановити орієнтацію площадок дотичних до координатних поверхонь Π_ξ^g і T_η^f, природної системи $H\Xi Y$, у прямокутній системі координат XYZ.

Кути $\alpha_{\xi x}$ та $\alpha_{\eta x}$ між площадками, дотичними до циліндричних поверхонь сімейств Π_ξ^g і T_η^f та координатною площиною XOY, у довільній точці бруса можна визначити як кути, які утворюють дотичні до слідів g_ξ і f_η із віссю OX (рис. 3). Тоді, із урахуванням (9):

$$\alpha_{\xi x} = \mathrm{arctg}\left(\frac{dz_\xi}{dx_\xi}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial\eta}\Big/\frac{\partial\omega_x}{\partial\eta}\right), \qquad \alpha_{\eta x} = \mathrm{arctg}\left(\frac{dz_\eta}{dx_\eta}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial\xi}\Big/\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\right). \quad (12)$$

Система координат $H\Xi Y$ є ортогональною, що дозволяє записати рівність:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_{\xi x} = \mathrm{tg}\left(\alpha_{\eta x} + \pi/2\right) = -1/\mathrm{tg}\,\alpha_{\eta x}, \text{ або } \frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\frac{\partial\omega_x}{\partial\eta} + \frac{\partial\omega_z}{\partial\eta}\frac{\partial\omega_z}{\partial\xi} = 0. \quad (13)$$

Аналіз рівняння (13), із урахуванням (12), дозволяє увести характеристики криволінійної системи координат, які можуть спростити запис співвідношень:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\partial\omega_z}{\partial\xi}\Big/\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi} = -\frac{\partial\omega_x}{\partial\eta}\Big/\frac{\partial\omega_z}{\partial\eta} = \kappa, \qquad -\frac{\partial\omega_z}{\partial\xi}\Big/\frac{\partial\omega_x}{\partial\eta} = \frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\Big/\frac{\partial\omega_z}{\partial\eta} = \lambda. \quad (14)$$

Із урахуванням позначень (14) співвідношення (11) можна переписати так:

$$L_\eta = \sqrt{1+\kappa^2}\left|\partial\omega_z/\partial\eta\right|, \qquad L_\xi = \sqrt{1+\kappa^2}\left|\partial\omega_x/\partial\xi\right|. \quad (15)$$

Між коефіцієнтами Ламе, згідно з (15) та (14), має місце залежність:

$$L_\xi / L_\eta = |\lambda|. \quad (16)$$

Окрім коефіцієнтів Ламе (15), які виражають абсолютні значення диференціала дуги у криволінійній системі координат, доцільно також увести характеристики:

$$L_\eta^* = \mathrm{sgn}\left(\partial\omega_z/\partial\eta\right)L_\eta, \qquad L_\xi^* = \mathrm{sgn}\left(\partial\omega_x/\partial\xi\right)L_\xi. \quad (17)$$

Із використанням (17) співвідношення Якобіана (6) набуде наступного вигляду:

$$|\mathbf{J}| = -L_\xi^* L_\eta^*. \quad (18)$$

Співвідношень (4), (7), (17) та (18) достатньо для перетворення скалярних функцій механічних величин, та їх похідних, при переході від системи XYZ до $\mathrm{H\Xi}Y$. Однак цього не достатньо для перетворення компонент векторних і тензорних величин.

На сукупності точок криволінійного стержня розглянемо векторне поле $\mathbf{V}$ із компонентами V_x, V_y, V_z у прямокутній системі координат XYZ та V_η, V_ξ, V_y – у природній циліндричній системі $\mathrm{H\Xi}Y$ (рис. 4). Оскільки система $\mathrm{H\Xi}Y$, як і XYZ, ортогональна, то у довільній точці K зв'язок між компонентами V_x, V_y, V_z та V_η, V_ξ, V_y можна отримати використавши відомі співвідношення для перетворення компонентів вектора при повороті осей системи координат.

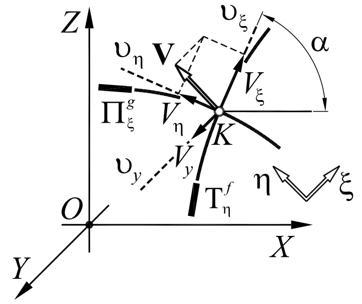

Рис. 4. Компоненти вектора у природній криволінійні системі координат $\mathrm{H\Xi}Y$

Напрямні косинуси нормалей $\upsilon_\eta, \upsilon_\xi, \upsilon_y$ (рис. 4) у системі XYZ запишуться так:

$$l_{\upsilon\eta} = \sin\alpha,\ m_{\upsilon\eta} = 0,\ n_{\upsilon\eta} = \cos\alpha;\ l_{\upsilon\xi} = \cos\alpha,\ m_{\upsilon\xi} = 0,\ n_{\upsilon\xi} = -\sin\alpha;\ l_{\vartheta y} = 0,\ m_{\vartheta y} = 1,\ n_{\vartheta y} = 0. \quad (19)$$

Підставивши (19) до співвідношень для перетворення компонент вектора при повороті осей системи координат, отримаємо такі залежності між компонентами V_x, V_y, V_z та V_η, V_ξ, V_y:

$$V_x = V_\xi \cos\alpha - V_\eta \sin\alpha, \qquad V_y = V_y, \qquad V_z = V_\eta \cos\alpha + V_\xi \sin\alpha, \quad (20)$$

або із урахуванням (12), (14) та (15) :

$$V_x = \operatorname{sgn}\left(\partial\omega_x/\partial\xi\right)\left(V_\xi - \kappa V_\eta\right)\Big/\sqrt{1+\kappa^2}, \qquad V_y = V_y, \qquad V_z = \operatorname{sgn}\left(\partial\omega_x/\partial\xi\right)\left(V_\eta + \kappa V_\xi\right)\Big/\sqrt{1+\kappa^2}. \quad (21)$$

У випадку тензорного поля другого рангу $\mathbf{T}$, визначеного на сукупності точок стержня, залежності між його компонентами в системах координат XYZ та $\mathrm{H\Xi}Y$, аналогічно можуть бути отримані із використання залежностей при повороті осей системи координат.

Компоненти тензора $\mathbf{T}$ у довільній точці стержня в системах координат XYZ та $\mathrm{H\Xi}Y$, відповідно позначені:

$$T_{XYZ} = \begin{Bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{Bmatrix}, \qquad T_{\mathrm{H\Xi}Y} = \begin{Bmatrix} T_{\xi\xi} & T_{\xi y} & T_{\xi\eta} \\ T_{y\xi} & T_{yy} & T_{y\eta} \\ T_{\eta\xi} & T_{\eta y} & T_{\eta\eta} \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Врахувавши (19), а також симетричність тензорів механічних величин (напружень та деформацій) відносно головної діагоналі у ортогональній системі координат, отримані такі варіанти залежностей між компонентами T_{XYZ} та $T_{\mathrm{H\Xi}Y}$:

$$\left.\begin{aligned}
&T_{xx} = T_{\xi\xi}\cos\alpha^2 + T_{\eta\eta}\sin\alpha^2 - T_{\eta\xi}\sin 2\alpha;\\
&T_{yy} = T_{yy};\\
&T_{zz} = T_{\xi\xi}\sin\alpha^2 + T_{\eta\eta}\cos\alpha^2 + T_{\eta\xi}\sin 2\alpha;\\
&T_{xy} = T_{yx} = T_{\xi y}\cos\alpha - T_{y\eta}\sin\alpha;\\
&T_{yz} = T_{zy} = T_{\xi y}\sin\alpha + T_{y\eta}\cos\alpha;\\
&T_{xz} = T_{zx} = \frac{1}{2}\left(T_{\xi\xi} - T_{\eta\eta}\right)\sin 2\alpha + T_{\eta\xi}\cos 2\alpha,
\end{aligned}\right\}
\quad
\left.\begin{aligned}
&T_{xx} = \left(T_{\xi\xi} + \kappa^2 T_{\eta\eta} - 2\kappa T_{\eta\xi}\right)\Big/\left(1+\kappa^2\right);\\
&T_{yy} = T_{yy};\\
&T_{zz} = \left(\kappa^2 T_{\xi\xi} + T_{\eta\eta} + 2\kappa T_{\eta\xi}\right)\Big/\left(1+\kappa^2\right);\\
&T_{xz} = \left(\kappa\left(T_{\xi\xi} - T_{\eta\eta}\right) + \left(1-\kappa^2\right)T_{\eta\xi}\right)\Big/\left(1+\kappa^2\right);\\
&T_{xy} = \operatorname{sgn}\left(\partial\omega_x/\partial\xi\right)\left(T_{\xi y} - \kappa T_{y\eta}\right)\Big/\sqrt{1+\kappa^2};\\
&T_{yz} = \operatorname{sgn}\left(\partial\omega_x/\partial\xi\right)\left(\kappa T_{\xi y} + T_{y\eta}\right)\Big/\sqrt{1+\kappa^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Побудова природної системи по заданому сімейству кривих. Застосування отриманих вище співвідношень при розв'язанні конкретних задач механіки деформування потребує аналітичного представлення взаємно ортогональних сімейств координатних кривих (1). Це не складає проблеми коли будова стержня моделюється у відомій циліндричній системі координат (круговій, еліптичній, параболічній і т.п.). В такому випадку система координат є первинною і будова стержня моделюється відповідно до обраної системи координат. Однак більш цікавою задачею є побудова природної системи координат, яка відповідає заданій будові стержня, і її можна вирішити за допомогою рівності (13).

Залежність (13) можна розглядати як необхідну умову ортогональності сімейств кривих g_ξ та f_η і використати її для побудови довільної криволінійної системи координат.

Припустимо, що однопараметричне сімейство кривих g_ξ задане аналітично рівнянням:

$$g_\xi = \psi(x,\xi) - z = 0\text{, або } \omega_z = \psi(x,\xi). \tag{24}$$

Підставивши (24) до рівності (13) після перетворень отримаємо:

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\left(1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)=0. \tag{25}$$

Очевидно, що $\partial\omega_x/\partial\eta \neq 0$, оскільки в протилежному випадку $\omega_x = \omega_x(\xi)$ і шукане сімейство кривих f_η не перетинається із заданим g_ξ. Тоді, із урахуванням (2) :

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\left(1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{x=\omega_x}\right)^2\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)|_{x=\omega_x}=0. \tag{26}$$

Розв’язання диференціального рівняння (26) дозволяє отримати функцію:

$$\omega_x = \omega_x\left(\xi, F(\eta)\right), \tag{27}$$

де $F(\eta)$ – невідома функція інтегрування.

Функція інтегрування $F(\eta) \neq \text{const}$, оскільки тоді $\partial\omega_x/\partial\eta = 0$, однак загалом вона може бути обрана довільно, що дозволяє отримати різні форми запису розв’язку (27).

Підставивши (27) до (24) із урахуванням (2), отримаємо функцію ω_z незалежну від координати x:

$$\omega_z = \psi|_{x=\omega_x}. \tag{28}$$

Співвідношення (27) та (28) дають аналітичний опис природної системи координат $\mathrm{H}\Xi Y$, побудованої по заданому сімейству кривих (24), який дозволяє встановити всі необхідні для її застосування характеристики.

У ході застосування співвідношень (26)-(28) необхідно враховувати, що на вихідне сімейство кривих накладаються умови диференційованості та відсутності самоперетинів, принаймні на розглядуваній ділянці координатної площини.

Приклади побудови природної системи координат. Покажемо застосування запропонованого підходу, використавши відомий випадок кругового стержня, у якого проекції поздовжніх волокон на головну площину складають сімейство кіл із центром у початку прямокутної системи координат XOZ: $g_\xi = x^2 + z^2 - \xi^2 = 0$. Тоді згідно з (24) :

$$\psi(x,\xi) = \pm\sqrt{\xi^2 - x^2}. \tag{29}$$

Підставивши (29) до (26) отримаємо рівняння: $\partial\omega_x/\partial\xi - \omega_x/\xi = 0$, розв’язок якого можна представити у вигляді:

$$\omega_x = \xi\cos\eta. \tag{30}$$

Підставивши (30) до вихідного рівняння (29), отримаємо:

$$\omega_z = \psi(x,\xi)|_{x=\omega_x} = \pm\xi\left|\sin\eta\right| = \xi\sin\eta. \tag{31}$$

Співвідношення (30) та (31) дають відомі залежності циліндричної кругової системи координат, що опосередковано підтверджує правильність розробленого підходу.

Тепер розглянемо нетиповий випадок, коли поздовжні волокна бруса складають однопараметричне сімейство логарифмічних кривих, задане рівнянням:

$$g_\xi = \ln(x) + \xi - z. \tag{32}$$

Підставивши (32) до рівняння (26) отримаємо:

$$\partial\omega_x/\partial\xi + \omega_x/\left(\omega_x^2 + 1\right) = 0\,. \tag{33}$$

Розв’язок рівняння (33) отримано у вигляді:

$$\omega_x = e^{-\frac{1}{2}W\left(\frac{1}{e^{2(\xi-\eta)}}\right)-\xi+\eta}\,. \tag{34}$$

де $W(\ \ )$ – W-функція Ламберта.

Підставивши (34) до рівняння вихідного сімейства кривих (32), отримаємо:

$$\omega_z = \ln\left(\sqrt{W\left(e^{-2\xi+2\eta}\right)}\right) + \xi\,. \tag{35}$$

Розв’язавши систему рівнянь (34) та (35) відносно параметрів η і ξ матимемо наступні співвідношення:

$$g_\xi = \ln(x) + \xi - z = 0\,, \qquad f_\eta = \eta - x^2/2 - z = 0\,. \tag{36}$$

Ортогональні сімейства кривих (36) є твірними для криволінійної логарифмічної системи координат.

Аналогічно можуть бути отримані інші однопараметричні ортогональні сімейства кривих і побудовані на їх основі природні системи координат.

Висновки. У даній роботі, для моделювання будови криволінійних стержнів із плоскою віссю у ході розв’язання задач механіки їх деформування, запропоновано використання криволінійної циліндричної системи координат, яка є природною геометричній будові стержня. У загальному вигляді дано теоретичне обґрунтування існування природної системи координат, досліджені її основні властивості, а також отримані співвідношення, для перетворення скалярних функцій та компонент векторних і тензорних величин у випадку заміни прямокутної просторової системи координат на природну криволінійну циліндричну. Запропоновано методику побудови природної системи координат по заданому сімейству кривих, застосування якої продемонстровано на прикладі побудови циліндричної кругової та циліндричної логарифмічної систем координат. Отримані співвідношення та запропонований метод побудови природної циліндричної системи координат будуть корисні при розв’язанні задач механіки деформування однорідних та неоднорідних стержнів із криволінійною плоскою віссю довільної форми.

Література

1. Светлицкий В.А. Механика стержней. В 2-х ч. Часть 1. Статика / В.А. Светлицкий. – М.: «Высшая школа», 1987. – 320 с.
2. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней / Е.П. Попов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 296 с.
3. Левин В.Е. Механика деформирования криволинейных стержней: монография / В.Е. Левин, Н.В. Пустовой. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. – 208 с.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
5. Tolf G. Stresses in a Cerved Laminated Beam / G. Tolf // Fiber Science and Technology. – 1983. – Vol.19, No.4. – P.243-267.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
7. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер; перевод с английского М.И. Рейтмана; под ред. Г.С. Шпиро. – М.: «Наука», 1979. – 560 с.
8. Шваб’юк В.І. Лінійне деформування, міцність стійкість композитних оболонок середньої товщини: монографія / В.І. Шваб’юк, С.В. Ротко. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2015. – 264 с.
9. Григолюк Э.И. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов // Итоги науки и техники. – М.: Наука, 1972. – Т.5. – 271 с.

Стаття надійшла 28.09.2017