УДК 531.383

ДИНАМИКА ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИХ К ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ

Козаченко Т.А., к.ф.-м.н., доцент,
Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
kushpil.t.a@gmail.com

Аннотация. Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа. Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы уравнений движения твердого тела. Для анализа нелинейной системы уравнений движения применяется метод усреднения. Система уравнений движения твердого тела приводится к виду, допускающему усреднение по фазе угла нутации. Получена усредненная система уравнений первого приближения для медленных переменных. Рассмотрена механическая модель возмущений, отвечающая движению тела в среде с линейной диссипацией.

Ключевые слова: возмущенное движение, случай Лагранжа, метод усреднения, момент.

ДИНАМІКА ОБЕРТАНЬ ТВЕРДОГО ТІЛА, БЛИЗЬКИХ ДО ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЇ ПРЕЦЕСІЇ

Козаченко Т.О., к.ф.-м.н., доцент,
Одеська державна академія будівництва та архітектури,
kushpil.t.a@gmail.com

Анотація. Досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, які близькі до псевдорегулярної прецесії у випадку Лагранжа. Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки розв’язків системи рівнянь руху твердого тіла. Для аналізу нелінійної системи рівнянь руху застосовується метод усереднення. Система рівнянь руху твердого тіла приводиться до вигляду, який допускає усереднення по фазі кута нутації. Здобута усереднена система рівнянь в першому наближенні для повільних змінних. Розглянуто механічну модель, що відповідає руху тіла в середовищі з лінійною дисипацією.

Ключові слова: збурений рух, випадок Лагранжа, метод усереднення, момент.

DYNAMICS OF ROTATIONS OF A RIGID BODY SIMILAR TO PSEUDOREGULAR PRECESSION

Kozachenko T.A. Ph.D. (Physics and Maths), Associate Professor,
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
kushpil.t.a@gmail.com

Abstract. The problem of evolution of the rigid body rotations about a fixed point continues to attract attention of researchers. In the aspect of applications, the analysis of rotational motions of the bodies about a fixed point is important for solving the problems of astronautics, the problems of the entry of flying vehicles into the atmosphere, the motion of rotating projectile and gyroscopy. This problem also has an independent theoretical interest as a section of classical dynamics.

In this paper the motion of a dynamically symmetric heavy rigid body about a fixed point O under the action of perturbation torques of an arbitrary nature is investigated. The aim is to investigate the behavior of the solution of the system motion equation for nonzero values of the small parameter on a sufficiently long time interval $t \sim \varepsilon^{-1}$. The averaging method is used for solving the problem. The system of equations of motion of a rigid body is reduced to a form that allows averaging over the phase of the nutation angle. The averaged system of equations of motion for slow variables is obtained. The system of equations of motion of a rigid body is reduced to a form that allows averaging over the phase of the nutation angle. An actual mechanical model of perturbations, corresponding to the body's motion in a medium with linear dissipation, is considered.

Keywords: perturbed motion, Lagrange case, averaging method, torque.

Введение. Задача о возмущенном движении твердого тела относительно неподвижной точки является одной из самых знаменитых проблем механики. Интерес к ней определяется ее практическим значением для прикладной теории гироскопов, входа летательных аппаратов в атмосферу. Эта проблема имеет также и самостоятельный теоретический интерес как раздел классической динамики.

Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, рассматривались в ряде работ, например [1-6]. В [1] дается обзор результатов, полученных до 1998 года, по проблеме эволюции вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа. В [2-4] приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений в первом приближении для возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Лагранжа. Изучаются возмущенные вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, при различных порядках малости проекций вектора кинетического момента.

В статье [6] с помощью метода усреднения рассматриваются возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии. В качестве порождающего решения берутся выражения, полученные в [7] для псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа. Движения тела в случае Лагранжа, соответствующие псевдорегулярной прецессии, приближенно исследуются в ряде работ [7, 8].

Постановка задачи. Исследуется возмущенное движение относительно неподвижной точки О динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. Уравнения движения (динамические и кинематические уравнения Эйлера) имеют вид [2, 4]:

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + (C-A)\,qr = \mu\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1, \\ &A\dot{q} + (A-C)\,pr = -\mu\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2, \\ &C\dot{r} = \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p,\, q,\, r,\, \psi,\, \theta,\, \varphi), \quad i = 1,2,3, \\ &\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \\ &\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $p,\, q,\, r$ – проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции тела, $\varepsilon M_i,\ i = 1,2,3$ – проекции вектора возмущающих моментов на те же оси; $\psi,\, \theta,\, \varphi$ – углы Эйлера; ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений, μ – величина восстанавливающего момента. В случае тяжелого волчка имеем $\mu = mgl$, m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тел; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O, $A \neq C$.

Ставится задача исследования поведения решения системы (1) при значениях ε, отличных от нуля, на достаточно большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$ с помощью метода усреднения [9].

Результаты исследований. Для решения поставленной задачи применяется методика, разработанная в [2, 4]. Данная методика используется для усреднения системы (1) при возмущениях, допускающих усреднение по фазе угла нутации θ, вдоль траекторий изменения $\theta(t)$.

Приведём уравнения возмущающего движения (1) к виду, допускающему применение метода усреднения [9]. Выделим быстрые и медленные переменные. Медленными переменными будут первые интегралы [4, 10] системы (1) при $\varepsilon = 0$:

$$G_z = A\sin\theta\left(p\sin\varphi + q\cos\varphi\right) + Cr\cos\theta = c_1,$$
$$H = \frac{1}{2}\left[A\left(p^2+q^2\right)+Cr^2\right] + \mu\cos\theta = c_2, \quad r = c_3. \tag{2}$$

Здесь G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz, H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, c_i, $i = 1,2,3$ – произвольные постоянные, $c_2 \geq -\mu$.

Соотношения между корнями кубического многочлена:

$$Q(u) = A^{-2}[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1-u^2)A - (G_z - Cru)^2] \tag{3}$$

и первыми интегралами (2) записываются следующим образом [4, 10]:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2r^2}{2A\mu},$$
$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = \frac{G_zCr}{A\mu} - 1, \tag{4}$$
$$u_1u_2u_3 = -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu}.$$

Предполагается, что:

$$p^2 + q^2 << r^2, \quad Cr^2 >> \mu, \tag{5}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии. Корни u_1, u_2 кубического многочлена (3) не равны между собой, но мало отличаются друг от друга. В этом случае тело совершает псевдорегулярную прецессию, т. е. движение, близкое к регулярной прецессии.

Как показано в [4], при выполнении второго условия (5) вводится безразмерный малый параметр:

$$\varepsilon = r^{-1}\sqrt{\mu/C} << 1. \tag{6}$$

Если тело совершает быстрое вращение вокруг оси симметрии, то потенциальная энергия тела мала по сравнению с его кинетической энергией, и в первом приближении имеем:

$$G_z \approx Cr, \; H \approx T \approx \frac{1}{2}Cr^2. \tag{7}$$

Тогда для r и G_z, H согласно (6), (7) справедливы разложения:

$$r = \varepsilon^{-1}\sqrt{\mu/C},$$
$$G_z = \varepsilon^{-1}\sqrt{\mu C}\left(1 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2^2 + \cdots\right), \tag{8}$$
$$H = \varepsilon^{-2}\frac{\mu}{2}\left(1 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2^2 + \cdots\right).$$

Здесь g_i и h_i – некоторые постоянные.

В [4] корни кубического многочлена $Q(u)$ (3) с точностью до членов высшего порядка малости определены в виде:

$$u_1 = 1 - \varepsilon x_0 - \varepsilon\Delta, \quad u_2 = 1 - \varepsilon x_0 + \varepsilon\Delta, \quad u_3 = \varepsilon^{-2}\chi,$$

$$\chi = \frac{C}{2A} \le 1, \quad x_0 = \frac{h_1 - 2\chi g_1}{2\chi}, \quad \Delta = \frac{\sqrt{h_1\left(h_1 - 4\chi g_1\right)}}{2\chi}.$$

После ряда преобразований находим u_1, u_2, u_3:

$$u_1 = \frac{A}{C} + \frac{G_z}{\sqrt{\mu C}}\varepsilon - \varepsilon\Delta, \quad u_2 = \frac{A}{C} + \frac{G_z}{\sqrt{\mu C}}\varepsilon + \varepsilon\Delta, \quad u_3 = \frac{C^2 r^2}{2A\mu}. \tag{9}$$

Известно [4, 10] выражение для угла нутации θ в невозмущённом движении как функции времени t, корней кубического многочлена u_1, u_2, u_3 и произвольной фазовой постоянной β:

$$\begin{aligned} &u = \cos\theta = u_1 + (u_2 - u_1)\,\mathrm{sn}^2\left(\alpha t + \beta\right), \\ &\alpha = \left(mgl\left(u_3 - u_1\right)/\left(2A\right)\right)^{1/2}, \\ &k^2 = \left(u_2 - u_1\right)\left(u_3 - u_1\right)^{-1}, \quad 0 \le k^2 \le 1. \end{aligned} \tag{10}$$

В случае псевдорегулярной прецессии $u_1 \approx u_2$, следовательно, можно считать $k^2 \approx 0$, тогда $\mathrm{sn}^2\left(\alpha t + \beta\right) = \sin^2\left(\alpha t + \beta\right)$.

Так как $u_1 << u_3$, то $\alpha = Cr/2A$. После ряда преобразований получим:

$$\cos\theta = u = \frac{A}{C} + \varepsilon\frac{G_z}{\sqrt{\mu C}} - \varepsilon\Delta\cos 2\left(\alpha t + \beta\right). \tag{11}$$

В случае псевдорегулярной прецессии угол прецессии ψ является медленной переменной [10], быстрыми переменными являются углы собственного вращения φ и нутации θ.

Первые три уравнения (1) приведем с помощью ряда преобразований к виду [2, 4]:

$$\begin{gathered} \dot{G}_z = \varepsilon F_1\left(G_z, H, r, \theta\right), \quad \dot{H} = \varepsilon F_2\left(G_z, H, r, \theta\right), \\ \dot{r} = \varepsilon F_3\left(G_z, H, r, \theta\right), \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} &F_1 = \left(M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi\right)\sin\theta + M_3\cos\theta, \\ &F_2 = M_1 p + M_2 q + M_3 r, \\ &F_3 = C^{-1}M_3, \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь переменные p, q, r при помощи (2) выражены как функции $G_z,\ H,\ r,\ \psi, \theta, \varphi$.

Для применения метода усреднения потребуем, чтобы правые части уравнений (12) зависели лишь от одной быстрой переменной – угла нутации θ. Для выполнения этого достаточно, чтобы путем тождественных преобразований комбинации:

$$M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi, \quad M_1 p + M_2 q, \quad M_3,$$

входящие в правые части равенств (13), могли быть представлены как функции от медленных переменных G_z, H, r, угла нутации θ и были периодическими по фазе θ с периодом $2\pi/\alpha$, а также удовлетворяли условиям:

$$\begin{aligned} &M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad f = f(G_z, H, r, \theta), \\ &M_3 = M_3\left(G_z, H, r, \theta\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, правые части уравнений (12) F_1, F_2, F_3 будут 2π-периодическими функциями θ.

Усредняя правые части полученной системы по фазе угла нутации θ (по t), получим с учетом (4), (5), (9), (11) усреднённую систему первого приближения:

$$\dot{G}_z = \varepsilon V_1\left(G_z, H, r\right), \quad \dot{H} = \varepsilon V_2\left(G_z, H, r\right),$$
$$\dot{r} = \varepsilon V_3\left(G_z, H, r\right), \quad i = 1,2,3, \tag{15}$$
$$V_i\left(G_z, H, r\right) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} F_i\left(G_z, H, r, \theta(t)\right)dt.$$

Погрешность усреднённого решения для медленных переменных составляет величину порядка ε на интервале времени ε^{-1}.

Исследуем возмущенное движение, близкое к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа, с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Считаем, что возмущающие моменты M_i $(i = 1,2,3)$ имеют вид [11]:

$$M_1 = -ap, \quad M_2 = -aq, \quad M_3 = -br, \quad a, b > 0, \tag{16}$$

где a, b – некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела. Моменты (16) удовлетворяют достаточным условиям (14) возможности усреднения только по фазе угла нутации θ. Система (15) для моментов указанного вида записывается следующим образом:

$$\dot{G}_z = -\varepsilon\left[a\left(p\sin\varphi + q\cos\varphi\right)\sin\theta + b\,r\cos\theta\right],$$
$$\dot{H} = -\varepsilon\left[a\left(p^2 + q^2\right) + b\,r^2\right], \tag{17}$$
$$\dot{r} = -\varepsilon C^{-1} b\,r.$$

Проинтегрировав третье уравнение (17), получим (r_0 – произвольное начальное значение осевой скорости вращения, $\tau = \varepsilon t$ – медленное время):

$$r = r_0\exp\left(-bC^{-1}\tau\right). \tag{18}$$

В первых двух уравнениях (17) выполним усреднение согласно (15), подставляя вместо r его выражение (18). После ряда преобразований усредненная система первого приближения принимает вид (штрихом обозначено дифференцирование по τ):

$$G_z' = \left[-\frac{b}{\sqrt{C\mu}}G_z + (a - bAC^{-1})\right]r_0\exp\left(-bC^{-1}\tau\right),$$
$$H' = -2aA^{-1}H + 2a\mu C^{-1} + \left(aCA^{-1} - b\right)r_0^2\exp\left(-2bC^{-1}\tau\right). \tag{19}$$

Усредненная система (19) проинтегрирована численно при определенных начальных значениях и параметрах задачи $\mu = 0.5$, $a = 0.125$, $b = 0.1$, $A = 1.5$, $C = 1$. Предполагается, что в начальный момент времени тело получило угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную $r_0 = \sqrt{3}$. В результате численного решения проекция вектора кинетического момента G_z монотонно убывает к нулю.

Также получено решение в аналитическом виде уравнения для полной энергии тела (H_0 – произвольное начальное значение полной энергии тела):

$$H = AC^{-1}\mu + \frac{Cr_0^2}{2}\exp\left(-2bC^{-1}\tau\right) + \left(H_0 - AC^{-1}\mu - \frac{Cr_0^2}{2}\right)\exp\left(-2aA^{-1}\tau\right). \tag{20}$$

Полная энергия H монотонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H = \mu AC^{-1}$. Модуль осевой скорости вращения r монотонно уменьшается по экспоненте, согласно (18).

Выводы. В работе проведена процедура усреднения уравнений для медленных переменных. Полученная усредненная система уравнений первого приближения значительно проще исходной, так как автономна, имеет меньший порядок (3 вместо 6), и не содержит быстрых осцилляций.

В качестве примера рассмотрено возмущенное движение, близкое к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа, с учетом линейно-диссипативных моментов сил. Получены изменения полной энергии тела, проекции вектора кинетического момента тела на вертикаль и осевой скорости вращения.

Литература

1. Лещенко Д.Д. Эволюция вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа / Д.Д. Лещенко // Российско-американский журнал «Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент». – 1998. – Вып.2.(6). – С. 32–37.

2. Акуленко Л.Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т.43, № 5. – С. 771–778.

3. Акуленко Л.Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №5. – С. 3–10.

4. Черноусько Ф.Л. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко. – М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2015. – 308 с.

5. Sidorenko V.V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium / V.V. Sidorenko // J. Nonlinear Sci. – 1994. – vol.4. – P. 35–57.

6. Акуленко Л.Д. Эволюция вращений волчка Лагранжа, близких к псевдорегулярной прецессии / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Т.А. Козаченко // Вісник Запорізького нац. університету. Фіз.-мат. науки. – 2015. – №2. – С. 10–19.

7. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение / Курт Магнус. – М.: Мир, 1974. – 526с.

8. Архангельский Ю. А. Динамика быстровращающегося твердого тела / Ю.А. Архангельский. – М.: Наука, 1985. – 192с.

9. Волосов В.М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В.М. Волосов, Б.И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ, 1971 – 507с.

10. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Гавриил Константинович Суслов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 655с.

11. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / В.Н. Кошляков. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

Стаття надійшла 16.10.2017