

**РОЗРАХУНОК ЄМНОСТЕЙ З ПЛОСКИМ ДНИЩЕМ,  
ЯК ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ**

**Махінько Н.О.**, к.т.н.,  
*Національний авіаційний університет*  
pasargada1985@gmail.com

**Анотація.** Стаття присвячена проблемі визначення внутрішніх зусиль в елементах сталевих циліндричних силосних ємностей для зберігання зерна при осесиметричному навантаженні. Запропоновані зручні формульні процедури для обчислення поздовжніх зусиль, для ємностей різного видовження, та вертикального тиску на стінки, для різних висотних рівнів. Також запропонований спрощений підхід щодо оцінки згинального моменту в вертикальних ребрах силосної конструкції, шляхом застосування умовного ексцентриситету, який визначає положення центру ваги приведенного поперечного перерізу вертикального ребра жорсткості. При цьому діє припущення, що всі вертикальні навантаження сприймаються виключно ребром, а корпус ємності є елементом передавання та розподілу цих навантажень.

**Ключові слова:** сталева циліндрична ємність, ребра жорсткості, кільцеві напруження, поздовжні зусилля, згинальні моменти.

**РАСЧЕТ ЕМКОСТЕЙ С ПЛОСКИМ ДНИЩЕМ,  
КАК ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ СМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ**

**Махінько Н.А.**, к.т.н.,  
*Национальный авиационный университет*  
pasargada1985@gmail.com

**Аннотация.** Статья посвящена проблеме определения внутренних усилий в элементах стальных цилиндрических силосных емкостей для хранения зерна при осесимметричном нагружении. Предложенные удобные формульные процедуры для вычисления продольных усилий, для емкостей различного удлинения, и вертикального давления на стенки, для различных высотных уровней. Также предложен упрощенный подход к оценке изгибающего момента в вертикальных ребрах силосной конструкции, путем применения условного эксцентриситета, который определяет положение центра тяжести приведенного поперечного сечения вертикального ребра жесткости. При этом действует предположение, что все вертикальные нагрузки воспринимаются исключительно ребром, а корпус емкости является элементом передачи и распределения этих нагрузок.

**Ключевые слова:** стальная цилиндрическая емкость, ребра жесткости, кольцевые напряжения, продольные усилия, изгибающие моменты.

**CALCULATION OF FLAT BOTTOM TANKS,  
AS SHELLS OF ROTATING RIGIDITY ROTATION**

**Makhinko N.O.**, PhD.,  
*National Aviation University*  
pasargada1985@gmail.com

**Abstract.** This article includes actions for definition internal forces and moments of thin-

walled circular silo for the storage of particulate solids. Wall sheeting of tower silo loaded symmetrical loads. It is assumed, that normal stress are only in vertical stiffeners. Vertical walled segment of tower silo is an element of loads transfer and distribution loads. It is given base expressions for the calculation longitudinal forces in ribs. Various geometry parameters were used for silo - height of vertical-walled segment, diameter and others.

A simplified equation for value of horizontal pressure is also given. In determining longitudinal forces in ribs and horizontal pressure, the functions  $\psi_{y,1}(y)$  and  $\psi_{y,2}(y)$  may be useful. Numerical results functions are presented for different ratios of levels  $z$  (from the level depth below the highest solid-wall contact) and height of silo. For bending moments in stiffeners simplification method may be used. It is based on use reference eccentricity that determines of position cross-section centroid of vertical ribs silo. Increase stiffness of vertical ribs reduces notional eccentricity and bending moments. And vice versa, increase silo wall thickness leads to a higher value bending moments.

**Keywords:** steel cylindrical container, stiff edges, ring annular, longitudinal forces, bending moments.

**Вступ.** Сталеві силосні ємності являються основними спорудами для зберігання зерна та продуктів його переробки. Зростаючі аграрні потужності нашої країни актуалізують питання використання даних конструкцій, та, зокрема, їх розрахунку з врахуванням регіональних потреб та індивідуальних особливостей. Недосконалість вітчизняної нормативної бази та застарілі розрахункові моделі ускладнюють даний процес, збільшуючи вартість і час проектування.

**Аналіз останніх джерел досліджень і публікацій.** Розрахунок сталевих ємностей для зберігання зерна відображений у працях багатьох вітчизняних та зарубіжних спеціалістів [1–5]. Варто відмітити і класичні роботи науковців, присвячені розрахунку тонкостінних оболонок обертання, котрі також актуалізовані в колі окреслених питань [6–7].

**Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми.** Аналіз напружено-деформованого стану сталевих циліндричних силосів являється складною інженерною задачею, що потребує значних наукових зусиль та знань, і базується на використанні спеціальних програмних комплексів та ускладненого математичного апарату для обчислень. Знижуючи точність обчислень, шляхом нехтування рядом другорядних факторів, можна досягти розумного компромісу та уникнути значних ускладнень, не втрачаючи інженерної користі при розрахунку конструкції.

**Постановка завдання.** Найбільш точним методом для визначення повного спектру внутрішніх зусиль та переміщень являється метод кінцевих елементів, який рекомендовано застосовувати в практичних розрахунках. Проте досить часто корисно використовувати більш прості – “ручні” формули розрахунку, які дозволяють не лише швидко оцінити деяке проектне рішення, але і сформулювати умови суміжних завдань, слабо залежних від неточностей формул. Для прикладу можна привести задачі обчислення мінімальної ваги або максимальної надійності. Тому досить цікаво та корисно надати аналітичну оцінку найбільш значним внутрішнім факторам ємностей під дією зовнішнього осесиметричного навантаження.

**Основний матеріал і результати.** Розглянемо листи корпусу сталеві вертикальної циліндричної ємності. Будемо вважати, що листи сприймають лише навантаження від осесиметричного тиску, а зерна не сприймають вертикальних навантажень. За такого обмеження меридіональне напруження  $\sigma_{p,z}$  на деякому рівні  $z$  від верху засипки можна привіряти до нуля, а для кільцевих напружень скористатися формулою:

$$\sigma_h(x) = 2w(x)E / D_w, \quad (1)$$

де  $w(x)$  – функція переміщення корпусу оболонки;  $E$  – модуль пружності матеріалу;  $D_w$  – діаметр оболонки.

Для досить віддалених від основи рівнях формула (1) набуває вигляду:

$$\sigma_{h,z} = 0,5 p_{h,z} D_w k_h / t_{w,z}, \quad (2)$$

де  $p_{h,z}$  – діючий на рівні  $z$  тиск на стінку товщиною  $t_{w,z}$ ;  $k_h$  – коефіцієнт, що враховує ослаблення поперечного перерізу листа отворами діаметром  $d_h$  в кількості  $n_h$  на 1 м.п. висоти:

$$k_h = 1 / (1 - n_h d_h). \quad (3)$$

Відповідно розтягуюче зусилля на 1 м.п. висоти ємності можливо виразити у вигляді:

$$N_{h,z} = 0,5 p_{h,z} D_w k_h. \quad (4)$$

Тиск від тертя сипучого матеріалу об листи корпусу ємності передається на вертикальні ребра жорсткості, що працюють на стиск зі згином та представляють собою позacentрово стиснутий стрижень відносно осі  $X_0$  (рис. 1), підкріплений в площині втрати стійкості пружною основою скінченої жорсткості.

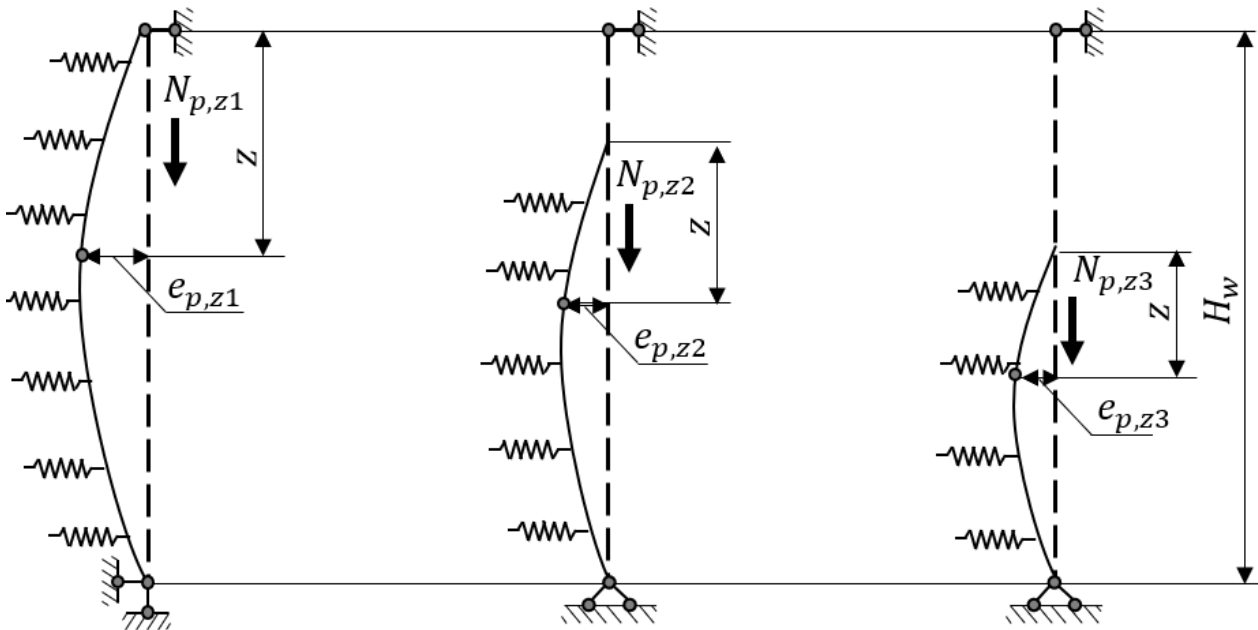


Рис. 1. Розрахункова схема вертикального ребра жорсткості, як стиснуто-зігнутого криволінійного стрижня на суцільній пружній основі змінної жорсткості

Роль пружної основи в даному випадку відіграє стінка ємності, яка одночасно вигинає ребро зі своєї площини та перешкоджає (за рахунок сумісності деформацій в містах кріплення листів корпусу) надзвичайно великим радіальним прогинам. Поздовжнє зусилля  $N_{p,z}$ , на рівні  $z$  від верху засипки можливо виразити у вигляді:

$$N_{p,z} = N_m + \frac{\pi D_w}{n_p} p_{f,z} = N_m + \frac{\pi D_w}{n_p} f_g \int_0^z p_{h,z} dz, \quad (5)$$

де  $N_m$  – зусилля в ребрі від власної ваги покрівлі  $g_m$  (враховуючи навантаження від технологічного обладнання) та снігового навантаження  $S_m$  на її поверхні;  $n_p$  – кількість вертикальних ребер;  $p_{f,z}$  – тиск від тертя сипучого матеріалу об листи корпусу ємності;  $f_g$  – коефіцієнт тертя (сипучого матеріалу об сипучий матеріал).

Підставимо в підінтегральний вираз формулу для тиску сипучого матеріалу  $p_{f,z}$  [8] та виконаємо елементарні спрощення:

$$N_{p,z} = N_0 + \gamma_g \rho_s \frac{\pi D_w}{n_p} \left\{ z + \frac{\rho_s}{\lambda_0 f_g} \left[ \exp \left( -\lambda_0 f_g \frac{z}{\rho_s} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (6)$$

де  $\rho_s$  – гідравлічний радіус поперечного перерізу ємності.

Якщо врахувати, що вантажна площа для кожного ребра жорсткості від навантажень  $g_m$  і  $S_m$  рівна  $\pi R_w^2 / n_p$ , то формула (6) запишеться в дещо іншому вигляді:

$$N_{p,z} = \frac{\pi D_w^2}{4n_p} [g_m + S_m + \gamma_g H_w \psi_{y,1}(y)], \quad (7)$$

$$\psi_{y,1} = y \left( 1 - \left( 1 - e^{-\Delta_y} \right) / \Delta_y \right), \quad (8)$$

де  $\Delta_y = 4\Delta_w \lambda_0 f_g y$  – безрозмірний параметр, що визначається безрозмірною висотою  $y = \frac{z}{H_w}$ , котра має область значень  $0 \leq y \leq 1$ ; якщо проаналізувати значення коефіцієнту

бокового тиску  $\lambda_0$  та коефіцієнту тертя  $f_g$ , то можна побачити, що значення їх добутку  $\lambda_0 f_g$  знаходяться в доволі вузькому інтервалі від 0,18 до 0,19; це дозволяє прийняти уніфіковане значення  $\lambda_0 f_g \approx 0,2$  та суттєво спростити вираз для  $\Delta_y$ :  $\Delta_y \approx 0,8\Delta_w y$ .

В таблиці 1 містяться обчислені значення функції  $\psi_{y,1}$  для різних безрозмірних висотних рівнів ємностей різного видовження.

Таблиця 1 – Значення функції  $\psi_{y,1}(y)$  для ємностей різного видовження

y	$\Delta_w$											
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
0,1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01
0,2	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
0,3	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05
0,4	0,03	0,04	0,04	0,05	0,05	0,06	0,06	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09
0,5	0,05	0,06	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,10	0,11	0,12	0,12	0,13
0,6	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18
0,7	0,09	0,11	0,12	0,14	0,15	0,16	0,18	0,19	0,20	0,21	0,23	0,24
0,8	0,12	0,14	0,16	0,17	0,19	0,21	0,23	0,24	0,26	0,27	0,29	0,30
0,9	0,14	0,17	0,19	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,33	0,35	0,37
1,0	0,18	0,21	0,23	0,26	0,29	0,31	0,33	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44
y	$\Delta_w$											
	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
0,1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,2	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04
0,3	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08
0,4	0,09	0,10	0,10	0,10	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13	0,14
0,5	0,14	0,14	0,15	0,16	0,16	0,17	0,17	0,18	0,18	0,19	0,19	0,20
0,6	0,19	0,20	0,21	0,21	0,22	0,23	0,24	0,24	0,25	0,26	0,26	0,27
0,7	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,32	0,33	0,34	0,35
0,8	0,31	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39	0,40	0,41	0,42	0,43
0,9	0,38	0,40	0,41	0,42	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51
1,0	0,45	0,47	0,49	0,50	0,52	0,53	0,54	0,56	0,57	0,58	0,59	0,60

При розкладанні експоненти в степеневий ряд та утриманні перших п'яти членів отримаємо зручний вираз для практичного використання:

$$N_{p,z} = \frac{\pi D_w^2}{4n_p} \left[ g_m + S_m + \gamma_g H_w y \frac{\Delta_y}{2} \left( 1 - \frac{\Delta_y}{3} + \frac{\Delta_y^2}{12} \right) \right]. \quad (9)$$

В прийнятих позначеннях можливо переписати формулу для тиску  $p_{h,z}$  сипучого матеріалу на безрозмірному рівні  $y$  в більш зручному вигляді:

$$p_{h,z} = 0,2\gamma_g D_w \psi_{y,2}(y) / f_g, \quad (10)$$

$$\psi_{y,2}(y) = 1,25 \left( 1 - e^{-\Delta_y} \right), \quad (11)$$

де значення функції  $\psi_{y,2}(y)$  наведені в таблиці 2.

Неважко встановити, що функції  $\psi_{y,1}$  і  $\psi_{y,2}$  пов'язані співвідношенням:

$$\psi_{y,1}(y) = y - \psi_{y,2}(y) / \Delta_w, \quad (12)$$

а вертикальний тиск  $p_{f,z}$  на стінки ємності на рівні  $y$  від тертя матеріалу:

$$p_{f,z} = 0,2\gamma_g D_w \psi_{y,2}(y) = 0,2\gamma_g H_w \left[ y - \psi_{y,1}(y) \right]. \quad (13)$$

Таблиця 2 – Значення функції  $\psi_{y,2}(y)$  для ємностей різного видовження

y	$\Delta_w$											
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
0,1	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15
0,2	0,10	0,11	0,13	0,15	0,17	0,18	0,20	0,22	0,23	0,25	0,27	0,28
0,3	0,14	0,17	0,19	0,22	0,24	0,27	0,29	0,31	0,34	0,36	0,38	0,40
0,4	0,18	0,22	0,25	0,28	0,31	0,34	0,37	0,40	0,43	0,45	0,48	0,50
0,5	0,23	0,27	0,31	0,34	0,38	0,41	0,44	0,48	0,51	0,54	0,56	0,59
0,6	0,27	0,31	0,36	0,40	0,44	0,48	0,51	0,55	0,58	0,61	0,64	0,67
0,7	0,31	0,36	0,41	0,45	0,49	0,54	0,57	0,61	0,65	0,68	0,71	0,74
0,8	0,34	0,40	0,45	0,50	0,55	0,59	0,63	0,67	0,71	0,74	0,77	0,80
0,9	0,38	0,44	0,49	0,55	0,60	0,64	0,68	0,72	0,76	0,79	0,83	0,85
1,0	0,41	0,48	0,54	0,59	0,64	0,69	0,73	0,77	0,81	0,84	0,87	0,90
y	$\Delta_w$											
	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
0,1	0,16	0,17	0,18	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,23	0,24	0,25
0,2	0,30	0,31	0,33	0,34	0,36	0,37	0,38	0,40	0,41	0,43	0,44	0,45
0,3	0,42	0,44	0,46	0,48	0,49	0,51	0,53	0,55	0,56	0,58	0,60	0,61
0,4	0,52	0,55	0,57	0,59	0,61	0,63	0,65	0,67	0,69	0,71	0,72	0,74
0,5	0,62	0,64	0,67	0,69	0,71	0,73	0,75	0,77	0,79	0,81	0,83	0,84
0,6	0,70	0,72	0,75	0,77	0,79	0,82	0,84	0,85	0,87	0,89	0,91	0,92
0,7	0,77	0,79	0,82	0,84	0,86	0,89	0,91	0,92	0,94	0,96	0,97	0,99
0,8	0,83	0,85	0,88	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	1,00	1,01	1,03	1,04
0,9	0,88	0,91	0,93	0,95	0,97	0,99	1,01	1,03	1,04	1,06	1,07	1,08
1,0	0,93	0,95	0,98	1,00	1,02	1,03	1,05	1,07	1,08	1,09	1,11	1,12

Задача оцінки згинального моменту  $M_p$  в вертикальних ребрах навіть в грубій постановці доволі складна. Це пов'язано з тим, що початково прямолінійне ребро після засипки сипучого матеріалу вигинається в радіальній площині, створюючи таким чином початкові ексцентриситети  $e_{p,z}$  для потенційного зусилля  $N_{p,z}$ . Без руху сипучого матеріалу величина цього зусилля визначається лише власною вагою вищерозташованих конструкцій і снігового покриву, тому виникаючі при цьому згинальні моменти  $M_{p,z}$  досить малі та можуть бути не враховані. Проти при вивантаженні сипучого матеріалу зусилля  $N_{p,z}$  різко зростає за рахунок тертя матеріалу об стінки ємності і нехтувати значенням  $M_{p,z}$  вже не можна.

Для того, щоб дати точну оцінку величині цього моменту, необхідно розглянути схему стиснуто-зігнутого криволінійного стрижня змінної по довжині жорсткості з шарнірами на кінцях, підпертими з однієї сторони пружньою основою (також змінної жорсткості) та стиснутою силою, величина котрої змінюється за формулою (7). Окрім цього, схема фактично являється кінематичною, оскільки об'єм сипучого матеріалу зменшується, викликаючи тим самим зменшення горизонтального та вертикального тиску матеріалу, а отже і початкових ексцентриситетів  $e_{p,z}$  (рис. 1).

У зв'язку з цим, пропонується спрощений підхід, який полягає у використанні умовного ексцентриситету  $e_{p,ef}$ , що визначає положення центру ваги приведенного поперечного перерізу вертикального ребра жорсткості. Приведений переріз складається безпосередньо з перерізу ребра жорсткості та частини корпусу, що має довжину рівну відстані між двома суміжними ребрами, тобто  $\pi D_w / n_p$ . При цьому, як і раніше, діє припущення, що всі вертикальні навантаження сприймаються виключно ребром, а корпус ємності є елементом передачі та розподілу цих навантажень між ребрами. Певно, що умовний ексцентриситет  $e_{p,ef}$  при такому трактуванні буде дорівнювати різниці відстаней центрів ваги перерізів одного ребра  $y_p$  та ребра з частиною корпусу  $y_{ef}$ .

Для відстані  $y_{ef}$  запишемо:

$$y_{ef} = \frac{\pi D_w t_w^2 / (2n_p) + y_p A_p}{\pi D_w t_w / n_p + A_p}. \quad (14)$$

Для відношення площ поперечних перерізів всіх вертикальних ребер жорсткості та поперечного перерізу корпусу ємності введемо позначення:

$$\alpha_{wp} = A_p n_p / (\pi D_w t_w). \quad (15)$$

Використовуючи коефіцієнт  $\alpha_{wp}$  та нехтуючи першим доданком чисельника формули, внаслідок його незначної величини, для  $y_{ef}$  отримаємо:

$$y_{ef} = y_p \alpha_{wp} / (1 + \alpha_{wp}). \quad (16)$$

Врешті для умовного ексцентриситету  $e_{p,ef}$  отримаємо лаконічний вираз:

$$e_{p,ef} = y_p - y_{ef} = y_p / (1 + \alpha_{wp}) = h_p k_y / (1 + \alpha_{wp}). \quad (17)$$

Таким чином, ексцентриситет  $e_{p,ef}$  та, відповідно, момент  $M_{p,z}$  будуть зменшуватися при збільшенні жорсткості вертикальних ребер та збільшуватися при зростанні товщини корпусу ємності. При змінних за висотою товщинах листів корпусу  $t_w$  і вертикальних ребер  $t_p$  ексцентриситет  $e_{p,ef}$  варто визначати для кожної пари значень  $t_w$  і  $t_p$ .

**Висновки.**

1. Надана проста з математичної точки зору формульна процедура для обчислення поздовжніх зусиль для ємностей різного видовження, залежно від значення функції  $\psi_{y,1}(y)$ .
2. Аналогічна процедура запропонована для розрахунку тиску  $p_z$  сипучого матеріалу на безрозмірному рівні  $y$  від тертя матеріалу, залежно від значення функції  $\psi_{y,2}(y)$ .
3. Значення функцій  $\psi_{y,1}(y)$  та  $\psi_{y,2}(y)$  для ємностей різного видовження представлені у вигляді таблиць.
4. Запропонований спрощений підхід для оцінки згинального моменту  $M_p$  в вертикальних ребрах жорсткості силосної ємності, з використанням умовного ексцентриситету  $e_{p,ef}$ .

**Література**

1. Лессинг Е.Н. Листовые металлические конструкции / Е.Н. Лессинг, А.Ф. Лилеев, А.Г. Соколов. – М.: Стройиздат, 1970. – 490 с.
2. Iwicki P. Application of linear buckling sensitivity analysis to economic design of cylindrical steel silos composed of corrugated sheets and columns / P. Iwicki, M. Sondej, J. Tejchman // Engineering Failure Analysis. – ELSEVIER, 2016. – p. 105-121. – Vol. 70.
3. Wojcik M. Simulation of buckling process of cylindrical metal silos with flat sheets containing bulk solids / M. Wojcik, J. Tejchman // Thin-Walled Structures. – ELSEVIER, 2015. – p. 122-136. – Vol. 93.
4. A.M. Sanad Computations of Granular Flow and Pressures in a Flat-Bottomed Silo / A.M. Sanad, J.Y. Ooi; J. M. F.G. Holst, J.M. Rotter // Journal of Engineering Mechanics. – ACSE, 2001. – p. 1033-1043. – Vol. 127. – №10.
5. Wang P. Flow pattern and normal pressure distribution in flat bottom silo discharged using wall outlet / P. Wang, L. Zhu, X. Zhu // Powder Technology. – ELSEVIER, 2016. – p. 104-114. – Vol. 295.
6. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М. : Наука, 1976. – 512 с.
7. Сегаль А.И. Практические методы расчета тонкостенных конических оболочек / А.И. Сегаль // Расчет пространственных конструкций : сборник статей. – М. : Стройиздат, 1951. – Выпуск II. – С. 383-412.
8. Підприємства, будівлі і споруди по зберіганню та переробці зерна : ДБН В.2.2-8-98. – [Чинний від 1998-07- 01]. – К. : Мінрегіон України, 1998. – 41 с. – (Державні будівельні норми України).

Стаття надійшла 12.03.2018