

**ІНТЕГРАЛЬНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ  
ДЛЯ ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ ПРИ ЗГІНІ БРУСА  
З КРИВОЛІНІЙНОЮ ПЛОСКОЮ ВІССЮ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ**

**Ковальчук С.Б.**, к.т.н.,  
**Горик О.В.**, д.т.н., професор,  
*Полтавська державна аграрна академія*  
stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua

**Анотація.** Для криволінійного бруса із плоскою віссю довільної форми, отримані інтегральні співвідношення між внутрішніми силовими факторами, зовнішнім навантаженням загального характеру, що викликає його плоский згин, і напруженнями у поперечних перерізах. На основі отриманих співвідношень були виведені диференціальні залежності між внутрішніми силовими факторами, які виражають умови рівноваги елементарної ділянки криволінійного бруса. Співвідношення були отримані у природній криволінійній циліндричній системі координат і мають загальний вигляд, який не залежить від форми осі бруса. Представлені теоретичні результати є корисними при розв'язанні теоретичних та прикладних задач плоского згину криволінійних однорідних та неоднорідних брусів.

**Ключові слова:** криволінійний брус, плоский згин, внутрішні силові фактори, інтегральні співвідношення, диференціальні залежності, природна система координат.

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ  
ДЛЯ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ БРУСА  
С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЛОСКОЙ ОСЬЮ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ**

**Ковальчук С.Б.**, к.т.н.,  
**Горик А.В.**, д.т.н., профессор,  
*Полтавская государственная аграрная академия*  
stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua

**Аннотация.** Для криволинейного бруса с плоской осью произвольной формы, получены интегральные соотношения между внутренними силовыми факторами, внешними нагрузкам общего характера, которые вызывают его плоский изгиб, и напряжениями в поперечных сечениях. На основе полученных соотношений, были выведены дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами, которые выражают условия равновесия элементарного участка криволинейного бруса. Соотношения были получены в естественной криволинейной цилиндрической системе координат и имеют общий вид, который не зависит от формы оси бруса. Представленные теоретические результаты полезны при решении теоретических и прикладных задач плоского изгиба криволинейных однородных и неоднородных брусев.

**Ключевые слова:** криволинейный брус, плоский изгиб, внутренние силовые факторы, интегральные соотношения, дифференциальные зависимости, естественная система координат.

**INTEGRAL AND DIFFERENTIAL RELATIONS  
FOR INTERNAL POWER FACTORS IN THE BENDING OF THE BAR  
WITH A CURVED FLAT AXIS OF AN ARBITRARY SHAPE**

**Kovalchuk S.B.**, PhD.,

**Abstract.** The work is dedicated to the theoretical study of internal power factors in a curved bar with a flat axis of an arbitrary shape, that is in a plane bending condition by a surface load of an arbitrary type. The natural curvilinear cylindrical orthogonal coordinates system associated with the structure of the bar and given by the characteristics of families of coordinate surfaces and Lamé coefficients is used to describe the geometry of the bar and also the load distribution. The analysis of the equilibrium conditions of the elementary section of the bar made it possible to obtain integral relations between internal power factors and loads distributed on its longitudinal and end surfaces. The relations obtained were used to derive differential dependencies between internal power factors, that express the equilibrium conditions for the elementary section of a curved bar. Also, based on the equilibrium conditions of the bar cross-sections, integral relations between internal power factors and the stress state components were obtained. The presented integral and differential relations have a general form, invariant to the shape of the axis of the bar and allow to make a direct connection between loads and stresses. The results of the work can be used to solve theoretical and applied problems of a plane bending of curvilinear homogeneous and inhomogeneous bars with different types and combinations of external load.

**Keywords:** curvilinear bar, plane bending, internal power factors, integral relations, differential dependencies, natural coordinates.

**Вступ.** Розв'язання задач механіки деформування стержньових елементів конструкцій із криволінійною віссю, є важливою, однак мало дослідженою проблемою прикладної математики та механіки. Особливо це стосується криволінійних брусів із неоднорідною, або композитною структурною будовою, застосування яких у багатьох випадках дозволяє отримати значні експлуатаційні переваги над аналогами із однорідних конструкційних матеріалів. Такий стан розвитку даного питання обмежує можливості проектування ефективних інженерних конструкцій і вказує на необхідність розробки загальної теорії деформування криволінійних брусів різної будови.

У ході розв'язання методами теорії пружності задач деформування брусів, для врахування статичних граничних умов у багатьох випадках зручним є використання внутрішніх силових факторів, що інтегрально пов'язують напруження, зовнішнє навантаження і геометричні параметри бруса. Рівняння внутрішніх силових факторів та залежності, що пов'язують їх із напруженнями дозволяють встановити можливу форму розв'язку для шуканих функцій напружень, виключити частину невідомих із процесу розв'язання, визначити невідомі сталі інтегрування, а також застосувати наближені методи розв'язання задач деформування. У випадку прямих чи кругових брусів для простих комбінацій навантаження, запис таких рівнянь проблем не складає. Однак в інших випадках, навіть доволі простих з точки зору аналітичного опису форми криволінійної осі бруса, побудова аналітичних рівнянь для внутрішніх силових факторів стає доволі складною задачею, вирішення якої потребує індивідуального підходу для кожної окремої форми осі, чи комбінації навантаження. Тому для розвитку теорії згину криволінійних брусів важливим кроком є побудова загальних аналітичних залежностей для внутрішніх силових факторів, інваріантних до форми криволінійної осі та типу і комбінацій зовнішнього навантаження.

**Аналіз останніх досліджень.** Приведені у відомій літературі з опору матеріалів, наприклад [1], а також спеціалізованій літературі з механіки криволінійних гнучких стержнів, наприклад [2], співвідношення для внутрішніх силових факторів у криволінійних стержнях побудовані із використанням допущень, які не дозволяють в повній мірі враховувати геометрію бруса, що особливо важливо у випадку брусів великої кривизни.

У роботі [3], для опису геометрії криволінійних брусів, а також векторних та тензорних механічних величин, пов'язаних із їх деформуванням, авторами запропоновано природну

циліндричну ортогональну систему координат. Застосування такої системи координат дає можливість абстрагуватись від конкретної форми осі криволінійного бруса і оперувати узагальненими характеристиками, що дозволяє побудувати інваріантні інтегральні співвідношення та диференціальні залежності для внутрішніх силових факторів.

**Цілі і завдання.** Метою роботи є дослідження зв'язку між внутрішніми силовими факторами, зовнішнім навантаженням довільного характеру та компонентами напруженого стану у випадку плоского згину криволінійного бруса із плоскою віссю довільної форми та отримання аналітичних співвідношень між вказаними механічними величинами у природній криволінійній циліндричній системі координат.

**Результати дослідження.** Розглянемо брус із криволінійною плоскою віссю (рис. 1), що є плоскою шматково-гладкою кривою  $g_c$  і лежить у площині симетрії бруса  $A$ .

Брус прив'язаний до допоміжної прямокутної просторової декартової системи координат  $XYZ$  із правою системою осей та початком у точці  $O$ . Головна площина симетрії бруса  $A$  співпадає із координатною площиною  $XOZ$ .

Зовні брус обмежений поздовжніми бічними криволінійними поверхнями  $\Lambda_\zeta$  ( $\zeta=1,2$ ) із твірними  $v_\zeta$ , поздовжніми циліндричними поверхнями  $\Pi_\zeta$  та торцевими поверхнями  $T_\zeta$  (рис. 1). Поверхні  $\Pi_\zeta$  та  $T_\zeta$  перпендикулярні до площини симетрії  $A$ .

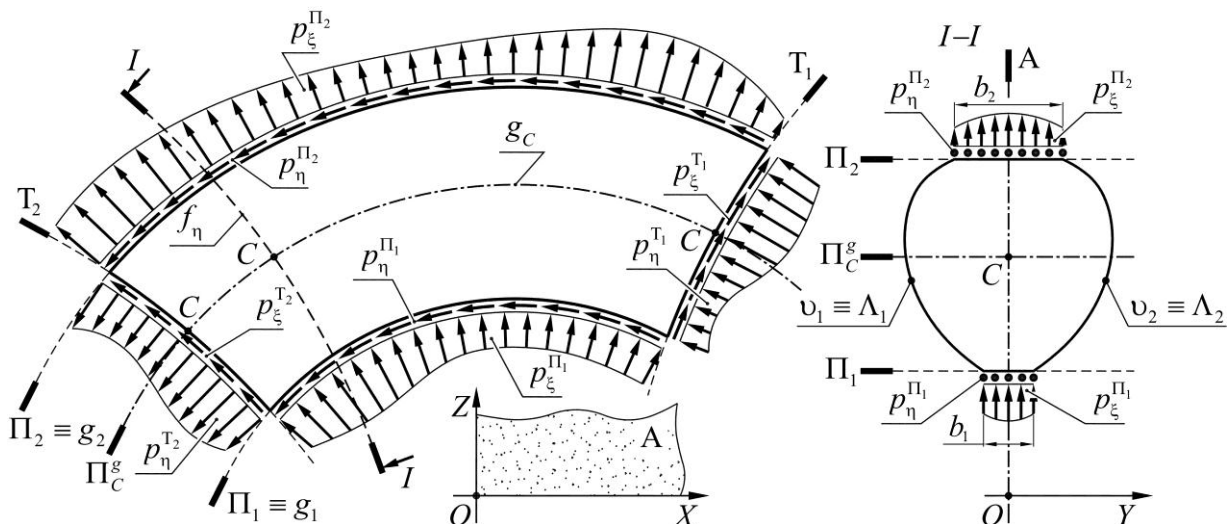


Рис. 1. Будова та зовнішнє навантаження криволінійного бруса

Брус перебуває під дією зовнішніх навантажень розподілених за деяким законом на поздовжніх ( $\Pi_\zeta$ ) та торцевих ( $T_\zeta$ ) поверхнях (рис. 1). Поздовжні поверхні  $\Pi_\zeta$  шириною  $b_\zeta$  навантажені нормальними  $p_\xi^{\Pi_\zeta}$  та дотичними  $p_\eta^{\Pi_\zeta}$  навантаженнями, а торцеві  $T_\zeta$ , відповідно –  $p_\eta^{T_\zeta}$ ,  $p_\xi^{T_\zeta}$ . Навантаження розподілені за довільним законом по довжині поверхонь, але симетрично відносно площини  $XOZ$ .

На рис. 1 навантаження на поверхнях бруса діє у прийнятих додатних напрямках, що дозволить однозначно встановити правило знаків для внутрішніх силових факторів. Однак, незважаючи на дану умовність, вважатимемо, що брус під дією прикладеного навантаження зберігає статичну рівновагу.

Як основну систему координат для розглядуваного бруса оберемо природну циліндричну систему координат [3]. У такій системі координат поздовжні поверхні  $\Pi_\zeta$  разом із усіма поздовжніми волокнами бруса належать однопараметричному сімейству координатних циліндричних поверхонь  $\Pi_\zeta^g$ , а торцеві поверхні  $T_\zeta$  разом із усіма поперечними перерізами бруса – сімейству координатних циліндричних поверхонь  $T_\zeta^f$ . Поверхні  $\Pi_\zeta^g$  та  $T_\zeta^f$  взаємно ортого-

нальні і разом із сімейством площин нормальних до осі  $OY$ , утворюють криволінійну циліндричну систему координат  $НΞУ$ . Лінії перетину поверхонь  $\Pi_{\xi}^g$  та  $\Gamma_{\eta}^f$  із площиною  $XOZ$  складають однопараметричні сімейства кривих, відповідно:

$$g_{\xi}(x, z, \xi) = 0, \quad f_{\eta}(x, z, \eta) = 0, \quad (1)$$

де  $\eta, \xi$  – довільні дійсні сталі (криволінійні координати).

Вважатимемо, що система рівнянь (1) має розв'язок відносно змінних  $x$  та  $z$ :

$$x = \omega_x(\eta, \xi), \quad z = \omega_z(\eta, \xi). \quad (2)$$

Тоді, довільна точка  $K$  розглядуваного бруса у системі  $НΞУ$  матиме криволінійні координати:

$$K(x, y, z) = K(\omega_x(\eta, \xi), y, \omega_z(\eta, \xi)) = K(\eta, \xi, y).$$

**Інтегральні співвідношення між внутрішніми силовими факторами та навантаженнями.** Для встановлення залежностей між внутрішніми силовими факторами та зовнішнім навантаженням у межах розглядуваного бруса виділимо довільний поперечний переріз із координатою  $\eta$ , а також нескінченно малий елемент бруса, відокремлений координатними поверхнями сімейства  $\Gamma_{\eta}^f$  зі слідами на площині  $XOZ$ :  $f_{\eta}|_{\eta=0-d\theta/2}$  та  $f_{\eta}|_{\eta=0+d\theta/2}$ ,  $\theta \in (\eta_1, \eta)$  (рис. 2, а). Нормальні  $p_{\xi}^{\Pi_{\xi}}$  та дотичні  $p_{\eta}^{\Pi_{\xi}}$  навантаження, прикладені до розглядуваного елемента, зведемо до площини  $XOZ$  інтегруванням по ширині поверхонь  $\Pi_{\xi}$ :

$$q_{\xi}^{\Pi_{\xi}} = \int_{v_1(\xi_c)}^{v_2(\xi_c)} p_{\xi}^{\Pi_{\xi}} dy, \quad q_{\eta}^{\Pi_{\xi}} = \int_{v_1(\xi_c)}^{v_2(\xi_c)} p_{\eta}^{\Pi_{\xi}} dy. \quad (3)$$

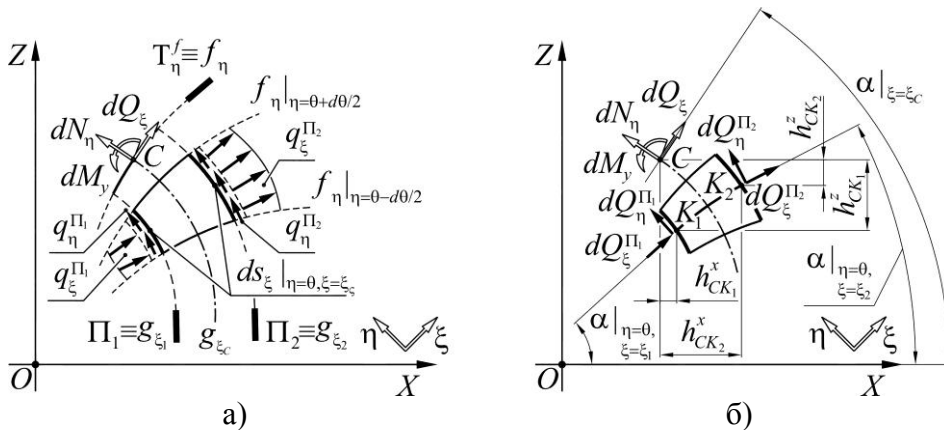


Рис. 2. Схема для дослідження рівноваги ділянки бруса із навантаженнями на поздовжніх циліндричних гранях

Розглядаючи рівновагу виділеного елемента бруса (рис. 2, б) під дією рівнодійних зовнішнього навантаження  $dQ_{\xi}^{\Pi_{\xi}} = q_{\xi}^{\Pi_{\xi}} ds_{\xi}|_{\eta=0, \xi=\xi_c}$  і  $dQ_{\eta}^{\Pi_{\xi}} = q_{\eta}^{\Pi_{\xi}} ds_{\xi}|_{\eta=0, \xi=\xi_c}$ , що зведені до середніх точок  $K_c$  відповідних ділянок поверхонь  $\Pi_{\xi}$ , та елементарних складових внутрішніх силових факторів  $dN_{\eta}$ ,  $dQ_{\xi}$  і  $dM_y$ , що виникають у перерізі із координатою  $\eta$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} dN_{\eta} &= \sum_{i=1}^2 \left( \left( q_{\xi}^{\Pi_i} |_{\eta=0} \sin(\alpha |_{\xi=\xi_c} - \alpha |_{\eta=0, \xi=\xi_i}) - q_{\eta}^{\Pi_i} |_{\eta=0} \cos(\alpha |_{\xi=\xi_c} - \alpha |_{\eta=0, \xi=\xi_i}) \right) ds_{\xi} |_{\eta=0, \xi=\xi_i} \right), \\ dQ_{\xi} &= - \sum_{i=1}^2 \left( \left( q_{\xi}^{\Pi_i} |_{\eta=0} \cos(\alpha |_{\xi=\xi_c} - \alpha |_{\eta=0, \xi=\xi_i}) + q_{\eta}^{\Pi_i} |_{\eta=0} \sin(\alpha |_{\xi=\xi_c} - \alpha |_{\eta=0, \xi=\xi_i}) \right) ds_{\xi} |_{\eta=0, \xi=\xi_i} \right), \\ dM_y &= - \sum_{i=1}^2 \left( \left( (q_{\xi}^{\Pi_i} \sin \alpha + q_{\eta}^{\Pi_i} \cos \alpha) |_{\eta=0, \xi=\xi_i} h_{CK_i}^x + (q_{\xi}^{\Pi_i} \cos \alpha - q_{\eta}^{\Pi_i} \sin \alpha) |_{\eta=0, \xi=\xi_i} h_{CK_i}^z \right) ds_{\xi} |_{\eta=0, \xi=\xi_i} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\alpha$  – кут між нормаллю до поздовжнього волокна бруса та додатним напрямом осі  $OX$ .

Окремі величини, що входять у співвідношення (4), із урахуванням (2) можна записати наступним чином:

$$h_{CK_i}^x = -\left(\omega_x \Big|_{\xi=\xi_C} - \omega_x \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i}\right), \quad h_{CK_i}^z = \omega_z \Big|_{\xi=\xi_C} - \omega_z \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i}, \quad ds_\xi = L_\eta d\eta, \quad (5)$$

де  $L_\eta$  – коефіцієнт Ламе природної системи НΞΥ :

$$L_\eta = \sqrt{(\partial\omega_x/\partial\eta)^2 + (\partial\omega_z/\partial\eta)^2}. \quad (6)$$

Інтегруючи співвідношення (4) у межах  $\theta \in (\eta_1, \eta)$ , із урахуванням (5), отримаємо наступні інтегральні співвідношення:

$$N_\eta = \cos \alpha \Big|_{\xi=\xi_C} \int_{\eta_1}^{\eta} \sum_{i=1}^2 \left( (L_\eta \cos \alpha) \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} \left( (q_\xi^{\Pi_i} - q_\eta^{\Pi_i} \kappa) \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} \kappa \Big|_{\xi=\xi_C} - (q_\xi^{\Pi_i} \kappa + q_\eta^{\Pi_i}) \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} \right) \right) d\theta + N_{\eta_1},$$

$$Q_\xi = -\cos \alpha \Big|_{\xi=\xi_C} \int_{\eta_1}^{\eta} \sum_{i=1}^2 \left( (L_\eta \cos \alpha) \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} \left( (q_\xi^{\Pi_i} \kappa + q_\eta^{\Pi_i}) \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} \kappa \Big|_{\xi=\xi_C} + (q_\xi^{\Pi_i} - q_\eta^{\Pi_i} \kappa) \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} \right) \right) d\theta + Q_{\xi_1}, \quad (7)$$

$$M_y = \int_{\eta_1}^{\eta} \sum_{i=1}^2 \left( (L_\eta \cos \alpha) \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} \left( \omega_x \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} (q_\xi^{\Pi_i} \kappa + q_\eta^{\Pi_i}) \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} - \omega_z \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} (q_\xi^{\Pi_i} - q_\eta^{\Pi_i} \kappa) \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} \right) \right) d\theta + M_{y_1},$$

де  $\kappa = \frac{\partial\omega_z}{\partial\xi} / \frac{\partial\omega_x}{\partial\xi} = \text{tg } \alpha$  – параметр природної системи координат;  $N_{\eta_1} = N_{\eta_1}(\eta)$ ,  $Q_{\xi_1} = Q_{\xi_1}(\eta)$ ,

$M_{y_1} = M_{y_1}(\eta)$  – внутрішні силові фактори від навантажень, що діють на торці  $T_1$  (у початковому перерізі з координатою  $\eta_1$ ).

У залежностях (7) складові навантажень у дужках є компонентами зведеного зовнішнього навантаження у прямокутній системі координат  $XOZ$  :

$$q_x^{\Pi_i} = \cos \alpha \Big|_{\xi=\xi_i} (q_\xi^{\Pi_i} - q_\eta^{\Pi_i} \kappa \Big|_{\xi=\xi_i}), \quad q_z^{\Pi_i} = \cos \alpha \Big|_{\xi=\xi_i} (q_\xi^{\Pi_i} \kappa \Big|_{\xi=\xi_i} + q_\eta^{\Pi_i}), \quad (8)$$

з урахуванням чого, співвідношення (7) можна записати наступним чином:

$$N_\eta = \cos \alpha \Big|_{\xi=\xi_C} \int_{\eta_1}^{\eta} \sum_{i=1}^2 \left( L_\eta \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} (q_x^{\Pi_i} \Big|_{\eta=0} \kappa \Big|_{\xi=\xi_C} - q_z^{\Pi_i} \Big|_{\eta=0}) \right) d\theta + N_{\eta_1},$$

$$Q_\xi = -\cos \alpha \Big|_{\xi=\xi_C} \int_{\eta_1}^{\eta} \sum_{i=1}^2 \left( L_\eta \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} (q_x^{\Pi_i} \Big|_{\eta=0} + q_z^{\Pi_i} \Big|_{\eta=0} \kappa \Big|_{\xi=\xi_C}) \right) d\theta + Q_{\xi_1}, \quad (9)$$

$$M_y = \int_{\eta_1}^{\eta} \sum_{i=1}^2 \left( L_\eta \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} (\omega_x \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} q_x^{\Pi_i} \Big|_{\eta=0} - \omega_z \Big|_{\eta=0, \xi=\xi_i} q_z^{\Pi_i} \Big|_{\eta=0}) \right) d\theta + M_{y_1}.$$

Рівняння внутрішніх силових факторів (7) та (9) отримані для випадку, коли числові значення криволінійної координати  $\eta$  зростають від початкового значення  $\eta_1$  до кінцевого  $\eta_2$ , тобто  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ . Однак можливі випадки, коли  $\eta_1 \geq \eta \geq \eta_2$ , тоді для отримання коректних знаків, функції  $N_\eta$ ,  $Q_\xi$  і  $M_y$ , отримані згідно (7) або (9), необхідно помножити на  $(-1)$ .

Співвідношення (7) та (9) містять складові  $N_{\eta_1}$ ,  $Q_{\xi_1}$  та  $M_{y_1}$ , що викликані навантаженнями  $p_{\eta_1}^{T_1}$  та  $p_{\xi_1}^{T_1}$ , розподіленими на торці  $T_1$  (рис. 1). Вирази для визначення даних функцій отримаємо розглянувши елемент висотою  $ds_\eta \Big|_{\eta=\eta_1}$  і шириною  $v_2 - v_1$ , виділений по висоті поверхні торця  $T_1$  в околі довільної точки  $K(\eta_1, \xi)$  (рис. 3). Навантаження, розподілені на торці  $T_1$ , інтегруванням зведемо до площини  $XOZ$  :

$$q_{\eta_1}^{T_1} = \int_{v_1}^{v_2} p_{\eta_1}^{T_1} dy, \quad q_{\xi_1}^{T_1} = \int_{v_1}^{v_2} p_{\xi_1}^{T_1} dy. \quad (10)$$

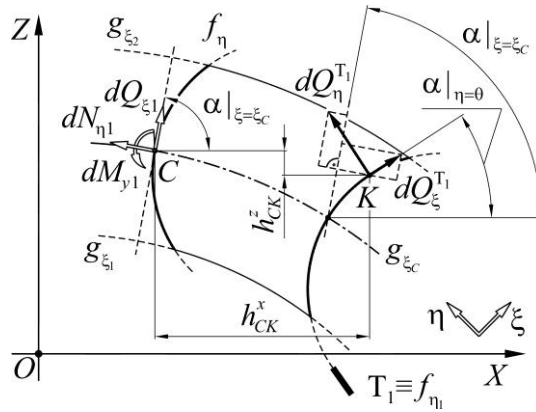


Рис. 3. Схема для дослідження рівноваги ділянки бруса під дією навантаження у початковому перерізі

Елементарні рівнодійні нормального  $dQ_{\eta}^{T_1} = q_{\eta}^{T_1} ds_{\eta} |_{\eta=\eta_1}$  та дотичного  $dQ_{\xi}^{T_1} = q_{\xi}^{T_1} ds_{\eta} |_{\eta=\eta_1}$  навантажень, що діють на виділеному елементі торця, у довільному перерізі з координатою  $\eta$  викликають появу елементарних внутрішніх силових факторів із компонентами:

$$\begin{aligned} dN_{\eta 1} &= -\left(q_{\eta}^{T_1} \cos(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha |_{\eta=\eta_1}) - q_{\xi}^{T_1} \sin(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha |_{\eta=\eta_1})\right) ds_{\eta} |_{\eta=\eta_1}, \\ dQ_{\xi 1} &= -\left(q_{\eta}^{T_1} \sin(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha |_{\eta=\eta_1}) + q_{\xi}^{T_1} \cos(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha |_{\eta=\eta_1})\right) ds_{\eta} |_{\eta=\eta_1}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$dM_{y1} = \left( (q_{\eta}^{T_1} \sin \alpha |_{\eta=\eta_1} - q_{\xi}^{T_1} \cos \alpha |_{\eta=\eta_1}) h_{CK}^z - (q_{\eta}^{T_1} \cos \alpha |_{\eta=\eta_1} + q_{\xi}^{T_1} \sin \alpha |_{\eta=\eta_1}) h_{CK}^x \right) ds_{\eta} |_{\eta=\eta_1},$$

Окремі величини, що входять у співвідношення (11), із урахуванням (2) можна записати наступним чином:

$$h_{CK}^x = -(\omega_x |_{\xi=\xi_C} - \omega_x |_{\eta=\eta_1}), \quad h_{CK}^z = \omega_z |_{\xi=\xi_C} - \omega_z |_{\eta=\eta_1}, \quad ds_{\eta} |_{\eta=\eta_1} = L_{\xi} |_{\eta=\eta_1} d\xi, \quad (12)$$

де  $L_{\xi}$  – коефіцієнт Ламе системи  $HEY$ :

$$L_{\xi} = \sqrt{(\partial \omega_x / \partial \xi)^2 + (\partial \omega_z / \partial \xi)^2}. \quad (13)$$

Інтегруючи співвідношення (11), із урахуванням (12) отримаємо такі вирази:

$$\begin{aligned} N_{\eta 1} &= -\cos \alpha |_{\xi=\xi_C} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( (L_{\xi} \cos \alpha) |_{\eta=\eta_1} \left( (q_{\eta}^{T_1} + q_{\xi}^{T_1} \kappa |_{\eta=\eta_1}) + \kappa |_{\xi=\xi_C} (q_{\eta}^{T_1} \kappa |_{\eta=\eta_1} - q_{\xi}^{T_1}) \right) \right) d\xi, \\ Q_{\xi 1} &= -\cos \alpha |_{\xi=\xi_C} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( (L_{\xi} \cos \alpha) |_{\eta=\eta_1} \left( \kappa |_{\xi=\xi_C} (q_{\eta}^{T_1} + q_{\xi}^{T_1} \kappa |_{\eta=\eta_1}) - (q_{\eta}^{T_1} \kappa |_{\eta=\eta_1} - q_{\xi}^{T_1}) \right) \right) d\xi, \quad (14) \\ M_{y1} &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( (L_{\xi} \cos \alpha) |_{\eta=\eta_1} \left( (q_{\eta}^{T_1} \kappa |_{\eta=\eta_1} - q_{\xi}^{T_1}) \omega_z |_{\xi=\xi_C} - (q_{\eta}^{T_1} + q_{\xi}^{T_1} \kappa |_{\eta=\eta_1}) \omega_x |_{\xi=\xi_C} \right) \right) d\xi. \end{aligned}$$

Аналогічно до співвідношень (7), у (14) складові навантажень у дужках можна замінити відповідними компонентами у прямокутній системі координат  $XOZ$ :

$$\begin{aligned} N_{\eta 1} &= -\cos \alpha |_{\xi=\xi_C} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( L_{\xi} |_{\eta=\eta_1} (q_x^{T_1} \kappa |_{\xi=\xi_C} + q_z^{T_1}) \right) d\xi, \quad Q_{\xi 1} = \cos \alpha |_{\xi=\xi_C} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( L_{\xi} |_{\eta=\eta_1} (q_x^{T_1} - q_z^{T_1} \kappa |_{\xi=\xi_C}) \right) d\xi, \\ M_{y1} &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( L_{\xi} |_{\eta=\eta_1} \left( q_x^{T_1} (\omega_z |_{\xi=\xi_C} - \omega_z |_{\eta=\eta_1}) + q_z^{T_1} (\omega_x |_{\xi=\xi_C} - \omega_x |_{\eta=\eta_1}) \right) \right) d\xi, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $q_x^{T_1} = q_x^{T_1}(\xi)$ ,  $q_z^{T_1} = q_z^{T_1}(\xi)$  – компоненти зведеного навантаження на торці  $T_1$  у прямокутній системі координат  $XOZ$ :

$$q_x^{T_1} = \cos \alpha |_{\eta=\eta_1} (q_\xi^{T_1} - q_\eta^{T_1} \kappa |_{\eta=\eta_1}), \quad q_z^{T_1} = \cos \alpha |_{\eta=\eta_1} (q_\eta^{T_1} + q_\xi^{T_1} \kappa |_{\eta=\eta_1}). \quad (16)$$

**Диференціальні залежності між внутрішніми силовими факторами.** Аналізуючи співвідношення (9) можна побачити, що між отриманими інтегральними співвідношенням для внутрішніх силових факторів існують диференціальні залежності.

Диференціюючи співвідношення (9) за координатою  $\eta$  можна побачити, що окремі доданки у їх лівих частинах відповідають вихідним співвідношенням для внутрішніх силових факторів, з урахуванням чого отримано:

$$\begin{aligned} \frac{dN_\eta}{d\eta} &= -\frac{d\alpha |_{\xi=\xi_C}}{d\eta} (Q_\xi - Q_{\xi_1}) + \sum_{i=1}^2 (L_\eta |_{\xi=\xi_i} (q_x^{\Pi_i} \sin \alpha |_{\xi=\xi_C} - \cos \alpha |_{\xi=\xi_C} q_z^{\Pi_i})) + \frac{dN_{\eta_1}}{d\eta}, \\ \frac{dQ_\xi}{d\eta} &= \frac{d\alpha |_{\xi=\xi_C}}{d\eta} (N_\eta - N_{\eta_1}) - \sum_{i=1}^2 (L_\eta |_{\xi=\xi_i} (q_x^{\Pi_i} \cos \alpha |_{\xi=\xi_C} + q_z^{\Pi_i} \sin \alpha |_{\xi=\xi_C})) + \frac{dQ_{\xi_1}}{d\eta}, \\ \frac{dM_y}{d\eta} &= \left( \frac{Q_\xi - Q_{\xi_1}}{\cos \alpha} \frac{d\omega_z}{d\eta} \right) |_{\xi=\xi_C} + \sum_{i=1}^2 (L_\eta |_{\xi=\xi_i} (\omega_x |_{\xi=\xi_C}^{\xi=\xi_i} q_z^{\Pi_i} - \omega_z |_{\xi=\xi_C}^{\xi=\xi_i} q_x^{\Pi_i})) + \frac{dM_{y1}}{d\eta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Підставивши до (17) вирази (8) отримаємо диференціальні залежності для випадку, коли навантаження задані компонентами у природній системі координат криволінійного бруса:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{N}_\eta}{d\eta} &= -\frac{d\alpha |_{\xi=\xi_C}}{d\eta} \tilde{Q}_\xi + \sum_{i=1}^2 (L_\eta |_{\xi=\xi_i} (q_\xi^{\Pi_i} \sin(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha |_{\xi=\xi_i}) - q_\eta^{\Pi_i} \cos(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha |_{\xi=\xi_i}))), \\ \frac{d\tilde{Q}_\xi}{d\eta} &= \frac{d\alpha |_{\xi=\xi_C}}{d\eta} \tilde{N}_\eta - \sum_{i=1}^2 (L_\eta |_{\xi=\xi_i} (q_\xi^{\Pi_i} \cos(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha |_{\xi=\xi_i}) + q_\eta^{\Pi_i} \sin(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha |_{\xi=\xi_i}))), \\ \frac{d\tilde{M}_y}{d\eta} &= \left( \frac{1}{\cos \alpha} \frac{d\omega_z}{d\eta} \right) |_{\xi=\xi_C} \tilde{Q}_\xi + \sum_{i=1}^2 (L_\eta \cos \alpha (\omega_x |_{\xi=\xi_C}^{\xi=\xi_i} (q_\xi^{\Pi_i} \kappa + q_\eta^{\Pi_i}) - \omega_z |_{\xi=\xi_C}^{\xi=\xi_i} (q_\xi^{\Pi_i} - q_\eta^{\Pi_i} \kappa))) |_{\xi=\xi_i}, \end{aligned} \quad (18)$$

де уведені позначення  $\tilde{N}_\eta = N_\eta - N_{\eta_1}$ ,  $\tilde{Q}_\xi = Q_\xi - Q_{\xi_1}$ ,  $\tilde{M}_y = M_y - M_{y1}$ .

Залежності (17) та (18) складають системи диференціальних рівнянь, які виражають умови рівноваги нескінченно малої ділянки криволінійного бруса у природній криволінійній системі координат.

**Залежності між внутрішніми силовими факторами та напруженнями.** Внутрішні силові фактори у розглядуваному випадку плоского згину криволінійного бруса, є компонентами головного вектора та моменту системи елементарних зусиль  $\sigma_\eta dA$  та  $\tau_{\xi\eta} dA$  (рис. 4). Залежності між даними зусиллями і внутрішніми силовими факторами отримаємо розглянувши нескінченно малий елемент поперечного перерізу бруса, виділений в околі деякої точки  $B(\eta, \xi)$ .

Виходячи з умов рівноваги, елементарні складові внутрішніх силових факторів  $dN_\eta$ ,  $dQ_\xi$  та  $dM_y$ , що відповідають зусиллям  $\sigma_\eta dA$  та  $\tau_{\xi\eta} dA$ , дорівнюватимуть:

$$\begin{aligned} dN_\eta &= (\sigma_\eta \cos(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha) - \tau_{\eta\xi} \sin(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha)) dA, \\ dQ_\xi &= (\sigma_\eta \sin(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha) + \tau_{\eta\xi} \cos(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha)) dA, \\ dM_y &= ((\sigma_\eta \cos \alpha + \tau_{\eta\xi} \sin \alpha) h_{CB}^x + (\sigma_\eta \sin \alpha - \tau_{\eta\xi} \cos \alpha) h_{CB}^z) dA. \end{aligned} \quad (19)$$

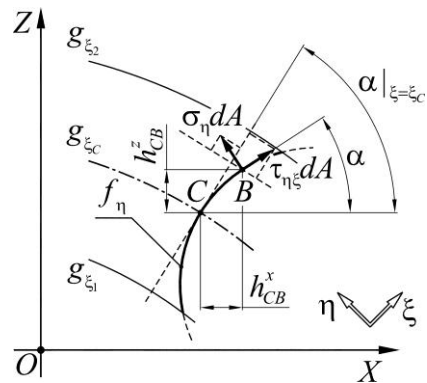


Рис. 4. Елементарні зусилля у точці поперечного перерізу криволінійного бруса

Окремі величини, що входять до (19) із урахуванням (2) та (12) запишуться так:

$$h_{CB}^x = \omega_x - \omega_x |_{\xi=\xi_C}, \quad h_{CB}^z = \omega_z - \omega_z |_{\xi=\xi_C}, \quad dA = dyds_\eta = L_\xi dyd\xi. \quad (20)$$

Інтегруючи співвідношення (19), із урахуванням (20) отримуємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} N_\eta &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{v_1}^{v_2} \left( L_\xi \left( \sigma_\eta \cos(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha) - \tau_{\eta\xi} \sin(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha) \right) \right) dyd\xi, \\ Q_\xi &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{v_1}^{v_2} \left( L_\xi \left( \sigma_\eta \sin(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha) + \tau_{\eta\xi} \cos(\alpha |_{\xi=\xi_C} - \alpha) \right) \right) dyd\xi, \\ M_y &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{v_1}^{v_2} \left( L_\xi \left( (\sigma_\eta \sin \alpha - \tau_{\eta\xi} \cos \alpha) (\omega_z - \omega_z |_{\xi=\xi_C}) + (\sigma_\eta \cos \alpha + \tau_{\eta\xi} \sin \alpha) (\omega_x - \omega_x |_{\xi=\xi_C}) \right) \right) dyd\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

Сумісне використання співвідношень (21), (7) та (14) дозволяє встановити інтегральний зв'язок між напруженнями у поперечних перерізах криволінійного бруса та його зовнішнім навантаженням, що може бути корисним у ході розв'язання задач прикладної теорії пружності для таких елементів.

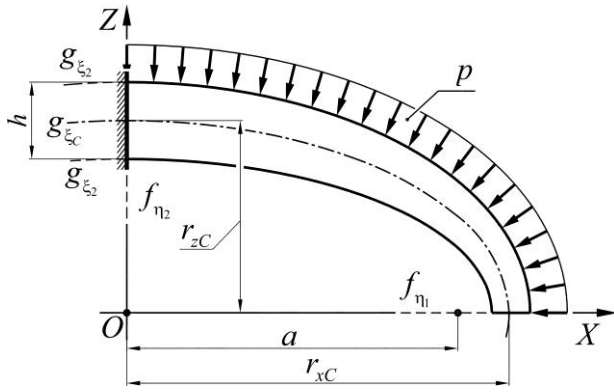


Рис. 5. Схема еліптичного бруса

**Приклад реалізації співвідношень.**

Як приклад реалізації отриманих співвідношень наведемо основні результати визначення внутрішніх силових факторів для консольного еліптичного бруса під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження  $p_\xi^{\Pi_2} = -p$  (рис. 5). Усі волокна бруса належать однопараметричному сімейству конфокальних еліпсів із фокусною відстанню  $2a$ . Довжина великої півосі центральної осі бруса  $r_{x_c}$ , довжина малої півосі –  $r_{z_c}$ . Брус має прямокутний поперечний переріз шириною  $b$  по усій довжині. Висота

перерізу змінюється по довжині і дорівнює  $h$  у закріпленому перерізі з координатою  $\eta_2$ .

Для такого бруса природною є циліндрична еліптична система координат. Залежності між координатами точок у прямокутній та циліндричній еліптичній системі координат виражаються співвідношеннями:

$$x = \omega_x = a \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = Y = y, \quad z = \omega_z = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \quad (22)$$

Довжини півосей еліпсів, що належать твірному однопараметричного сімейству  $g_\xi$  природної системи координат:

$$r_x = a \operatorname{ch} \xi, \quad r_z = a \operatorname{sh} \xi. \quad (23)$$

Параметри та коефіцієнти циліндричної еліптичної системи координат згідно з [3]:

$$\kappa = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial \omega_z}{\partial \xi} / \frac{\partial \omega_x}{\partial \xi} = \frac{\operatorname{tg} \eta}{\operatorname{th} \xi}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \eta}{\operatorname{th} \xi} \right), \quad L_\xi = L_\eta = \sqrt{1 + \kappa^2} \left| \frac{\partial \omega_z}{\partial \eta} \right| = a \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}. \quad (24)$$

Координати  $\xi_C$ ,  $\xi_1$  та  $\xi_2$  можна визначити за залежностями (23):

$$\xi_C = \operatorname{Arch}(r_{x_c}/a), \quad \xi_{1,2} = \operatorname{Arsh}((r_{z_c} \mp h/2)/a). \quad (25)$$

За третьою залежністю (24) та кутами нахилу торців  $T_1$  і  $T_2$  встановлені їх координати:

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = \pi/2. \quad (26)$$

Підставивши (15) та (24) до співвідношень (7) і виконавши перетворення отримуємо:



$$N_{\eta} = \frac{pba}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \eta + \operatorname{th}^2 \xi_C}} \left( (1 - \cos \eta) \operatorname{th} \xi_C \operatorname{ch} \xi_2 - \operatorname{tg} \eta \sin \eta \operatorname{sh} \xi_2 \right),$$

$$Q_{\xi} = \frac{pba}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \eta + \operatorname{th}^2 \xi_C}} \left( (\operatorname{tg} \eta - \sin \eta) \operatorname{ch} \xi_2 + \sin \eta \operatorname{th} \xi_C \operatorname{sh} \xi_2 \right), \quad (27)$$

$$M_y = -\frac{pba^2}{2} \left( 2 \cos \eta (1 - \cos \eta) \operatorname{ch} \xi_C \operatorname{ch} \xi_2 - \sin^2 \eta (1 + 2 \operatorname{sh} \xi_C \operatorname{sh} \xi_2) \right).$$

На рис. 6 наведені епюри внутрішніх силових факторів побудовані згідно з (27) для випадку, коли  $p = 4 \text{ МПа}$ ,  $b = 10 \text{ мм}$ ,  $h = 40 \text{ мм}$ ,  $r_{x_C} = 0.2 \text{ м}$ ,  $r_{z_C} = 0.1 \text{ м}$ .

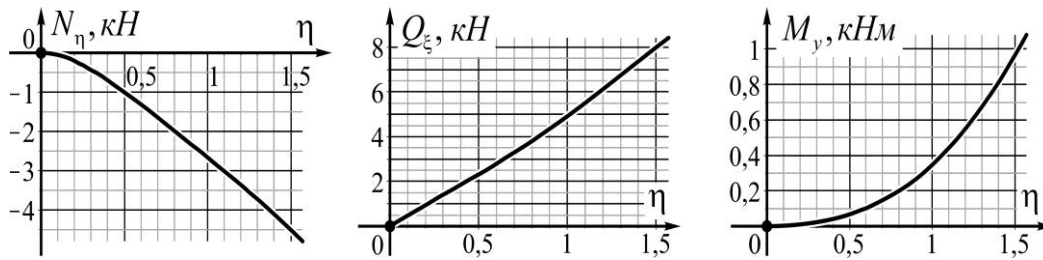


Рис. 6. Епюри внутрішніх силових факторів у консолі із еліптичною віссю

Як можна побачити отримані графіки розподілу внутрішніх силових факторів мають очікуваний характер розподілу та знаки.

**Висновок.** Таким чином, отримано загальні співвідношення (7), (9), (14), (15), (17), (18) та (21), які розкривають інтегральний та диференціальний зв'язки між внутрішніми силовими факторами, зовнішнім навантаженням поздовжніх граней та торців і напруженнями у поперечних перерізах криволінійного бруса із плоскою віссю довільної форми, у випадку плоского згину. Залежності отримані у природній, для будови бруса, криволінійній циліндричній системі координат, тому їх форма є інваріантною по відношенню до форми осі бруса, що дозволяє узагальнити запис рівнянь внутрішніх силових факторів. Отримані співвідношення можуть бути використані у ході розв'язання різних теоретичних та прикладних задач пружного деформування криволінійних брусів із плоскою віссю довільної форми.

### Література

1. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко и др. Под редакцией Г.С. Писаренко. – К.: Вища школа, 1979. – 696 с.
2. Светлицкий В.А. Механика стержней. В 2-х ч. Часть 1. Статика / В.А. Светлицкий. – М.: «Высшая школа», 1987. – 320 с.
3. Ковальчук С.Б. Природна криволінійна циліндрична система координат для стержнів із плоскою віссю довільної форми / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса: ОДАБА, 2017. – Вип. №68. – С. 31-38.

Стаття надійшла 27.02.2018