

**ДО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТОВСТИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ
ОБОЛОНОК ПІД ДІЄЮ БОКОВОГО ТИСКУ В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ****Семенюк М.П.**, д.т.н., професор,*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ, м. Київ, Україна*

mikolasem@ukr.net, ORCID ID: 0000-0001-5711-4277

Грач В.М., д.т.н., професор,*Warsaw University of Life Sciences, Poland, Warsaw*

trach-vm@ukr.net, ORCID ID: 0000-0001-9500-2743

Подворний А.В., к.т.н., доцент,*Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне*

andrei_podvornyi@ukr.net, ORCID ID: 0000-0001-8518-4395

Анотація. Запропонований підхід, що дозволяє розв'язувати задачу про напружений стан шаруватих товстих циліндричних анізотропних оболонок під дією зовнішнього або внутрішнього бокового тиску. Матеріал конструкцій має одну площину пружної симетрії, що обумовлено поворотом головних напрямків пружності вихідного ортотропного матеріалу відносно твірної оболонок. Для розв'язку задачі напруженого стану використовується система диференціальних рівнянь, що базується на тривимірних співвідношеннях теорії пружності. Розв'язок цієї системи спирається на використання процедури Бубнова-Гальоркіна та чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Ключові слова: напружено-деформований стан, анізотропна оболонка, тривимірна теорія.

Введення. Товсті оболонки використовуються в якості конструктивних елементів у автомобільній, авіаційно-космічній, кораблебудівній промисловості та будівництві. Загально прийнято, що найважливішим параметром при оцінці несучої здатності таких конструкцій є їх міцність. Це особливо важливо в умовах застосування сучасних композитних матеріалів, коли необхідно поєднати міцність зі зменшенням матеріаломісткості конструктивних елементів. Зазначене призводить до необхідності встановлення реального напруженого стану товстих оболонок.

Розв'язанню задач про напружений стан композитних оболонок в просторовій постановці присвячені роботи [1-12]. Їх аналіз вказує, що навіть для ізотропних й ортотропних матеріалів розв'язання задач про напружено-деформований стан пов'язане зі значними труднощами. В значній мірі, це обумовлено складністю системи вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних і необхідністю виконання крайових умов на обмежуючих пружне тіло поверхнях. Математичні складнощі істотно зростають в разі використання в оболонках матеріалу, що має одну площину пружної симетрії. Наявність зазначеного типу анізотропії зумовлює появу ефектів в розподілі напружень і переміщень, які не мають місця в розрахунках ортотропних оболонок.

Дослідженню таких ефектів присвячена, наприклад, робота [7], де приведені загальні рівняння теорії пружної рівноваги, які встановлюють параметри напружених станів відповідного виду анізотропії матеріалу. Приводиться математичне формулювання задач про напружений стан пружного анізотропного циліндра нескінченної довжини при дії осьового стиску, кручення, згину. У дослідженнях [2-4] викладені основні залежності і відповідні методики знаходження параметрів, що описують напружено-деформований стан оболонок в просторовій постановці. Детальний аналіз розрахунку оболонкових конструкцій на стійкість з ортотропних матеріалів в тривимірній постановці приведений в роботі [5].

Мета та завдання. У даній роботі представлено підхід до розв'язання задачі напруженого стану товстих циліндричних анізотропних оболонок в просторовій постановці на основі

співвідношень теорії пружності, представлених в роботі [8]. Розв'язок задачі про напружений стан таких конструкцій, що знаходяться під дією під дією рівномірного бокового тиску, спирається на використання методів Бубнова-Гальоркіна та дискретної ортогоналізації, що дозволяє отримувати необхідні його характеристики в будь-якій точці за товщиною й довжиною оболонки. При цьому моделюванні матеріал, з якого виготовляється циліндрична анізотропна оболонка, описується як такий, що має одну площину пружної симетрії.

Постановка задачі. Розглядається задача про напружений стан неоднорідного за товщиною анізотропного товстого циліндра, матеріал кожного шару якого має одну площину пружної симетрії. На його поверхні та торці можуть бути накладені певні види граничних умов.

В якості вихідних, приймаються співвідношення теорії пружності анізотропного неоднорідного тіла в циліндричній системі координат r, z, θ . Вісі r та θ яких є полярними координатами колового поперечного перерізу, z – нормальна до цього перерізу вісь, початок якої збігається з центром ваги одного з торців оболонки. Матеріал шарів конструкцій має одну площину пружної симетрії, що обумовлено поворотом головних напрямків пружності вихідного ортотропного матеріалу щодо осі z розглядуваної системи координат, рис. 1. Геометрія циліндра визначається довжиною його твірної L , а також радіусами внутрішньої r_1 і зовнішньої r_2 поверхонь. Оболонка знаходиться в полі дії розподіленого бокового тиску.

Лінеаризовані рівняння рівноваги, в разі невісесиметричного напруженого стану, для кожного i -го шару запишемо у вигляді [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\sigma_{rr}^i + r \frac{\partial (\tau_{zr}^i)}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_{\theta r}^i)}{\partial \theta} - \sigma_{\theta\theta}^i + r F_r^i \right]; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\tau_{rz}^i + r \frac{\partial (\sigma_{zz}^i)}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_{\theta z}^i)}{\partial \theta} + r F_z^i \right]; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\tau_{r\theta}^i + \tau_{\theta r}^i + r \frac{\partial (\tau_{z\theta}^i)}{\partial z} + \frac{\partial (\sigma_{\theta\theta}^i)}{\partial \theta} + r F_\theta^i \right], \end{aligned} \quad (1)$$

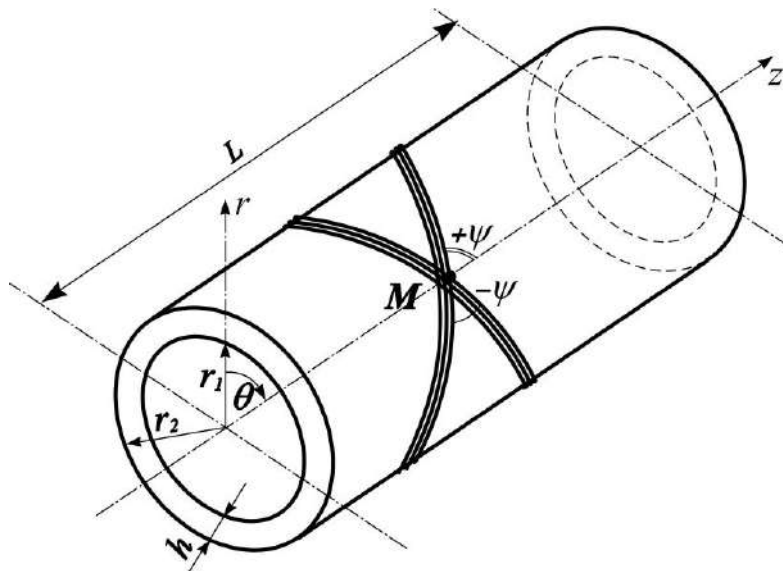


Рис. 1. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка

де r_i ($i=1, 2$) – радіус циліндра, який не залежить від координат z та θ ; $\sigma_{zz}^i, \sigma_{rr}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i, \tau_{z\theta}^i$ – компоненти тензора напружень, F_r^i, F_z^i, F_θ^i – проекції вектора питомих об'ємних сил на напрямки дотичних до координатних ліній r, z, θ .

Зв'язок між складовими деформацій і переміщеннями прийемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 e_{zz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; & e_{\theta\theta}^i &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^i; \\
 e_{rr}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; & e_{z\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}; \\
 e_{rz}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; & e_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Тут u_z^i, u_θ^i, u_r^i – переміщення в напрямку осей z, θ, r відповідно.

Співвідношення узагальненого закону Гука, що пов'язують компоненти деформацій і напружень в разі збігу осей ортотропії з координатними запишемо:

$$\begin{aligned}
 e_{zz}^i &= a_{11}^{i'} \sigma_{zz}^i + a_{12}^{i'} \sigma_{\theta\theta}^i + a_{13}^{i'} \sigma_{rr}^i; \\
 e_{\theta\theta}^i &= a_{12}^{i'} \sigma_{zz}^i + a_{22}^{i'} \sigma_{\theta\theta}^i + a_{23}^{i'} \sigma_{rr}^i; \\
 e_{rr}^i &= a_{13}^{i'} \sigma_{zz}^i + a_{23}^{i'} \sigma_{\theta\theta}^i + a_{33}^{i'} \sigma_{rr}^i; \\
 e_{r\theta}^i &= a_{44}^{i'} \tau_{r\theta}^i; \\
 e_{rz}^i &= a_{55}^{i'} \tau_{rz}^i; \\
 e_{z\theta}^i &= a_{66}^{i'} \tau_{z\theta}^i.
 \end{aligned} \tag{3}$$

При повороті осей ортотропії навколо осі z ці залежності перепишуться:

$$\begin{aligned}
 e_{zz}^i &= a_{11}^i \sigma_{zz}^i + a_{12}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{13}^i \sigma_{rr}^i + a_{16}^i \tau_{z\theta}^i; \\
 e_{\theta\theta}^i &= a_{12}^i \sigma_{zz}^i + a_{22}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{23}^i \sigma_{rr}^i + a_{26}^i \tau_{z\theta}^i; \\
 e_{rr}^i &= a_{13}^i \sigma_{zz}^i + a_{23}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{33}^i \sigma_{rr}^i + a_{36}^i \tau_{z\theta}^i; \\
 e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i; \\
 e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; \\
 e_{z\theta}^i &= a_{16}^i \sigma_{zz}^i + a_{26}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{36}^i \sigma_{rr}^i + a_{66}^i \tau_{z\theta}^i.
 \end{aligned} \tag{4}$$

В (3, 4) $a_{kl}^{i'}$ та a_{kl}^i – механічні константи i -го шару, відповідно, ортотропного і матеріалу з однією площиною пружної симетрії, зв'язок між якими встановлено у [7].

Матеріали та методика дослідження. Співвідношення узагальненого закону Гука, для матеріалу з однією площиною пружної симетрії (4), приведемо до виду [3], який використаємо при розв'язку системи (1):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^i &= b_{11}^i e_{zz}^i + b_{12}^i e_{\theta\theta}^i + b_{16}^i e_{z\theta}^i + c_1^i \sigma_{rr}^i; \\
 \sigma_{\theta\theta}^i &= b_{12}^i e_{zz}^i + b_{22}^i e_{\theta\theta}^i + b_{26}^i e_{z\theta}^i + c_2^i \sigma_{rr}^i; \\
 \tau_{z\theta}^i &= b_{16}^i e_{zz}^i + b_{26}^i e_{\theta\theta}^i + b_{66}^i e_{z\theta}^i + c_3^i \sigma_{rr}^i; \\
 e_{rr}^i &= -c_1^i e_{zz}^i - c_2^i e_{\theta\theta}^i - c_3^i e_{z\theta}^i + c_4^i \sigma_{rr}^i; \\
 e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; \\
 e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i,
 \end{aligned} \tag{5}$$

де $b_{kl}^i (k, l = 1, 2, 6), c_k^i (k = 1 \div 4)$ – характеристики, що визначаються за допомогою механічних констант a_{kl}^i матеріалу оболонки.

Замінюючи в (5) деформації $e_{zz}^i, e_{\theta\theta}^i, e_{z\theta}^i$ їх виразами з (2) і підставляючи отримані залежності для $\sigma_{zz}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \tau_{z\theta}^i$ в (1), а для $e_{rz}^i, e_{r\theta}^i, e_{rr}^i$ в (2) отримуємо для кожного i -го шару повну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= \frac{c_2 - 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{b_{22}}{r^2} u_r^i + \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \\
 \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{11} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{b_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} - \\
 &- \frac{c_3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2b_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - b_{16} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2}; \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= -\frac{c_2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - b_{66} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} - \\
 &- c_3 \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{16} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{2b_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta}; \\
 \frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_4 \sigma_{rr}^i - \frac{c_2}{r} u_r^i - c_1 \frac{\partial u_z^i}{\partial z} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} - c_3 \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} - \frac{c_2}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \\
 \frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55} \tau_{rz}^i + a_{45} \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \\
 \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45} \tau_{rz}^i + a_{44} \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Розв'язок системи (6) має відповідати умовам на бічних поверхнях при $r = r_1, r = r_2$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^1(r_1, z) &= \pm q_r^1(z); & \sigma_{rr}^1(r_1, z) &= f_1^1(z); & \tau_{r\theta}^1(r_1, z) &= 0; \\
 \sigma_{rr}^2(r_2, z) &= \pm q_r^2(z); & \tau_{rz}^2(r_2, z) &= 0; & \tau_{r\theta}^2(r_2, z) &= 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

умовам жорсткого контакту шарів:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\
 u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i).
 \end{aligned} \tag{8}$$

і умовам на торцях: $z = 0, z = L$

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0. \tag{9}$$

Умови (9) відповідають наявності на краях циліндра діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині і гнучкої з неї. В (7) $q_r^1(z), q_r^2(z)$ – розподілений по поверхнях оболонки внутрішній і зовнішній тиск відповідно.

Для розв'язку тривимірної задачі скористаємося процедурою методу Бубнова-Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди за координатою вздовж твірної циліндра z так, що б вони задовольняли крайовим умовам (9), а також врахуємо періодичності функцій за коловою координатою θ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1, pk}^i(r) \cos k\theta + y_{1', mk}^i(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
 \tau_{rz}^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2, pk}^i(r) \cos k\theta + y_{2', mk}^i(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
 \tau_{r\theta}^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3, pk}^i(r) \sin k\theta + y_{3', mk}^i(r) \cos k\theta] \sin l_m z; \\
 u_r^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4, pk}^i(r) \cos k\theta + y_{4', mk}^i(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\
 u_z^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{5, pk}^i(r) \cos k\theta + y_{5', mk}^i(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\
 u_\theta^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{6, pk}^i(r) \sin k\theta + y_{6', mk}^i(r) \cos k\theta] \sin l_m z,
 \end{aligned} \tag{10}$$

де $y_{i,pk}, y_{i,mk}^{\prime}$ ($i = \overline{1,6}$) – компоненти розкладання в тригонометричні ряди Фур'є складових напружено-деформованого стану оболонки, p, m – хвильові числа в рядах.

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (6) за допомогою співвідношень (10), отримуємо для кожного i -го шару систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку в нормальній формі Коші:

$$\frac{dy^i}{dr} = T^i(r)y^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r); \quad (n, l = 1 \div 12), \quad (11)$$

де $y^i = \{y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^i; y_{2,m}^i; y_{3,m}^i; y_{4,m}^i; y_{5,m}^i; y_{6,m}^i\}$ – розв'язуюча вектор-функція. Ненульові елементи якої записуються відповідно до [10].

Реалізація отриманої одновимірної задачі про напружений стан товстого циліндра система рівнянь (11) при граничних умовах (7) проводиться при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації [4]. Після розв'язку системи (11), для переходу від отриманих функцій до додаткових компонентів напруженого стану використовуємо співвідношення (5).

Алгоритм розв'язку задачі про напружений стан товстих анізотропних циліндричних оболонок, які знаходяться під дією розподілених по боковій поверхні навантажень, реалізований у вигляді пакетів прикладних програм для персонального комп'ютера.

При тестуванні результатів розв'язання задачі про напружений стан товстих циліндрів під розподіленим бічним тиском, отримані значення напружень порівнювалися з такими, що приведені в [3].

Розглядався напружений стан ортотропної оболонки навантаженої на зовнішній поверхні розподіленим тиском $q = -q_0 \sin \frac{\pi}{L} z$. Розрахунки виконані для геометричних параметрів: $r_1 = 0.09\text{м}$, $r_2 = 0.11\text{м}$, $L = 0.1\text{м}$; при таких значеннях механічних характеристик матеріалу: $E_z = 1.9 E_0$, $E_\theta = 1.2 E_0$, $E_r = 0.45 E_0$, $G_{z\theta} = 0.3 E_0$, $G_{r\theta} = 0.23 E_0$, $G_{rz} = 0.23 E_0$, $\nu_{z\theta} = 0.15$, $\nu_{r\theta} = 0.3$, $\nu_{rz} = 0.07$, $E_0 = 1000\text{МПа}$. У таблиці 1 приведено порівняння отриманих відповідно до запропонованої моделі величин напружень з представленими в [3].

У табл. 1 всі значення напружень віднесені до навантаження q_0 . Аналіз результатів розрахунків представлених в табл. 1 свідчить про задовільну збіжність вирахованих параметрів напруженого стану ортотропного циліндра, знайдених за запропонованою методикою, і співставлених з значеннями напружень, що приведені в роботі [3]. Максимальна розбіжність між величинами напружень σ_{zz} , отриманими за двома підходами, не перевищує 8%.

Таблиця 1 – Порівняння результатів визначення напруженого стану зі значеннями [3]

$\frac{r-r_1}{r_2-r_1}$	σ_{zz}/q_0		$\sigma_{\theta\theta}/q_0$		σ_{rr}/q_0	
	[3]	Пропонований підхід	[3]	Пропонований підхід	[3]	Пропонований підхід
0	4.89	5.02	-0.355	-0.353	0	0
0.2	2.71	2.83	-0.374	-0.370	-0.187	-0.187
0.4	0.94	1.02	-0.393	-0.386	-0.407	-0.408
0.6	-0.7	-0.69	-0.414	-0.404	-0.632	-0.634
0.8	-2.42	-2.53	-0.437	-0.426	-0.838	-0.839
1.	-4.44	-4.77	-0.463	-0.455	-1	-1

Результати досліджень. В якості реалізації запропонованого підходу розглянуто двохаровий циліндр утворений перехресним укладанням шарів однакової товщини, що знаходиться під дією зовнішнього рівномірного бокового тиску. Геометричні характеристики оболонки такі: $r_1 = 0.55\text{м}$, $r_2 = 0.65\text{м}$, $L = 2.4\text{м}$. Матеріалом циліндра є склопластик з фізико-

механічними характеристиками: $E_{11}=445E_0$, $E_{22}=107E_0$, $E_{33}=107E_0$, $G_{12}=G_{13}=41.8E_0$, $G_{23}=84.8E_0$, $\nu_{21}=0.26$, $\nu_{12}=0.0628$, $\nu_{32}=0.2$, $\nu_{31}=0.26$, $E_0=1.0 \cdot 10^2$ МПа. Навантаження прикладене до зовнішньої поверхні у вигляді розподіленого тиску $q = -q_0 \sin \frac{\pi}{L} z$. Вирахувані напруження σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rr} , $\tau_{z\theta}$, τ_{rz} та $\tau_{r\theta}$ за товщиною оболонки для координати твірної $z=0.5L$ та кутів повороту головних напрямків пружності матеріалу $\psi = +70^\circ$ внутрішнього шару та $\psi = -70^\circ$ – зовнішнього, що формують пакет оболонки, представлені на рис. 2 відповідними графіками. На ньому введені такі позначення: крива 1 відповідає напрузі σ_{zz} , далі відповідно: 2 – $\sigma_{\theta\theta} \cdot 10^{-1}$, 3 – σ_{rr} , 4 – $\tau_{z\theta}$, 5 – τ_{rz} , 6 – $\tau_{r\theta}$.

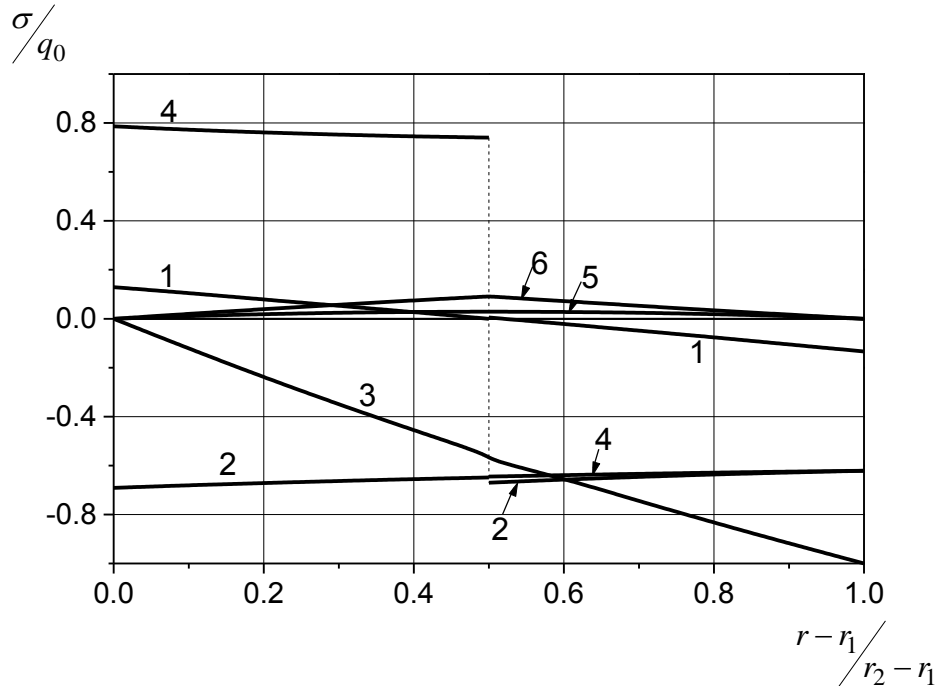


Рис. 2. Розподіл напружень за товщиною двошарового циліндра при $\psi = \pm 70^\circ$

З рис. 2 видно, що значення напружень σ_{rr} посередині довжини твірної оболонки плавно змінюються по товщині від величини $-q_0$ на зовнішній поверхні до нуля на внутрішній. Величини напружень τ_{rz} та $\tau_{r\theta}$ розподіляються уздовж стінки циліндра за параболічним законом. Напруження σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$ та $\tau_{z\theta}$ на межі контакту шарів стрибкоподібно змінюють свої значення, на що вказано в [2, 3]. σ_{zz} у внутрішньому шарі циліндра додатні приймають від’ємні значення у зовнішньому. Величини найбільш значущих напружень $\sigma_{\theta\theta}$ не суттєво змінюються уздовж товщини стінки двошарової оболонки, зміни складають порядку 11%-12%. Найсуттєвішою є зміна величин дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ на межі контакту шарів.

Висновки та перспективи подальших досліджень. У представленій роботі запропоновано підхід для розв’язку задачі про напружений стан товстих циліндричних анізотропних оболонок в тривимірній постановці, що спирається на метод Бубнова-Гальоркіна і який дозволяє привести задачу до одновимірної. Чисельна реалізація останньої проводиться при використанні методу дискретної ортогоналізації. Порівняння отриманих результатів за пропонованою методикою з наведеними в літературі [3], вказує на задовільну збіжність результатів параметрів напруженого стану ортотропного товстого циліндра й дозволяє стверджувати про достовірність отримуваних параметрів напруженого стану

товстої анізотропної циліндричної оболонки.

Як витікає з проведених розрахунків напруженого стану товстого циліндра та з рис. 2, запропонований авторами підхід дозволяє реалізовувати в тривимірній постановці задачі про напружено-деформований стан неоднорідних у радіальному напрямку циліндрів, з матеріалів з однією площиною пружної симетрії, при дії розподілених бокових навантажень, в широкому діапазоні зміни геометричних і механічних характеристик шарів пакету.

Література

1. Александров А.Я. Пространственные задачи теории упругости / А.Я. Александров, Ю.И. Соловьев. – М.: Наука, 1978. – 462 с.
2. Григоренко Я.М. Задачи теории упругости неоднородных тел / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
3. Григоренко Я.М. Статика анизотропных толстостенных оболочек / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, Н.Д. Панкратова. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1985. – 190 с.
4. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я.М. Григоренко, Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
5. Гузь А.Н. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек / А.Н. Гузь, И.Ю. Бабич. – Киев: Вища школа, 1980. – 168 с.
6. Колтунов М.А. Прочность полых цилиндров / М.А. Колтунов, Ю.Н. Васильев, Д.А. Пасько. – М.: Машиностроение, 1981. – 264 с.
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
8. Новожилов В.В. Теория упругости / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
9. Новожилов В.В. Линейная теория тонких оболочек / В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, Е.И. Михайловский. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
10. Подворный А.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек при распределенном внешнем давлении в пространственной постановке / А.В. Подворный, Н.П. Семенюк, В.М. Трач // Прикладная механика, 2017. – т.53 (63). – №6. – С. 23–39.
11. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гедьер. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
12. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости / А.Ф. Улитко. – Киев: Наук. думка, 1979. – 264 с.

References

1. Aleksandrov A.Ya., Solovev Yu.I. Prostranstvennyie zadachi teorii uprugosti [Spatial tasks of the theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1978.
2. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. Zadachi teorii uprugosti neodnorodnyih tel [Tasks of the theory of elasticity of non-uniform bodies]. Kiev: Naukova dumka, 1991.
3. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. Statika anizotropnyih tolstostennyih obolochek [Statics of anisotropic thick-walled shells]. Kiev: Vischa shkola. Golovnoe izd-vo, 1985.
4. Grigorenko Ya.M., Vlaykov G.G., Grigorenko A.Ya. Chislenno-analiticheskoe reshenie zadach mehaniki obolochek na osnove razlichnyih modeley [The numerical and analytical solution of problems of mechanics of shells on the basis of various models]. Kiev: Akademperiodika, 2006.
5. Guz A.N., Babich I.Yu. Trehmernaya teoriya ustoychivosti stержней, пластин i obolochek [Three-dimensional theory of stability of cores, plates and shells]. Kiev: Vischa shkola, 1980.
6. Koltunov M.A., Vasilev Yu.N., Pasko D.A. Prochnost polyih tsilindrov [Durability of hollow cylinders]. Moscow: Mashinostroenie, 1981.
7. Lehnitskiy S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of an anisotropic

body]. Moscow: Nauka, 1977.

8. Novozhilov V.V. Teoriya uprugosti [Elastic theory]. Leningrad: Sudpromgiz, 1958.

9. Novozhilov V. V., Chernyih K. F., Mihaylovskiy E. I. Lineynaya teoriya tonkih obolochek [Linear theory of thin shells]. Leningrad: Politehnika, 1991.

10. Podvorniy A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Ustojchivost' neodnorodnyh cilindricheskikh obolochek pri raspredelennom vneshnem davlenii v prostranstvennoy postanovke [Stability of Inhomogeneous Cylindrical Shells Under Distributed External Pressure in a Three-Dimensional Statement], International Applied Mechanics, Vol.53 (63), no 6, pp. 23–39, 2017.

11. Timoshenko S.P., Geder Dzh. Teoriya uprugosti [Elastic theory]. Moscow: Nauka, 1975.

12. Ulitko A.F. Metod sobstvennykh vektornykh funktsij v prostranstvennykh zadachah teorii uprugosti [Method of own vector functions in spatial tasks of the theory of elasticity]. Kiev: Naukova dumka, 1979.

К НАПРЯЖЕННОМУ СОСТОЯНИЮ ТОЛСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ БОКОВОГО ДАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Семенюк Н.П., д.т.н., профессор,
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, г. Киев, Украина
mikolasem@ukr.net, ORCID ID: 0000-0001-5711-4277

Трач В.М., д.т.н., профессор
Warsaw University of Life Sciences, Poland, Warsaw
trach-vm@ukr.net, ORCID ID: 0000-0001-9500-2743

Подворный А.В., к.т.н., доцент
Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно
andrei_podvorni@ukr.net, ORCID ID: 0000-0001-8518-4395

Аннотация. Исследовались толстостенные оболочки, которые могут быть использованы в качестве конструктивных элементов в автомобильной, авиационно-космической, кораблестроительной промышленности и строительстве. Важнейшим параметром при оценке несущей способности таких конструкций является их прочность. Это особенно важно в условиях применения современных композитных материалов, когда необходимо совместить прочность с уменьшением материалоемкости конструктивных элементов. Это приводит к необходимости установления реального напряженного состояния толстых оболочек.

Предложен подход, позволяющий решать задачу о напряженно деформированном состоянии слоистых толстых цилиндрических анизотропных оболочек под действием внешнего или внутреннего бокового давления в трехмерной постановке. Материал конструкций имеет одну плоскость упругой симметрии, что обусловлено поворотом главных направлений упругости исходного ортотропного материала относительно образующей оболочек. Для решения задачи о напряженно деформированном состоянии используется система линеаризованных дифференциальных уравнений равновесия, основанная на трехмерных соотношениях теории упругости. При использовании зависимостей между составляющими деформаций и перемещениями, а также соотношений обобщенного закона Гука получена система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая напряженно деформированное состояние цилиндрической оболочки.

Решение полученной системы опирается на использование процедуры Бубнова-Галеркина и численного метода дискретной ортогонализации, что позволяет получать необходимые характеристики напряженно деформированного состояния в любой точке по толщине и длине оболочки.

Алгоритм решения задачи о напряженном состоянии толстых анизотропных цилиндрических оболочек, находящихся под действием распределенных по боковой поверхности нагрузок, реализован в виде пакетов прикладных программ для персонального

компьютера.

Проведено тестирование полученных результатов напряженного состояния толстостенных цилиндров с решениями, приведенными в литературе, показавшее хорошую сходимость результатов.

В качестве реализации предложенного подхода рассмотрено напряженное состояние двухслойной анизотропной цилиндрической оболочки. Результаты исследования представлены в виде графиков.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, анизотропная оболочка, трехмерная теория.

TENSION OF THICK ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS UNDER THE INFLUENCE OF SIDE PRESSURE IN SPATIAL STATEMENT

Semenuk N.P., Doctor of Engineering, Professor,
S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, Kiev
mikolasem@ukr.net, ORCID ID: 0000-0001-5711-4277

Trach V.M., Doctor of Engineering, Professor,
Warsaw University of Life Sciences, Poland, Warsaw;
trach-vm@ukr.net, ORCID ID: 0000-0001-9500-2743

Podvorny A.V., PhD, Assistant Professor,
National University of Water and Environmental Engineering, Rivne
andrei_podvorny@ukr.net, ORCID ID: 0000-0001-8518-4395

Abstract. Thick-walled shells which can be used as structural elements in the automotive, aerospace, shipbuilding industry and construction were investigated. The major parameter of assessment of the bearing capacity of such structures is their durability. It is especially important in the conditions of application of modern composite materials when it is necessary to combine durability with reduction of material capacity of structural elements. It results in need to determine the real tension of thick shells.

The approach allowing to solve a problem about tensely deformed condition of layered thick cylindrical anisotropic shells under the influence of external or internal side pressure in three-dimensional statement is offered. The material of structures has one plane of elastic symmetry that is caused by the turn of the main directions of the elasticity of initial orthotropic material about shells forming. For the solution of a task on tensely deformed state the system of the linearized differential equations of balance based on three-dimensional ratios of the theory of elasticity is used. When using dependences between components of deformations and movements and also ratios of the generalized Hooke's law the system of the differential equations in private derivatives describing tensely deformed condition of a cylindrical shell has been received.

The solution of the received system relies on the use of the procedure of Bubnov-Galerkin and a numerical method of discrete orthogonalization that allows to receive necessary characteristics of tensely deformed state in any point on thickness and length of a shell.

The algorithm of the solution of a task on tension of the thick anisotropic cylindrical shells which are under the influence of the loadings distributed on a side surface is realized in the form of packages of application programs for the personal computer.

The testing of the received results of tension of thick-walled cylinders with the decisions provided in literature which has shown good convergence of results has been carried out.

As realization of the offered approach tension of a two-layer anisotropic cylindrical shell is considered. Results of the research are presented in the form of a graph.

Keywords: strain-deformed state, anisotropic shell, three-dimensional theory.

Стаття надійшла 5.07.2018