УДК 551.509.328 + 517.938

А.В.Глушков, *д.ф.-м.н.,* **Э.Н. Серга,** *к.геогр.н.*
Одесский государственный экологический университет

РЕНОРМ- ГРУППОВОЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОБЩЕЙ ДИНАМИКЕ АТМОСФЕРЫ

В работе впервые ренорм-групповой анализ в общей формулировке применен к анализу спектра турбулентности в общей динамике атмосферы.
***Ключевые слова**: ренорм-групповой анализ, спектр турбулентности, динамика атмосферы*

Введение. Общеизвестно, что уравнения гидродинамики относительно хорошо настраиваются на высокочастотные процессы в атмосфере типа эволюции циклонического образования в периоде до двух суток, но совершенно не способны хорошо описывать низкочастотные процессы типа смены форм циркуляции [1-4]. В то же время уравнения макротурбулентного режима атмосферы низкочастотны по своей основе и имеется определенный опыт их решения на основе ряда методов, в частности, спектрального и др. Метод решения этих уравнений в низкочастотном диапазоне используется для математического моделирования процессов смены форм циркуляции и соответственно для математической параметризации гомологов циркуляции [3-6]. Принципиально альтернативным подходом к исследованию спектра турбулентности в общей динамике атмосферы, по видимому, следует считать методы ренормализационной группы (РГ). Следует напомнить, что искомые методы РГ, первоначально развитые в квантовой теории поля, в последние годы находят применение и для описания развитой турбулентности. Дело в том, что РГ-подход является по существу способом описания многомодовых систем с большим диапазоном характерных масштабов и сильным межмодовым взаимодействием. Согласно известной гипотезе Кузьмина-Паташинского, такие системы проявляют тенденцию к локализации взаимодействия в пространстве волновых чисел (взаимодействуют моды приблизительно одинаковых масштабов) и каскадному механизму взаимодействия мод с существенно различающимися масштабами. При этом пространственно-временные свойства мод разных масштабов функционально подобны, т.е. различаются набором числовых параметров (так называемая функциональная автомодель) [7-13]. Естественно, именно к таким системам относится и развитая турбулентность. Как известно, первые попытки применения РГ-подхода для вычисления показателей степенного поведения (индексов скейлинга) статистических моментов турбулентных пульсаций поля скорости основывались на известной кадановской процедуре частичного итерационного усреднения и полевой формулировке метода РГ. Использование таких формулировок дало возможность определить только индексы скейлинга в инфракрасном пределе $k \to 0$, но не амплитудные коэффициенты.

В данной работе мы впервые наметим пути применения РГ-анализа к изучению спектра макротурбулентности в общей динамике атмосфере и подтвердим наличие эффекта перенормировки и соответствующего скейлинга. Поскольку в математическом аспекте рассматриваемая задача принципиально не отличается от ранее рассмотренных задач о турбулентных пульсациях космической плазмы, РГ-анализа в задачах атмосферной и гидроэкологии и др. (см. напр. [14-20]), естественно использовать ниже стандартную схему, оговаривая характерные для макродинамики атмосферы аспекты.

Исходные уравнения и процедура перенормировки. Естественно, исходным приближением следует рассматривать стандартную модель атмосферы с соответствующей системой стандартных атмосферных уравнений Навье-Стокса при наличии внешней силы. Как обычно, считается, что последняя представляет случайный процесс типа гауссова «белого шума». Далее реализуется стандартная процедура. Основные характеристики гидродинамического поля- давление p и составляющие вектора скорости v_i в точке $1=(r_1,t_1)$ следует рассматривать в пространстве d измерений как компоненты $(d+1)$- мерного вектора, согласно классическому определению [8]

$$\psi_\alpha(1)=\{\psi_0(1),\psi_i(1)\}=\{p(r_1,t_1),v_i(r_1,t_1)\},\\ \alpha=0,1,...d, i=1,2,...d. \tag{1}$$

В формализме «удвоения полей» (см., напр., [8-10,14]) рассматриваемая система задается действием:

$$S[\psi,\hat{\psi}]=S_0[\psi,\hat{\psi}]+\lambda_0 S_1[\psi,\hat{\psi}]:$$

$$S_0[\psi,\hat{\psi}]=-\hat{\psi}_\alpha(1)L_{\alpha\beta}(12)\psi_\beta(2)+(i/2)\hat{\psi}_\alpha(1)D_{\alpha\beta}(12)\hat{\psi}_\beta(2), \tag{2}$$

$$S_1[\psi,\hat{\psi}]=-1/2\hat{\psi}_\alpha(1)V_{\alpha\beta\gamma}(123)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3),$$

где линейная часть оператора Навье-Стокса $L_{\alpha\beta}$, корреляционная функция внешних случайных сил $D_{\alpha\beta}(12)$ и коэффициент $V_{\alpha\beta\gamma}(123)$ определяется соотношениями:

$$L_{\alpha\beta}(12)=\begin{bmatrix}0 & \partial_j^{(0)}\\ \partial_i^{(0)} & (\partial_t^{(1)}-v_0\Delta\delta_{ij})\end{bmatrix}\delta(1-2)$$

$$D_{ij}(12)=\delta_{ij}D(|r_1-r_2|)\delta(t_1-t_2), \tag{3}$$

$$V_{ijk}(123)=-[\delta_{ij}\partial_k^{(2)}+\delta_{ik}\partial_j^{(3)}]\delta(1-2)\delta(1-3),$$

где v_0 - коэффициент молекулярной вязкости; λ_0 - формальный параметр разложения (в конечном результате обычно полагается равным единице). Далее интересующие нас объекты рассмотрения– усредненный линейный отклик поля скорости на внешнее воздействие, функция Грина $G_{ij}(12)=i<\psi_i(1)\hat{\psi}_j(2)>$ и корреляционная функция $C_{ij}(12)=<\psi_1(1)\psi_2(2)>$. Классической теории возмущений соответствует представление характеристического функционала системы

$$\psi[\eta,\hat{\eta}]=\int d[\psi]d[\hat{\psi}]\exp\{i(S_0[\psi,\hat{\psi}]+\lambda_0 S_1[\psi,\hat{\psi}]+\eta\psi+\hat{\eta}\hat{\psi})\}$$

в виде разложения по степеням $\lambda_0 S_1$. Как обычно, разбиение действия на невозмущенную часть и возмущение выполняется с учетом конечной перенормировки амплитуд полей и физических параметров с добавлением в S_1 компенсирующих контрчленов. При этом независимость результата от выбора констант перенормировки соответствует фундаментальному требованию инвариантности по отношению к перенормировкам ряда теории возмущений. В системе (2), описывающей динамику возмущенной атмосферы, перенормировку амплитуды поля $\hat{\psi}$ и коэффициента вязкости легко ввести заменами вида [9,10]:

$$\hat{\psi}\to\hat{\psi}^R=z\hat{\psi},\quad \lambda_0\to\lambda=z^{-1}\lambda_0,\quad D\to D^R=z^{-2}D,\quad v_0\to v \tag{4}$$

и добавлению к S_1 контрчленов вида

$$\delta S_1=-(z_{-1}-\hat{1})\psi_i\partial_t\psi_i+(v_0 z^{-1}-\hat{v})\psi_i\Delta\psi_i. \tag{5}$$

Параметры перенормировки выбираются таким образом, чтобы в перенормированной теории полная функция Грина имела вид, хорошо известный в квантовой теории поля

$$G^R_{ij}(k,w) = P_{ij}(k)[-iw + vk^2 - \sum{}^R(k^2,w)]^{-1}, \quad (P_{ij}(k) = \delta_{ij} - k_i k_j k^{-2}) \tag{6}$$

в точке перенормировки $w = 0$, $k^2 = \mu^2$ совпадала со свободной функцией Грина. При этом, разумеется, накладывается условие выполнения соотношений

$$\sum{}^R(\mu^2, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial w}\sum{}^R(\mu^2, w)\,|_{w=0} = 0\,. \tag{7}$$

Фактически, искомый подход в несколько другом представлении применялся в ряде задач квантовой теории атома, квантовой геометрии (см., напр., [21,22]).

Ренорм-групповой анализ и выводы. В случае общей динамики атмосферы РГ-анализ проводится на основе стандартной процедуры. Как обычно, функция $D(k)$ далее представляется в виде

$$D(k) = D_0(k^2)^{-d/2+2-\varepsilon}\,. \tag{8}$$

Напомним, что при $\varepsilon = 2$ размерность параметра D_0 совпадает с размерностью скорости диссипации энергии в теории Колмогорова [7]. При $\varepsilon = 0$ имеет место логарифмическая расходимость оператора собственной энергии. В этой ситуации фактический параметр разложения в ряд теории возмущений пропорционален ε и процедура ε-разложения в теории турбулентности сводится к аналитическому продолжению по ε от логарифмической теории ($\varepsilon = 0$) к колмогоровской ($\varepsilon = 2$). И тот, и другой случаи являются на самом деле модельными. Истинно реальной ситуации (скажем, флуктуациям ключевых характеристик гидродинамического поля в реальной атмосфере), как показывает анализ, будут соответствовать нецелые значения $\varepsilon = \varepsilon_{real}$. Иллюстрацией такого положения в определенном смысле может служить приведенный на рис. 1 энергетический спектр для крупномасштабных атмосферных образований [15].

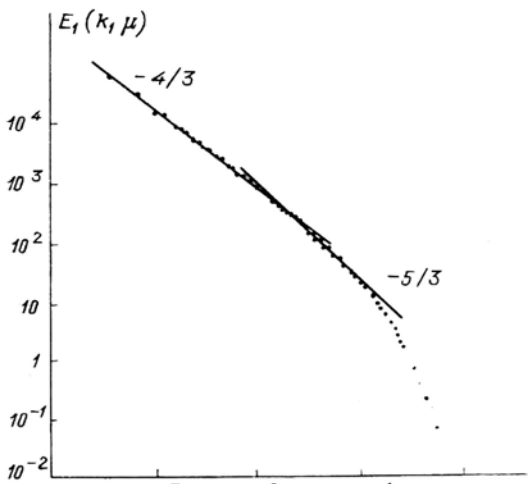

Рис. 1

Рис.1 – Энергетический спектр крупномасштабных атмосферных образований.

Разумеется, в реальной турбулентной атмосфере процессы переноса импульса осуществляются как молекулярным, так и турбулентным вихревым движением. Эффективная вязкость $\tilde{v}$ определяется обычным выражением [10]

$$G_{ij}^{-1}(k,w) = [-iw + \tilde{v}(k^2,w)k^2]\delta_{ij}. \tag{9}$$

В силу инвариантности по отношению к перенормировкам ренормированные функции Грина (для 2 различных точек нормировки μ и μ_1) связаны соотношением типа:

$$\begin{aligned} &z^{-1}(\mu^2)G^R(k,w;\mu^2) = z^{-1}(\mu_1^2)G^R(k,w;\mu_1^2),\\ &z(v,\lambda,D;\mu^2)[-iw + \tilde{v}(k^2,w,v,\lambda,D;\mu^2)k^2] =\\ &= z(v_1,\lambda_1,D_1;\mu_1^2)[-iw + \tilde{v}(k^2,w,v_1,\lambda_1,D_1;\mu_1^2)k^2]. \end{aligned} \tag{10}$$

Интересной характеристикой является и статистическая эффективная вязкость

$$\tilde{v}(k^2,v,\lambda,D;\mu^2) = \tilde{v}(k^2,w,v,\lambda,D;\mu^2)|_{w=0}. \tag{11}$$

Нетрудно увидеть, что условие изменения нормировки при переходе от одной точки нормировки к другой

$$Z(v,\lambda,D;\mu^2 \mid v_1,\lambda_1,D_1;\mu_1^2) = z(v_1,\lambda_1,D_1;\mu_1^2)z^{-1}(v,\lambda,D;\mu^2) \tag{12}$$

и соображения размерности приводят в заключению, что нормированная на 1 величина Z является функцией только безразмерного параметра $h = \lambda^2 D v^{-3}(\mu^2)^{-\varepsilon}$, отношения μ_1^2/μ^2 и удовлетворяет групповому правилу композиции

$$Z(\frac{\mu_1^2}{\mu^2},h_1) = Z(\frac{\mu_1^2}{\mu_1^2},h_2)Z^{-1}(\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2},h_2). \tag{13}$$

Функция $\tilde{h}$ в (13) по существу является аналогом инвариантного заряда в квантовой теории поля или топологический заряд векторного солитона, и удовлетворяет уравнению

$$\{-x\frac{\partial}{\partial x} + \beta(h)\frac{\partial}{\partial h}\}\tilde{h}(x,h) = 0, \beta(h) = \frac{\partial \tilde{h}(x,h)}{\partial x}|_{x=1}. \tag{14}$$

Для интересующего нас класса задач проблема сводится к определению оператора собственной энергии в низшем приближении ренормированной теории возмущений. Как обычно, искомый оператор можно представить в виде

$$\sum\nolimits_{ij}^{R}(k,w) = \sum\nolimits_{ij}(k,w) + iw(z^{-1}-1)\delta_{ij} - k^2(v_0 z^{-1} - v)\delta_{ij}, \tag{15}$$

где первый член дается выражением

$$\sum\nolimits_{ij}^{R}(k,w) = \lambda^2 V_{imn}(k)\int \frac{dq}{(2\pi)^d}\frac{d\Omega}{2\pi}G_{mm'}(q,\Omega)C_{nn'}(k-q,w-\Omega)V_{m'n'j}(q), \tag{16}$$

а второй и третий члены тривиально учитывают вклад контрчленов. Связь константы перенормировки с оператором $\sum$ имеет обычный вид

$$z^{-1} = 1 + i\partial\sum(\mu^2,w)/\partial w|_{w=0}. \tag{17}$$

Подробное описание описанной процедуры в случае квантовых конечных ферми систем дано в ряде наших работ [21]. С учетом этого для эффективной вязкости в низшем порядке вычисления $\sum$ по теории возмущений легко получить известное выражение с тем принципиальным отличием, что вместо идеального $\varepsilon = 2$ следует брать реальное значение ε_{real}; при этом крайне существенна корректная реализация аналитического продолжения ε от $\varepsilon = 0$ к $\varepsilon = \varepsilon_{real}$:

$$\tilde{v} = v[1 + A_d h(x^{-\varepsilon} - 1)/\varepsilon], \quad z^{-1} = 1 + B_d H, \quad x = k^2/\mu^2, \tag{18}$$

где:

$$A_d = \frac{1}{8}\frac{d-1}{d+2}\frac{s_d}{(2\pi)^d},$$

$$B_d = \frac{1}{8}\{\frac{d-1}{2}[\psi(\frac{d}{4}+\frac{1}{2}) - \psi(\frac{d}{4})] + \frac{2}{d}\}\frac{s_d}{(2\pi)^d},$$

$s_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ - площадь поверхности d-мерной сферы единичного радиуса; $\psi(x) = d\ln\Gamma(x)/dx$. РГ- функция

$$\beta(h) = h(-\varepsilon + 3A_d h) \times (1 + B_d h).$$

Неявное решение имеет привычный вид

$$\frac{\varepsilon/3A_d - \tilde{h}}{\tilde{h}}\left(\frac{1/B_d + \tilde{h}}{\varepsilon/3A_d - \tilde{h}}\right)^{\varepsilon B_d/(\varepsilon B_d + 3A_d)} = Cx^{\varepsilon}. \tag{19}$$

В заключение следует отметить также, что ранее обсуждавшиеся возможности стыковки изложенного формализма и формализма функций памяти и эволюционных уравнений (типа Фоккера-Планка, уравнений вида (2) и т.д.), естественно работают и в случае анализа макротурбулентных процессов в атмосфере. Как обычно, стартуя с пропагатора динамической характеристики А атмосферной системы [21]

$$C(t) = \langle A(t)A(0)\rangle = \langle A(0)A(-t)\rangle = \langle A(0)e^{-iLt}A(0)\rangle \tag{20}$$

динамическое уравнение в z - представлении имеет вид (см. также [21])

$$C(z) = \frac{i\beta^{-1}}{z - \Omega + i\sum(z)}\aleph, \tag{21}$$

с обычным дисперсионным соотношением в знаменателе

$$D(z) = \sum(z) + i\Omega.$$

Стандартное преобразование Лапласа, примененное к уравнению движения для $C(t)$, дает

$$[\partial_t + i\Omega]C(t) + \int_0^i d\tau\Gamma(t-\tau)C(\tau) = 0, t > 0. \tag{22}$$

Поиск конкретных адекватных выражений для функции памяти Γ и других величин применительно к задачам макродинамики турбулентной атмосферы, естественно, требуют выполнения стандартных процедур калибровки и фитинга. В целом же проведенное рассмотрение также обосновывает возможности приложения искомого аппарата, а также самоафинных, фрактальных и стохастических моделей, ранее с успехом применявшихся в ряде локальных задач гидрологии, прикладной экологии, гидроэкологии и др. [14-20], к задачам анализа макродинамики турбулентной атмосферы и изучения пространственно-временной структуры метеополей.

Список литературы

1. *Матвеев Л.Т.* Теория общей циркуляции атмосферы и климата Земли. – Л.: Гидрометеоиздат, 1991. – 295с.
2. *Peixoto J.P., Oort A.H.* Physics of Climate. – NY: American Institute of Physics, 1992. – 520p.
3. *Кибель И.А.* Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. – М.: Физматгиз, 1957. – 377с.
4. *Ефимов В.А.* Математическая теория экспериментов по долгосрочному прогнозу динамики атмосферы южного полушария//Труды ААНИИ.-1982.-Т.385.-С.12-115.
5. *Глушков А.В., Ефимов В.А., Кивганов А.Ф.* Моделирование климата как задача взаимодействия триплета солитонов// Метеорология, климатология и гидрология.-1999.-№38.-С.3-8.
6. *Глушков А.В., Ефимов В.А., Кивганов А.Ф.* Телескопизированный прогноз атмосферных аномалий на средние сроки//Метеорология, климатология и гидрология.– 1999.– Вып.38.–С.9-13.
7. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. – 1941. –Т.30,№4.–С.299-303.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736с.
9. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. - М.: Наука, 1988.-368с.
10. *Теодорович Э.В.* К вычислению универсальных констант при описании турбулентности методом ренорм-группы//Известия АН СССР, Сер. Мех. жидкостей и газов.-1987.-№4.-С.29-36.
11. *Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett. – 1980. – Vol. 45. – P. 712-716.
12. *Brandstater A., Swinney H.* Strange attractors in weakly turbulent Couette-Taylor flow // Phys. Rev. A.– 1987.–Vol.35.–P.2207-2220.
13. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D.-1983.–Vol.9.– P.189-208.
14. *Русов В.Д., Глушков А.В., Ващенко В.Н.* Астрофизическая модель глобального климата Земли. – Киев: Наукова Думка, 2005.–235с.
15. *Glushkov A.V., Rusov V.D., Loboda N.S., Khokhlov V.N., Khetselius O.Yu., Svinarenko A.A., Prepelitsa G.P.* On possible genesis of fractal dimensions in the turbulent pulsations of cosmic plasma – galactic-origin rays – turbulent pulsation in planetary atmosphere system// Advances in Space Research.-2008.-Vol.41.-P.1713-1716.
16. *Rusov V.D., Glushkov A.V., Vaschenko V.N., Myhalus O.T., Bondartchuk Yu.A., Smolyar V.P., Linnik E.P., Mavrodiev S.C., Vachev B.I.* Galactic cosmic rays – clouds effect and bifurcation model of the earth global climate. Part 1. Theory// Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics (Elsevier).-2010.-Vol.72.-P.498-508.
17. *Глушков А.В., Хохлов В.Н., Бунякова Ю.Я.* Ренорм-групповой подход к исследованию спектра турбулентности в атмосфере// Метеорология и гидрология.-2004.-Т.48.-С.286-292.
18. *Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Prepelitsa G.P., Tsenenko I.A.* Temporal variability of the atmosphere ozone content: Effect of North-Atalantic oscillation// Optics of atmosphere and ocean.-2004.-Vol.14,N7.-P.219-223.
19. *Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Tsenenko I.A.* Atmospheric teleconnection patterns and eddy kinetic energy content: wavelet analysis // Nonlin.Proc. in Geophysics.–2004.–Vol.11.– P.285-293.
20. *Glushkov A.V., Loboda N.S., Khokhlov V.N.* Using meteorological data for reconstruction of annual runoff series over an ungauged area: Empirical orthogonal functions approach to Moldova-SW Ukraine region//Atmospheric Research (Elseiver).-2005.-Vol.77.-P.100-113.
21. *Glushkov A.V., Loboda N.S., Khokhlov V.N., Lovett L.* Using non-decimated wavelet decomposition to analyse time variations of North Atlantic Oscillation, eddy kinetic energy, and precipitation // Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).–2006.–Vol. 322. –N1-4.–P.14-24.
22. *Глушков А.В.* Релятивистская квантовая теория.-Одесса: Астропринт, 2008.-900с.

Ренорм-груповий підхід до дослідження спектру турбулентності у загальній динаміці атмосфери.

Глушков О.В., Сєрга Е.М.

У роботі вперше ренорм-груповий аналіз у загальному формулюванні застосовано до аналізу спектру турбулентності в загальній динаміці атмосфери..

***Ключові слова**: ренорм-груповий аналіз, спектр турбулентності, динаміка атмосфери*

Renorm-group approach to studying a turbulence spectrum in general dynamics of atmosphere.

Glushkov A.V., Serga E.N.

At first generally formulated renorm-group approach is used to study a turbulence spectrum in the general dynamics of atmosphere.

***Keywords:** renorm-group approach, turbulence spectrum, dynamics of atmosphere.*