УДК 537.87:539.2

О.И. Герасимов, *д-р ф-м.н.*, **Н. Н. Худынцев**, *к.ф.-м.н.*
Одесский государственный экологический университет

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В МОДЕЛИ 1D ГРАНУЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ВИРТУАЛЬНОЙ УПОРЯДОЧЕННОСТИ

Рассмотрена задача о распространении электромагнитной волны в гранулированной системе, моделируемой плоскослоистой структурой с переменной толщиной слоев в приближении виртуальной (топологической) упорядоченности, которое заключается в замене зависящих от конфигурации системы параметров задачи на их усредненные значения и позволяет воспользоваться для нахождения спектральных параметров задачи стандартными алгоритмами для идеально периодических систем.
Ключевые слова: *электромагнитная волна, гранулированная система, плоскослоистая структура, приближение виртуальной упорядоченности.*

Вступление. Исследование распространения электромагнитных волн в одномерных гранулированных системах относится к числу актуальных направлений исследований физики мягкой материи [1]. Применение стандартных методов нахождения оптических параметров задачи (таких, например, как метод матрицы переноса [2]), затруднено вследствие нарушения трансляционной инвариантности в таких системах, вызываемого дефектообразованием, декорированием, неоднородностью во внешних полях и другими видами нарушения симметрии.

1 Приближение виртуальной упорядоченности

Оптические свойства периодической среды (слоисто-периодической структуры, сверхрешетки) определяются соответствующими материальными параметрами – тензорами диэлектрической $\overline{\overline{E}}(\vec{r})$ и магнитной $\overline{\overline{\mu}}(\vec{r})$ проницаемости, которые в случае строго периодических в выделенном направлении систем (цепочек) удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{E}}(x,y,z) &= \overline{\overline{E}}(x,y,z+d), \\ \overline{\overline{\mu}}(x,y,z) &= \overline{\overline{\mu}}(x,y,z+d) \end{aligned} \tag{1}$$

где $d = \sum\limits_{\ell=1}^{G} a_\ell$ - период сверхрешетки, G – число слоев (в элементарной ячейке), a_ℓ - толщина ℓ слоя в одномерной (топологически упорядоченной) вдоль оси Z системе.

Запишем выражение для соответствующих тензоров $\overline{\overline{E}}$ и $\overline{\overline{\mu}}$ для 1D сверхрешетки с произвольным числом слоев G в координатном представлении в форме кусочно-непрерывной функции вида

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{E}}(Z) \\ \overline{\overline{\mu}}(Z) \end{pmatrix} = \sum_{n,x} \begin{pmatrix} En,\ell \\ \mu n,\ell \end{pmatrix} \left\{ \theta\left[Z-(n-1)d - \sum_{0=1}^{\ell} \left(a_{nj}-a_{n\ell}\right)\right] - \theta\left[Z-(n-1)d-\sum a_{nj} \right]\right\}, \tag{2}$$

где $\theta(Z)$ – функция Хевисайда, $n = \pm 1; \pm 2; .....$ – номер ячейки одномерного кристалла; $\ell = 1,2,3,.....,G$ нумерует элементы ячейки.

Будем считать, что имеет место разупорядочение в направлении Z, которое происходит вследствие вариации толщины примесных слоев (в этом случае $\overline{\overline{E}}_{n\ell} \equiv \overline{\overline{E}}_{\ell}$). При таком подходе параметры отклоняющейся от периодичности свехрешетки, зависящие от конфигураций, могут быть представлены с помощью набора случайных величин $\left\{\eta_{n\ell}^{\nu}\right\}$, удовлетворяющих следующим свойствам: $\eta_{n\ell}^{\nu} = 1$, если в $n\ell$ кристаллически упорядоченной цепочке находится слой с толщиной $a_{\ell}^{\nu(\ell)}$ сорта $\nu(\ell)$; и $\eta_{n\ell}^{\nu} = 0$ – если это условие нарушается.

Очевидно, можем записать

$$a_{n\ell} = \sum_{\nu(\ell)=1}^{r(\ell)} a_{\ell}^{\nu(\ell)} \eta_{n\ell}^{\nu(\ell)}, \tag{3}$$

где $r(\ell)$ – число сортов элементов (слоев) в ℓ-подрешетке кристаллически упорядоченной $1D$ структуры.

Введем понятие конфигурационно-усредненных величин $\langle a_{n\ell}\rangle$ и $\langle d_n\rangle$ по следующим правилам:

$$\begin{aligned} \langle a_{m\ell}\rangle &= a_{\ell}\cdot\left\{C_{\ell}^{\nu(\ell)}\right\} = \sum_{\nu(\ell)=1}^{r(\ell)} G_{\ell}^{\nu(\ell)} C_{\ell}^{\nu(\ell)}; \\ \langle d_n\rangle &\equiv d\left\{C_{\ell}^{\nu(\ell)}\right\} = \sum_{\ell=1}^{G}\sum_{\nu(\ell)=1}^{r(\ell)} a_{\ell}^{\nu(\ell)} C_{\ell}^{\nu(\ell)}. \end{aligned} \tag{4}$$

В терминах введенных усредненных величин типичная задача о нахождении спектральных характеристик наших систем сводится к рассмотрению идеально-периодической многослойной структуры толщина слоев которой дается выражениям $a_n\left\{C_{\ell}^{\nu(\ell)}\right\}$, а период составляет $d\left\{C_{\ell}^{\nu(\ell)}\right\}$.

Условно, назовем вышеописанное приближение моделью виртуального топологического упорядочения. В приближении виртуального топологического упорядочения нахождение, скажем, таких параметров, как спектр, ширина энергетической щели и других, осуществляется путем перехода в стандартных алгоритмах нахождения таких величин для идеально упорядоченных (периодических) сверхрешеток (слоистых структур) к новым переменным: $a_{n\ell} a_{\ell}\left\{C_{\ell}^{\nu(\ell)}\right\}, d \to d\left\{C_{\ell}^{\nu(\ell)}\right\}$, где $C_{\ell}^{\nu(\ell)}$ – концентрация слоев с толщиной $a_{\ell}^{\nu(\ell)}$ сорта $\nu(\ell)$ в подрешетке $\ell\left(\sum_{\nu(\ell)} C_{\ell}^{\nu(\ell)} = 1\right)$.

Таким образом, в рамках предлагаемой модели, конфигурационное усреднение восстанавливает нарушенную вследствие виртуальной вариации ширины слоя (слоев) трансляционную симметрию в нашей квазиодномерной многослойной системе.

Индуцированная таким образом трансляционная инвариантность $1D$ цепочки позволяет представить соответствующие материальные тензоры $\overline{\overline{E}}(Z)$ и $\overline{\overline{\mu}}(Z)$ в виде Фурье-разложений:

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{E}}(Z) \\ \overline{\overline{\mu}}(Z) \end{pmatrix} = \sum_l \begin{pmatrix} \overline{\overline{E}}_e \\ \overline{\overline{\mu}}_e \end{pmatrix} \exp\left(-il \frac{2\pi}{d\left\{C_\ell^{\nu(\ell)}\right\}} Z \right). \tag{5}$$

Пользуясь (2) и (5), легко находим выражение для амплитуды $\overline{\overline{E}}_e$ и $\overline{\overline{\mu}}_e$

$$\begin{pmatrix} \overline{\overline{E}}e \\ \overline{\overline{\mu}}e \end{pmatrix} = -\frac{i}{2\pi l} \sum_\ell \begin{pmatrix} \overline{\overline{E}}_{nd} \\ \mu_{n\ell} \end{pmatrix} \left\{ \exp\left(i \frac{2\pi}{d\left\{C_\ell^{\nu(\ell)}\right\}} l \sum_{j=1}^{\ell} a_j \left\{C_\ell^{\nu(\ell)}\right\} \right) - \exp\left[i \frac{2\pi}{d\left\{C_\ell^{\nu(\ell)} y\right\}} l \left(\sum_{j=1}^{\ell} a_j \left\{C_\ell^{\nu(\ell)}\right\} - a_\ell \left\{C_\ell^{\nu(\ell)} y\right\} \right) \right] \right\} \tag{6}$$

2 Анализ распространения электромагнитной волны

Запишем теперь уравнения Максвелла для напряженностей электромагнитного поля $\left(\vec{E}, \vec{H}\right)$ в нашей системе в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} x \vec{E}(\vec{r}, \omega) &= \frac{i\omega}{C} \overline{\overline{\mu}}(Z) \cdot \vec{H}(\vec{r}, \omega), \\ \vec{\nabla} x H(\vec{r}, \omega) &= -\frac{i\omega}{C} \overline{\overline{E}}(Z) \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega). \end{aligned} \tag{7}$$

По теореме Флоке, в случае периодической структуры $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ и $\vec{H}(\vec{r}, \omega)$ представимы в виде

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}, \omega) \\ \vec{H}(\vec{r}, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k^{(E)}(Z) \\ f_k^{(H)}(Z) \end{pmatrix} \cdot \exp\left(-i\vec{\chi}\vec{\rho} - ikZ\right), \tag{8}$$

где $\vec{\rho} = (x, y)$ и $\vec{\chi}$ – произвольный планарный волновой вектор, лежащий в плоскости $x0y$; $\vec{k}(0,0,k)$ – блоховский вектор.

С учетом вышесказанного, можем записать

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{f}_k^{(\vec{E})}(Z) \\ \vec{f}_k^{(H)}(Z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \vec{f}_k^{(E)}\left(Z + d\left\{C_\ell^{\nu(\ell)}\right\}\right) \\ \vec{f}_k^{(H)}\left(Z + d\left\{C_\ell^{\nu(\ell)}\right\}\right) \end{pmatrix} = \\ &= \sum_p \begin{pmatrix} \vec{f}_{k,p}^{(E)} \\ \vec{f}_{k,p}^{(H)} \end{pmatrix} \exp\left(-ip \frac{2\pi}{d\left\{C_\ell^{\nu(\ell)}\right\}} Z \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Подстановка соотношений (8) в систему уравнений (7) позволяет вычислить амплитуды Фурье-преобразований $\vec{f}_{k,p}^{(E,H)}$ электромагнитного поля. После несложных преобразований из (7), (8), с учетом (4), получаем

$$\left[\chi\left(k+p\frac{2\pi}{d\left\{C_{\ell}^{\nu(\ell)}\right\}}\right)\vec{e}_Z\right]x\begin{pmatrix}\vec{f}_{k,p}^{(E)}\\ \vec{f}_{k,p}^{(H)}\end{pmatrix}=\frac{\omega}{c}\begin{pmatrix}-\sum_e \overline{\overline{E}}_e\vec{f}_{k,p-1}^{(E)}\\ \sum_e \overline{\overline{\mu}}_e\vec{f}_{k,p-1}^{(H)}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\vec{e}_Z$ единичный орт вдоль оси z.

Система уравнений (10) позволяет непосредственно вычислять нормальные моды электромагнитных волн, распространяющихся в построенных «виртуально» периодических $1D$ слоистых системах, выступающих моделями реальных одномерных гранулированных структур.

Рассмотрим теперь влияние возможных изменений параметров сверхрешетки (например, отклонение от «идеальности» вследствие изменения толщины слоев) на спектр задачи.

Ограничимся анализом распространения электромагнитной волны в модельной одномерной немагнитной цепочке $\left(\overline{\overline{\mu}}=\overline{\overline{I}}\right)$, где $\overline{\overline{I}}$ – единичная матрица сверхрешётки, сконфигурированной вдоль заданной оси Z.

Положим, как это часто принимается при изучении поляритонных спектров, что K близки к своим предельным (брэгговским) значениям

$$\left|K-\frac{2\pi}{d\left\{C_{\ell}^{V(\ell)}\right\}}\right|\Rightarrow K. \tag{11}$$

$$cK^2\to\omega^2\varepsilon_0.$$

В этом случае, основной вклад в уравнение

$$\left[\vec{\chi}\left(K+\rho\frac{2\pi}{d\left\{C_{\ell}^{(V)}\right\}}\right)\vec{e}_Z\right]\cdot\begin{pmatrix}\vec{f}_{K,p}^{(E)}\\ f_{K,p}^{(H)}\end{pmatrix}=\frac{\omega}{C}\begin{bmatrix}-\sum_e \overline{\overline{\varepsilon}}e\vec{f}_{K,p-1}^{(E)}\\ \sum_e \overline{\overline{\mu}}e\vec{f}_{K,p-1}^{(H)}\end{bmatrix}$$

вносят резонансные слагаемые $\vec{f}_{K,p}^{(E,H)}=0,-1.$

Система итоговых уравнений, которые были получены с учетом введенных ограничений, принимает вид:

$$\begin{bmatrix}K^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{(0)} & -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{(1)}\\ -\frac{\omega^2\varepsilon^{(-1)}}{c^2} & (K^2-d\left\{C_{\ell}^{V(\ell)}\right\})^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{(0)}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}f_{x,(y),\kappa,0}^{(E)}\\ f_{x(y),K,-1}\end{pmatrix}=0\cdot \tag{12}$$

Из уравнения (12) получаем дисперсионное уравнение модели

$$\left(K^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{(0)}\right)\left[\left(K-\frac{2\pi}{d\left\{C_{\ell}^{V(\ell)}\right\}}\right)^2-\frac{\omega^2(K)}{c^2}\varepsilon^0\right]-\left(\frac{\omega^2(K)}{c^2}\left|\varepsilon^{(1)}\right|\right)^2=0.$$

Корни уравнения (12) определяют характер спектра. Так, например, полоса $\omega-(K)<\omega<\omega+(K)$ соответствует запрещённой зоне, в которой корни дисперсионного уравнения имеют комплексную форму. Соответствующие электромагнитные волны являются затухающими. Таким образом, мы имеем дело с т.н брэгговским отражением электромагнитной волны на частотах $\omega<\omega-(K)$ и $\omega<\omega+(K)$ при распространении волны вдоль модельной сверхрешетки.

Выводы. В работе предложена модель виртуально упорядочивающейся квазиодномерной слоистой структуры, которая может служить моделью сверхрешетки с внедренной примесью (дефектом). С помощью этой модели могут быть описаны, в частности, декорированные горизонтальные одномерные гранулированные цепочки. Получены управляющие уравнения для компонент электромагнитного поля, распространяющегося вдоль оси симметрии системы, позволяющие рассчитать параметры спектра модели. Полученные результаты пополняют теоретический инструментарий параметризации свойств гранулированных материалов и, в частности, оптической схемотехники, развиваемой на их основе [3].

Список литературы

1. *О.И.Герасимов*. Рассеяние излучений в статистических системах: Решаемые модели. – Одесса.: Маяк, 1999. – 284 с.
2. *Дж.Займан.* Модели беспорядка. – М.: Мир, 1982. – 592 с.
3. *S. Kasap, H. Ruda, Y. Boucher.* Cambridge Illustrated Handbook of Optoelectronics and Photonics. – Cambridge, 2009. – 352 p.

Розповсюдження електромагнітної хвилі в моделі 1D гранульованої системи у наближенні віртуальної впорядкованості. Герасимов О.І., Худинцев М.М.

Розглянуто задачу про розповсюдження електромагнітної хвилі в гранульованій системі, що моделюється плоскошаровою структурою зі змінною товщиною шарів в наближенні віртуальної (топологічної) впорядкованості, яке полягає в заміні параметрів системи, що залежать від конфігурації, на їх середні значення та дозволяє скористатися для знаходження спектральних параметрів задачі стандартними алгоритмами для ідеально періодичних систем.

***Ключові слова**: електромагнітна хвиля, гранульована система, плоскошарова структура, наближення віртуальної впорядкованості.*

Electromagnetic wave propagation in 1D model granular system in a virtual ordering approximation. Gerasimov O., Khudyntsev N.

The problem of propagation of electromagnetic waves in a granular system, the simulated plane-layered structure with a variable thickness of the layers in a virtual approximation of (topological) ordering (which is to replace depending on the configuration parameters of the problem at their average values, and you can take to find the spectral parameters of the problem with standard algorithms for perfectly periodic systems) has been considered.

***Keywords**: electromagnetic wave, granular systems, flat-layered structure, the approach of a virtual order.*