*УДК 517.958:536.24*

***Кривошей Ф. А.***

# РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ БАРОТРОПНОГО ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ

*Получены регуляризированные решения некорректной задачи для системы уравнений двухфазного потока.*

***Ключевые слова:*** *регуляризация, баротропный двухфазный поток, негиперболическая система уравнений*

Известно, что полная система уравнений двухжидкостной модели двухфазного потока гиперболична. Различные упрощающие физические допущения приводят к моделям с «патологией», связанной, в частности, с потерей гиперболичности основной системы, появлением комплексно-сопряженных характеристических направлений, некорректностью задачи Коши и, как следствие, с развитием неустойчивости решений. Наиболее типичной и распространенной моделью такого является двухжидкостная модель баротропного двухфазного потока, базирующаяся на гипотезе о равенстве давлений фаз. Кажущееся естественным обращение к модели с неравными давлениями требует знания радиуса кривизны межфазной границы в реальных двухфазных потоках. Именно из-за отсутствия достоверной информации об этом параметре модель неравных давлений для приложений практически не используется. Таким образом, вынужденный отказ от использования полной системы уравнений и низкая точность гомогенной равновесной модели стимулировали поиск возможностей решения проблемы негиперболичности баротропного двухфазного потока.

Идея регуляризации негиперболической системы основана на существовании в двухфазных потоках пространственно-временных флуктуаций их параметров и возможности использовать нетривиальную процедуру статистического осреднения, учитывающего стохастический характер флуктуаций. Известно, что во многих физических задачах процессы изменения параметров можно рассматривать в приближении дельта-коррелированных случайных процессов (полей). Применительно к газожидкостным потокам такая аппроксимация флуктуирующих параметров имеет достаточно ясную физическую природу: спонтанные процессы образования пузырей, их разрушение, образование паровых пленок можно трактовать как скачки статистических средних значений параметров для рассматриваемых дельта-коррелированых процессов. Суть идеи регуляризации состоит в «исправлении» несимметрической матрицы баротропной системы путем приведения ее к симметрической (эрмитовой) форме либо в сведении задачи к параболической системе, для которой ставится краевая задача.

Первая из этих возможностей реализуется в двух вариантах путем стохастической аппроксимации скорости распространения акустических возмущений в фазах $a_i$ ($i$ = 1 – жидкая фаза, $i$ = 2 – газовая фаза) и плотности газовой (паровой) фазы $\rho_2$

$$a_i = \langle a_i \rangle + \delta \cdot a_i(x); \qquad \rho_2 = \langle \rho_2 \rangle + \delta \cdot \rho_2(x),$$

с корреляционными функциями

$$\langle \delta a_i(x_1) \delta a_i(x_2) \rangle = \sigma_{ai}^2 \delta(x_1 - x_2);$$

$$\left\langle \delta\rho_2(x_1)\delta\rho_2(x_2)\right\rangle = i\sigma_{\rho 2}^2\delta(x_1 - x_2),$$

где $i$ – мнимая единица.

Первая из этих аппроксимаций предполагает корреляцию между $a_i$ и объемной концентрацией фаз $\varphi_i$, вторая – между плотностью $\rho_2$ и давлением $P_2$ газовой фазы. Осредняя уравнения системы баротропного потока по реализациям случайных флуктуаций $\delta a_i$ и $\delta\rho_2$ после преобразований получаем системы, матрицы которых имеют симметрическую (эрмитову) форму, характеристические направления их, как известно, вещественны, то есть полученные системы гиперболичны.

Вторая возможность предполагает изменение типа исходных гиперболических уравнений полной системы уравнений. В этом случае вопрос о некорректности задачи вследствие потери гиперболичности системы формально снимается, так как она изначально перестает быть гиперболической. Как и выше, такой подход реализуется путем стохастической аппроксимации флуктуирующих параметров и последующего осреднения уравнений по их реализациям. В результате такой процедуры получаем систему параболических уравнений, и необходимо установить, обладает ли эта система свойствами, препятствующими развитию неустойчивости решений. Взяв за основу систему уравнений баротропного двухфазного потока, представим скорость фаз $\upsilon_i$ как случайную функцию $\upsilon_i = \langle\upsilon_i\rangle + \delta\upsilon_i(x)$ и введем корреляционную функцию

$$\left\langle \delta\upsilon_i(x_1)\delta\upsilon_i(x_2)\right\rangle = \sigma_{\upsilon i}^2\delta(x_1 - x_2), \tag{1}$$

где $\sigma_{\upsilon i}^2$ – дисперсия скоростей фаз.

Осредняя уравнения системы баротропного потока по реализациям случайной функции $\upsilon_i$ с учетом корреляции (1), получаем систему параболических уравнений для средних значений искомых параметров $\overline{\upsilon}_i, \overline{p}, \overline{\varphi}_i, \overline{e}_i$

$$\langle\upsilon_i\rangle_t + \langle\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_i\rangle_x - 2\sigma_{\upsilon i}^2\langle\upsilon_i\rangle_{xx} + \rho_i^{-1}\langle P\rangle_x = \langle\Pi_i\rangle; \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\langle P\rangle_t + \langle A_i\rangle B_i + B_i\langle C_i\rangle\langle P\rangle_x - 2B_i\langle F_i\rangle\langle P\rangle_{xx} + B_i\langle\Delta\upsilon\rangle\langle\varphi_2\rangle_x - \\ - 2B_i\left[\Delta\sigma^2\langle\varphi_2\rangle_{xx} - H_i\left(\langle\varphi_2\rangle_x^2\right)\right] = \langle\Pi_3\rangle\end{gathered}; \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\langle\varphi_2\rangle_t + \langle\varphi_2\rangle(1 - \langle D_i\rangle)\langle\upsilon_2\rangle_x - \langle D_i\rangle(1 - \langle\varphi_2\rangle)\langle\upsilon_1\rangle_x + G_i^{-1}\langle\Delta\upsilon\rangle\langle P\rangle_x - \\ - G_i^{-1}\Delta\sigma^2\langle P\rangle_{xx} + (\langle\upsilon_2\rangle - \langle D_i\rangle\langle\Delta\upsilon\rangle)\cdot\langle\varphi_2\rangle_x - 2\left(\sigma_2^2 - \langle D_i\rangle\Delta\sigma^2\right)\cdot \\ \cdot\langle\varphi_2\rangle_x + 2G_i^{-1}K_i\cdot\left(\langle\varphi_2\rangle_x\right)^2 = \langle\Pi_4\rangle\end{gathered}; \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\langle e_i\rangle_t + \rho_i^{-1}\langle A_i\rangle B_i - \rho_i^{-1}(\langle\upsilon_i\rangle - B_i\langle C_i\rangle)\langle P\rangle_x + \rho_i^{-1}B_i\langle\Delta\upsilon\rangle\langle\varphi_2\rangle_x + \\ + \langle\upsilon_i\rangle\langle e_i\rangle_x + 2\rho_i^{-1}\left(\sigma^2 - B_iF_i\right)\langle P\rangle_{xx} - 2\rho_i^{-1}B_i\cdot \\ \cdot\left[\Delta\sigma^2\langle\varphi_2\rangle_{xx} - H\left(\langle\varphi_2\rangle_x\right)^2\right] - 2\sigma_i^2\langle e_i\rangle_{xx} = \langle\Pi_{i+x}\rangle\end{gathered}; \tag{5}$$

$$\langle\ \rangle_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}\langle\ \rangle;$$

$$\langle\ \rangle_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}\langle\ \rangle;$$

$$\langle\ \rangle_{xx} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle\ \rangle,$$

где $\varphi, \rho, P, e, \upsilon$ – соответственно объемная концентрация, плотность, давление, энтальпия и скорость фаз;

$a$ – скорость распространения акустических возмущений в фазе;

$x$ – координата;

$t$ – время, $\Pi$ – правые части уравнений, $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$.

Приняты следующие обозначения (суммирование по индексу $i$ = 1,2).

$$\sum \varphi_i \upsilon_{ix} = A_i\,; \qquad \sum \langle\varphi_i\rangle\langle\upsilon_i\rangle_x = \langle A_i\rangle\,;$$

$$\left(\sum \frac{\varphi_i}{\rho_i a_i^2}\right)^{-1} = B_i\,; \qquad \sum \frac{\varphi_i \upsilon_i}{\rho_i a_i^2} = C_i\,;$$

$$\sum \frac{\langle\varphi_i\rangle\langle\upsilon_i\rangle}{\rho_i a_i^2} = \langle C_i\rangle\,; \qquad \upsilon_2 - \upsilon_1 = \Delta\upsilon\,; \qquad \langle\upsilon_2\rangle - \langle\upsilon_1\rangle = \langle\Delta\upsilon\rangle\,; \qquad \frac{B_i\varphi_2}{\rho_2 a_2^2} = D_i\,;$$

$$\frac{B_i\langle\varphi_2\rangle}{\rho_2 a_2^2} = \langle D_i\rangle\,; \qquad \sum \frac{\sigma_i^2\langle\varphi_i\rangle}{\rho_i a_i^2} = F_i\,;$$

$$\sum \frac{\rho_i a_i^2}{\langle\varphi_i\rangle} = G_i\,; \qquad \sum \frac{\sigma_i^2}{\langle\varphi_i\rangle} = H_i\,; \qquad \sum \frac{\rho_i a_i^2 \sigma_i^2}{\langle\varphi_i\rangle} = K_i\,; \qquad \sigma_2^2 - \sigma_1^2 = \Delta\sigma^2.$$

На рис. 1, 2 представлены расчетные и экспериментальные кривые изменения давления и объемного паросодержания при разгерметизации трубы. Видно, что в соответствии с прогнозом Р. И. Нигматулина о влиянии относительного движения фаз, учет этого фактора дает лучшее по сравнению с известной моделью согласование расчетных и экспериментальных данных.

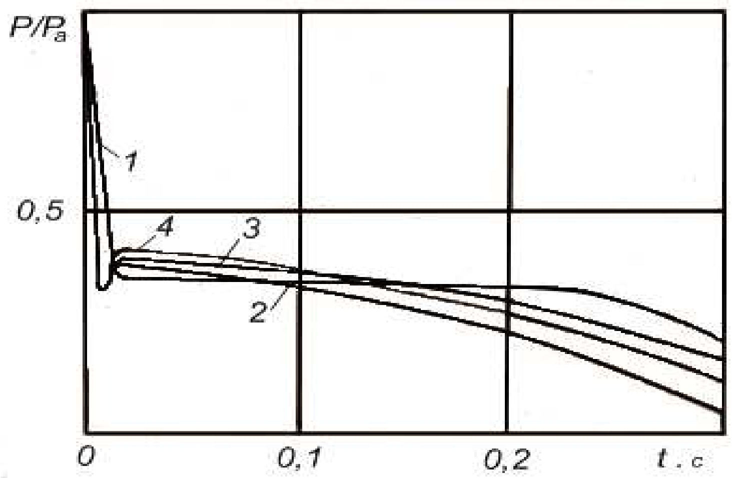


*Рис.1.* Экспериментальная и расчетные кривые давления при разгерметизации трубы: 1 – эксперимент, 2 – результат Нигматулина Б. И. и др., 3 – результат данной работы при $\sigma_1^2 = 2{,}0$, $\sigma_2^2 = 2{,}5$, 4 – то же при $\sigma_1^2 = 6{,}0$, $\sigma_2^2 = 7{,}5$

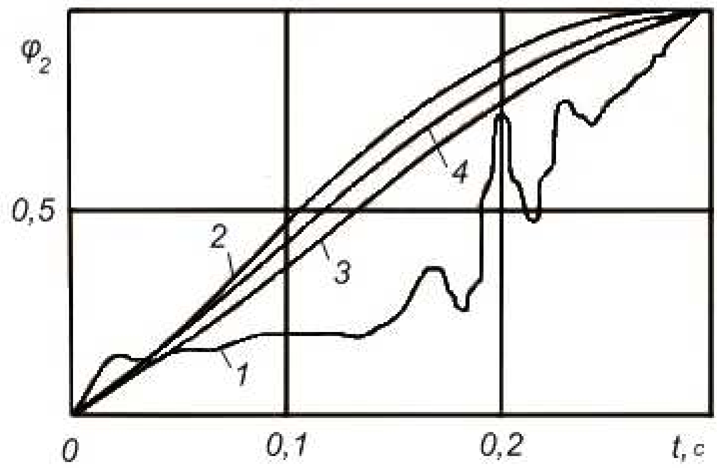


*Рис. 2.* Экспериментальная и расчетные кривые объемного паросодержания

Таким образом, осреднение уравнений по стохастическому параметру $\upsilon_i$ порождает параболическую систему. В частности, осреднение полной производной скорости по ее реализациям порождает оператор Бюргерса-Хопфа для среднего значения скорости, так что уравнения для скорости аналогичны системе типа Бюргерса-Хопфа. Появление при вторых производных множителей $\sigma_i^2$, имеющих размерность кинематической вязкости, ассоциируется с методом «вязкости» в газодинамике. Характерно, что скорости фаз-множители при первых пространственных производных давления-заменяются при вторых производных на дисперсии $\sigma_i^2$. Аналогично, скольжение $\langle \upsilon_2 \rangle - \langle \upsilon_1 \rangle$ заменяется на «скольжение» соответствующих дисперсий $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$. Исследование условий корректности и свойств решений краевых задач для нелинейных параболических систем типа (2) – (5) связано со значительными трудностями, в настоящее время недостаточно изучены более простые системы двух уравнений с «вязкостью» типа Бюргерса-Хопфа. С целью выяснения возможностей предложенной модели использовано сравнение результатов ее численного интегрирования с экспериментом и с результатами расчетов по известным моделям. Для системы (2) – (5) с начальными, граничными условиями и замыкающими соотношениями сформулирована известная задача об истечении вскипающей воды при разгерметизации трубы. Численное интегрирование выполнено по разностной схеме Лакса-Вендроффа и искусственной вязкостью, учитывающей эффекты нелинейностей. Условие устойчивости схемы связано с параметрами $\sigma_i^2$ и необходимым условием аппроксимации параболической системы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кривошей Ф. А. Стохастическая модель нестационарного потока двухфазной среды // Журнал вычислит. математики и математ. физики. 1993. т. 33. №7. с. 1103 – 1109.
2. Кривошей Ф. А. Регуляризация ретроспективной задачи диффузии и негиперболической системы уравнений баротропной модели двухфазного потока // Изв. Российской АН. Механика жидкости и газа. 1993. №6. – С.43 – 48.

*Отримані регулярізовані розв'язки некоректної задачі для системи рівнянь двохфазного потоку.*

*Stochastic regularization of  non-correct heat and mass transfer problems.*

*УДК 532.137.006.354*

***Федотов В.Г.***

# ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ И КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ

*В данной статье рассматривается, как с помощью вибрационного метода можно не только определять коэффициент вязкости, но и оценить присоединенную массу жидкости в пограничном слое с движущимся твердым телом.*

***Ключевые слова:*** *вязкость, присоединенная масса, резонансная частота, вынужденные колебания.*

По сравнению с классическими методами (методом падающего шарика, капиллярного истечения и др.) данный метод обладает определенными преимуществами. Частотно-фазовый метод определения вязкости пригоден для измерения больших вязкостей, когда присоединенная масса жидкости велика. На его основе созданы приборы для автоматического и непрерывного измерения вязкости жидкости в агрессивных средах, при высоких темпебратурах и давлениях и т.д.

Сущность данного метода измерения вязкости и присоединенной массы исследуемой жидкости заключается в определении параметров свободных и вынужденных колебаний тонкой пластины или иного тела, погруженного в данную жидкость.

Механическая колебательная система (рис. 1) представляет собой подвесную систему, состоящую из тонкой пластинки *1* с поверхностью *2S* и стержня *2* общей массой $m_o$, закрепленных на упругих растяжках *3* с жесткостью $k_o$. Пластина погружена в безграничную жидкость с вязкостью $\eta$ и плотностью $\rho$.

Такая колебательная система может совершать:

а) свободные затухающие колебания после выведения ее из положения равновесия с собственной частотой $\omega_0$ или

б) вынужденные колебания под действием внешней вынуждающей силы.

Назовем все силы, действующие на колебательную систему при ее движении в жидкости.

1. Силы инерции

$$F = ( m_o + m_\eta )\ddot{x} , \tag{1}$$

где $x$ – смещение системы из положения равновесия; $m_\eta = 2S\sqrt{\dfrac{2\rho\eta}{\omega}}$ – присоединенная масса жидкости (количество жидкости в пограничном слое); $\ddot{x}$ – ускорение. Величина $m_\eta \cdot \ddot{x}$ характеризует вклад в инерционную силу за счет приведенной в движение части жидкости вблизи пластинки.

2. Силы упругости растяжки

$$F_c = -\kappa_0 x . \tag{2}$$

3. Сила трения жидкости о боковую поверхность пластинки

$$F_\eta = 2S\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}} \cdot \dot{x} , \tag{3}$$

где $\dot{x}$ – скорость движения системы.

Эта формула справедлива для малых частот, когда скорость движения невелика.

4. Сила трения в упругом элементе

$$F_{уп} = \kappa_1 \dot{x} , \tag{4}$$

где $\kappa_1$ – некоторая постоянная.

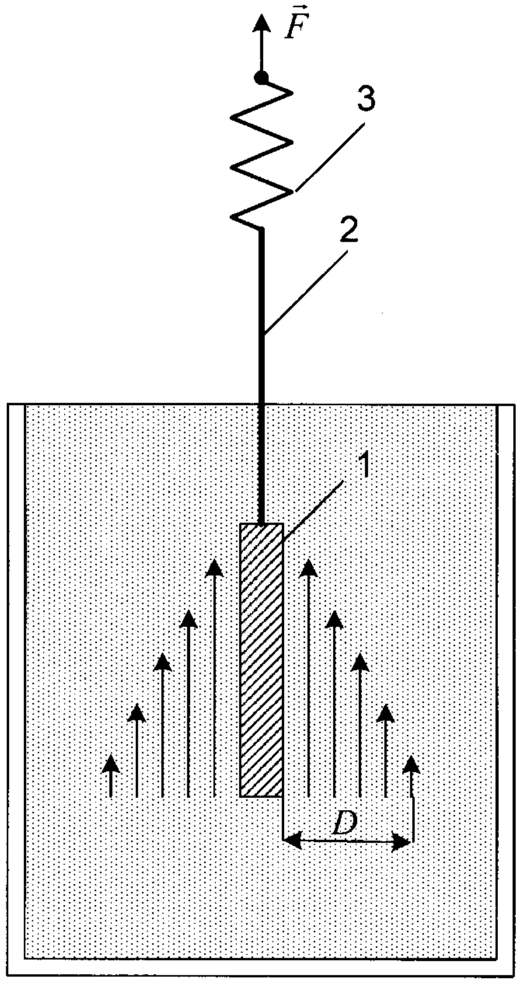


*Рис. 1.* Механическая колебательная система для определения присоединенной массы и коэффициента вязкости при помощи плоского течения жидкости

5. Сила лобового сопротивления

$$F_л = \kappa 2\dot{x}\,, \tag{5}$$

где $\kappa_2$ – постоянная.

6. Сила поверхностного натяжения, приложенная к стержню в месте выхода из жидкости

$$F_\sigma = c\sigma x\,, \tag{6}$$

где $\sigma$ – коэффициент поверхностного натяжения; $c$ – некоторая постоянная.

7. На систему действует возбуждающая сила

$$F_в = F_0 \sin \omega t\,, \tag{7}$$

где $F_0$ – амплитуда возбуждающей силы; $\omega$– циклическая частота этой силы.

Уравнение вынужденных колебаний механической колебательной системы имеет вид

$$\ddot{x} + b_1\dot{x} + b_2 x = b_3 \sin \omega t\,. \tag{8}$$

Здесь

$$b_1 = 2\beta = \frac{2S\sqrt{\dfrac{\rho\eta\omega}{2}} + \kappa_1 + \kappa_2}{m_0\left(1 + \dfrac{2S}{m_0}\sqrt{\dfrac{2\rho\eta}{\omega}}\right)}; \tag{9}$$

$$b_2 = \omega^2 = \frac{\kappa_0 (1 + \frac{c\sigma}{m_0})}{m_0 (1 + \frac{2S}{m_0}\sqrt{\frac{2\rho\eta}{\omega}})}; \tag{10}$$

$$b_3 = \frac{F_0}{m_0 (1 + \frac{2S}{m_0}\sqrt{\frac{2\rho\eta}{\omega}}}. \tag{11}$$

Решение уравнения (8) при установившемся режиме является функция

$$x(t) = \frac{b_3}{(\omega^2 - b_2)^2 + b_1^2\omega^2} \cdot sin(\omega t + \varphi). \tag{12}$$

Как видно из решения, подвесная система совершает вынужденные гармоничные колебания с частотой $\omega$, равной частоте колебаний возбуждающей силы с амплитудой

$$A = \frac{b_3}{\sqrt{(\omega^2 - b_2)^2 + b_1^2\omega^2}}, \tag{13}$$

и со сдвигом фаз относительно возбуждающей силы

$$\varphi = -arctg\frac{b_1\omega}{\omega^2 - b_2}. \tag{14}$$

Если пренебречь силами лобового сопротивления, т.е. $F_л = 0$, $\kappa_2 = 0$; силами поверхностного натяжения, т.е. $F_\sigma = 0$, $c = 0$; силой трения в упругом элементе $F_{уп} = 0$, $\kappa_1 = 0$; тогда соответственно выражения (9), (10) и (11) принимают вид

$$b_1 = 2\beta = \frac{2S\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}}}{m_0 + m_\eta}; \tag{15}$$

$$b_2 = \omega^2 = \frac{\kappa_0}{m_0 + m_\eta}; \tag{16}$$

$$b_3 = \frac{F_0}{m_0 + m_\eta}. \tag{17}$$

Анализируя выражение (12) с учетом сдвига фаз относительно возбуждающей силы (14), можно найти несколько возможных вариантов измерения вязкости. Однако, для измерения больших вязкостей, когда присоединенная масса жидкости велика и частота $\omega$ значительно отличается от $\omega_0$ лучше всего использовать частотно-фазовый метод. В этом случае частота колебаний возбуждающей силы выбирается такой, чтобы сдвиг фаз между возбуждающей силой и колебаниями был равен $\pi/2$. Тогда

$$\varphi = arctg\frac{\omega b_1}{\omega^2 - b_2} = \pi/2; \tag{18}$$

т.е.

$$\omega^2 - b_2 = 0; \tag{19}$$

где $\omega$ – частота возбуждающей силы, при которой $\varphi = \pi/2$.

Из формулы (16) для определения присоединенной массы жидкости $m_\eta$ получим следующую расчетную формулу

$$m_\eta = m_o\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2}\right). \tag{20}$$

Для определения произведения $\rho \cdot \eta$ с учетом того, что $\kappa_o = m_o \omega_o^2$ получим выражение

$$\rho\eta = \frac{m_o^2}{8S^2} \cdot \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)^2}{\omega^3}. \quad (21)$$

Таким образом, для вычисления величины $\rho\eta$ и $m_\eta$ нужно измерить собственную частоту колебаний системы $\omega_o$ (практически равной резонансной частоте колебаний системы в воздухе) и частоту колебаний возбуждающей силы $\omega$ при погружении колебательной системы в исследуемую жидкость при сдвиге фаз между ними, равном $\pi/2$.

Для определения абсолютных значений коэффициента вязкости по формуле (21) необходимо найти значение плотности исследуемой жидкости при тех же условиях эксперимента по одному из существующих методов. Массу подвесной системы $\omega_o$ и площадь зонда $S$ определяют непосредственно.

Формулу (21) можно использовать для решения обратной задачи – для определения плотности при заданных $\eta$, $\omega_o$ и $\omega$.

Следует подчеркнуть, что в случае больших вязкостей, когда присоединенная масса жидкости велика при сдвиге фаз между возбуждающей силой и колебаниями равной $\pi/2$ амплитуда колебания системы не обязательно достигает своего максимального значения, а стремится к некоторому постоянному значению.

Зная частоту колебаний возбуждающей силы $\omega$ при погружении пластины в исследуемую жидкость можно оценить значение присоединенной жидкости, т.е. количество жидкости в пограничном слое, протекающей через поперечное сечение $f = D \cdot B$, где $B$ – ширина пластины, $D$ – толщина пограничного слоя.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Механика сплошных сред». – М., Госэнергоиздат, 1956.
2. Поль Р.В. «Механика, акустика и учение о теплоте». – М., Наука, 1971.
3. Соловьев А.Н., Каплун А.Б. «Вибрационный метод измерения вязкости жидкости». – Новосибирск, Наука, 1970.
4. Богословский А.В., Алтунина Л.К. «Датчик вязкости», патент RU 2373516C2, –2006.



*У цій статті розглядається, як за допомогою вібраційного методу можливо не тільки визначити коефіцієнт в’язкості, але й оцінити приєднану масу рідини у пограничному з твердим тілом, що рухається, шарі.*



***Ключові слова:*** *в’язкість, приєднана маса, резонансна частота, вимушені коливання.*



*In an article is considered, how by using the vibration method, to designate not only the koefitsient of viscosity, but also to evaluate the connected liquid substance in boundary layer, which include the moving adamant matter.*