УДК 517.95

Ляшко О.В., Скрипка В.І.

ПРО РОЗПОДІЛ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ПОРОЖНИННОМУ ПАРАБОЛОЇДІ СКІНЧЕННОЇ ДОВЖИНИ

Будується загальний розв'язок рівняння Лапласа для порожнинного параболоїда, обмеженого частинами координатних поверхонь параболоїдальної системи. Доводиться регулярність нескінченних алгебраїчних систем, що виникають при задоволенні граничних умов Неймана. Досліджується характер збіжності рядів загального розв'язку і даються рекомендації щодо його коректної числової реалізації.

Ключові слова: *рівняння Лапласа, скалярний потенціал, крайова задача, задача Неймана, параболоїд, параболоїдальні кординати, функції Беселя.*

Вступ. Відомо, що коректний числовий аналіз загальних розв'язків можливий лише за умови, коли знайдено асимптотичні значення довільних сталих. Ці значення без принципових труднощів знаходяться шляхом асимптотичного аналізу парних алгебраїчних систем, що виникають при задоволені граничних умов]. У крайових задачах для областей, обмежених більш ніж двома координатними поверхнями змінної гаусової кривини, відповідні алгебраїчні системи не є парними, що робить їх безпосередній асимптотичний аналіз практично неможливим. Нами на конкретному прикладі пропонується вирішення цієї проблеми шляхом побудови системи базисних функцій, які задовольняють умові повноти одразу на обох граничних поверхнях.

Постановка задачі. Розглядається задача Неймана для рівняння Лапласа в порожнинному параболоїді обертання, обмеженому координатними поверхнями $\xi = \xi_1$ і $\xi = \xi_0$ $(0 \le \eta \le \eta_0)$ та поверхнею $\eta = \eta_0$ $(\xi_1 \le \xi \le \xi_0)$ параболоїдальної системи координат (рис.1) .

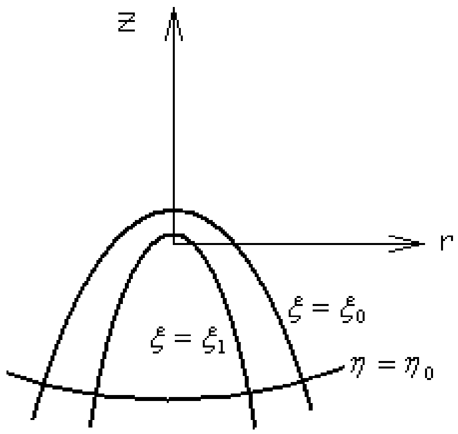


Рис.1. Координатні лінії параболоїдальної системи

Зв'язок між параболоїдальними (ξ ,η ,ζ) та циліндричними (r, z, φ) координатами встановлюється за формулами [2]

$$r = \xi\eta\,; \quad z = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \eta^2\right), \quad \varphi = \zeta$$

$$(0 \le \xi < \infty\,; \quad 0 \le \eta < \infty\,; \quad 0 \le \zeta \le 2\pi)\ .$$

Розглянемо осесиметричний розподіл потенціалу. Тоді для гармонійної функції $\theta(\xi,\eta)$ рівняння Лапласа набуває вигляду

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)=0 \tag{1}$$

Граничні умови Неймана для рівняння (1) задаються співвідношеннями

$$\theta_{\xi}(\xi_i,\eta)=g_i(\eta)\,,\quad (0\le\eta\le\eta_0;i=0;1), \tag{2}$$

$$\theta'_{\eta}(\xi\,,\eta_0)=f(\xi),\qquad (\xi_1\le\xi\le\xi_0)\,. \tag{3}$$

Побудова розв'язку. Загальний розв'язок для рівняння (1) знаходимо у вигляді суми двох доданків

$$\theta(\xi,\eta)=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{\mathrm{n}}\eta_0}Q_0(\lambda_n\xi)G_0(\lambda_n\eta)+\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{\gamma_{\mathrm{k}}}{s_k(\xi_0-\xi_1)}L_0(s_k\eta)N_0(s_k\xi) \tag{4}$$

де

$$Q_{\mathrm{m}}(\lambda_n\xi)=\alpha_n\frac{I_m(\lambda_n\xi)}{I_0(\lambda_n\xi_0)}+(-1)^m\beta_n\frac{K_m(\lambda_n\xi)}{K_0(\lambda_n\xi_1)}\ , \tag{5}$$

$$N_m(s_k\xi)=\frac{\pi}{2}s_k\xi_0\left[Y_0(s_k\xi_0)J_m(s_k\xi)-J_0(s_k\xi_0)Y_m(s_k\xi)\right],$$

$$L_{\mathrm{m}}(s_k\eta)=\frac{I_m(s_k\eta)}{I_0(s_k\eta_0)},\qquad G_{\mathrm{m}}(\lambda_n\eta)=\frac{\mathrm{J_m}(\lambda_n\eta)}{\mathrm{J_1}(\lambda_n\eta_0)},$$

а $\mathrm{I_m}$, $\mathrm{K_m}$, $\mathrm{J_m}$, $\mathrm{Y_m}$ – функції Беселя в позначеннях Ватсона [1].

Через α_n, β_n і γ_k позначено довільні сталі, а через λ_n і s_k – розв'язки трансцендентних рівнянь: $G_0(\lambda\eta_0)=0$ і $N_0(s\xi_1)=0$.

Перший доданок у формулі (4) містить повні набори частинних розв'язків рівняння (1) як внутрішньої ($\xi<\xi_0$), так і зовнішньої ($\xi>\xi_1$) задач для параболоїдів, обмежених поверхнями $\xi=\xi_0$ $(0\le\eta\le\eta_0)$ і $\xi=\xi_1$ $(0\le\eta\le\eta_0)$ відповідно. Розв'язки обох задач об'єднані в єдиному виразі з допомогою комбінації (5) модифікованих функцій Беселя I_m, K_m. Другий доданок у формулі (4) є загальним розв'язком внутрішньої задачі для параболоїда $\eta\le\eta_0$ $(\xi_1\le\xi\le\xi_0)$.

Підставимо співвідношення (4) в граничні умови (2), (3) і розкладемо одержані вирази в ряди то відповідним базисним функціям на кожній з граничних поверхонь. В результаті для коефіцієнтів цих розкладів одержуємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$Q_1(\lambda_{\mathrm{n}}\xi_i)=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{\gamma_{\mathrm{k}}}{\xi_0-\xi_1}\frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2+s_k^2}N_1(s_k\xi_i)+g_{in}\ \ (i=0;1), \tag{6}$$

$$\gamma_{\mathrm{k}}L_k(s_k\eta_0)=\frac{\xi_0-\xi_1}{\eta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2s_k}{\lambda_n^2+s_k^2}B(\lambda_n,s_k,\xi_0,\xi_1)+f_k, \tag{7}$$

де

$$g_{in}=\frac{2}{\eta_0^2}\int_0^{\eta_0}\mathrm{g_i}(\eta)G_0(\lambda_n\eta)\eta d\eta,\quad f_k=2A^{-1}(s_k,\xi_0,\xi_1)\int_{\xi_1}^{\xi_0}f(\xi)N_0(s_k\xi)\xi d\xi,$$

$$B(\lambda_n,s_k,\xi_0,\xi_1)=\mathrm{A}^{-1}(s_k,\xi_0,\xi_1)\left[\xi_0Q_0(\lambda_n\xi_0)N_1(s_k\xi_0)-\xi_1Q_0(\lambda_n\xi_1)N_1(s_k\xi_1)\right],$$

$$A(s_k,\xi_0,\xi_1)=\xi_0^2N_1^2(s_k\xi_0)-\xi_1^2N_1^2(s_k\xi_1).$$

Доведемо регулярність системи (6), (7). Припустимо, що

$$\lim\alpha_{\mathrm{n}}=\alpha\,;\qquad\lim\beta_{\mathrm{n}}=\beta\,;\qquad\lim\gamma_{\mathrm{n}}=\gamma\,. \tag{8}$$

Тоді, виділяючи в (6) асимптотичну складову ряду, одержуємо

$$Q_1(\lambda_n\xi_i)=\sum_{k=1}^{K}\frac{\gamma_k}{\xi_0-\xi_1}\frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2+s_k^2}N_1(s_k\xi_i)+\frac{\gamma}{\xi_0-\xi_1}\sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2+s_k^2}N_1^*(s_k\xi_i)+g_{in}, \quad (9)$$

де $N_1^*(s_k\xi_i)\sim N_1(s_k\xi_i)$ $(k\to\infty)$.

Надалі будемо враховувати асимптотичні значення параметрів відокремлення

$$\lambda_n\eta_0\sim n\pi \quad (n\to\infty), \qquad s_k(\xi_0-\xi_1)\sim k\pi \quad (k\to\infty) \qquad (10)$$

Переходимо в формулі (9) до границі при $n\to\infty$. Скінченна сума в (9) є нескінченно малою порядку. Те саме стосується і суми $\sum_{k=1}^{K}\frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2+s_k^2}N_1^*(s_k\xi_i)$. Для g_{in} за умови, що функції $g_i(\eta)$ ($i=0;1$) мають кусково-неперервні похідні на інтервалі [0; η_0], знаходимо

$$g_{in}\sim\frac{2g_i(\eta_0)}{n\pi}.$$

Підсумовуючи сказане, систему (9) зводимо до вигляду

$$Q_1(\lambda_n\xi_i)=\frac{\gamma}{\xi_0-\xi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2+s_k^2}N_1^*(s_k\xi_i)+0\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (i=0;1).$$

Далі, враховуючи асимптотичні співвідношення

$$Q_1(\lambda_n\xi_0)=\alpha+0\left(\frac{1}{n}\right),\qquad Q_1(\lambda_n\xi_1)=-\beta+0\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n\to\infty),$$

$$N_1^*(s_k\xi_0)=1+0\left(\frac{1}{k}\right),\qquad N_1^*(s_k\xi_1)=(-1)^k\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_1}}+0\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k\to\infty),$$

одержуємо

при $\xi=\xi_0$:

$$\alpha=\frac{\gamma}{\xi_0-\xi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2+s_k^2}+0\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (11)$$

при $\xi=\xi_1$:

$$\beta=\frac{\gamma}{\xi_0-\xi_1}\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_1}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2+s_k^2}+0\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (12)$$

За формулою [3]

$$\lim_{h\to0}h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)=\int_0^{\infty}f(x)dx, \qquad (13)$$

враховуючи співвідношення (10), знаходимо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\lambda_n}{\lambda_n^2+s_k^2}=(\xi_0-\xi_1)+0\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty).$$

Сума знакопочередного ряду в (12) за абсолютним значенням не перевищує $\frac{2\eta_0}{n\pi}$ $(n\to\infty)$. Отже, формули (11), (12) набувають вигляду

$$\alpha=\gamma+0\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \beta=0\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty). \qquad (14)$$

Тепер дослідимо систему (7). Приймаючи до уваги формули (8), (10) та асимптотичні вирази $(k\to\infty)$

$$L_1(s_k\eta_0)=1+0\left(\frac{1}{k}\right),\qquad B(\lambda_n,s_k,\xi_0,\xi_1)=\frac{\alpha}{\xi_0-\xi_1}+0\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$f_k = \frac{2}{k\pi}\left(f(\xi_0) + \left(\frac{\xi_1}{\xi_0}\right)^{\frac{1}{2}} f(\xi_1) \right) + 0\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

систему (7) зводимо до рівності

$$\gamma = \frac{\alpha}{\eta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2s_k}{\lambda_n^2 + s_k^2} + 0\left(\frac{1}{k}\right) \qquad (k \to \infty). \qquad (15)$$

За формулою (13) знаходимо суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2s_k}{\lambda_n^2 + s_k^2} = \eta_0 + 0\left(\frac{1}{k}\right)$.

Після підстановки цієї суми у формулу (15) одержуємо

$$\gamma = \alpha + 0\left(\frac{1}{k}\right) \qquad (k \to \infty). \qquad (16)$$

Враховуючи формули (8), (14), (16) визначаємо асимптотичні властивості невідомих

$$\lim \alpha_n = \lim \gamma_k = A, \qquad \lim \beta_n = 0.$$

Цей результат дає можливість, згортаючи асимптотичні складові рядів, подати систему (6), (7) у скінченному вигляді.

Дослідимо характер збіжності рядів загального розв'язку. Для цього виділимо у виразі (4) асимптотичні складові і розглянемо їх суму $\theta^*(\xi,\eta)$

$$\theta^*(\xi,\eta) = -\frac{\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{np}\sin nq - \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\xi_0\eta_0}{\xi\eta}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{kr}\sin kt, \qquad (17)$$

де

$$p = \pi\frac{\xi-\xi_0}{\eta_0}, \quad q = \pi\frac{\eta-\eta_0}{\eta_0}, \quad r = \pi\frac{\eta-\eta_0}{\xi_0-\xi_1}, \quad t = \pi\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0-\xi_1}. \qquad (18)$$

Ряди у формулі (17) відрізняються лише параметрами, тому достатньо дослідити перший з них. Його суму знаходимо з допомогою ряду $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{n(p+iq)} = -\ln\left(1-e^{p+iq}\right)$,

який збігається рівномірно при $p<0$ $(\xi<\xi_0)$ і умовно при $p=0$ $(\xi=\xi_0)$. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{np}\sin nq = Jm\sigma = arctg\frac{e^p\sin q}{1-e^p\cos q} \qquad (p<0). \qquad (19)$$

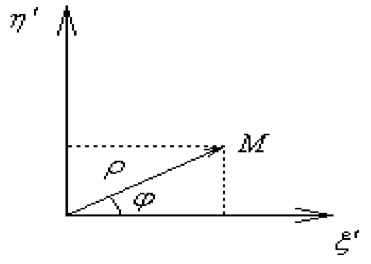
З формул (17), (19) знаходимо

$$\theta^*(\xi,\eta) = -\frac{\alpha}{\pi}arctg\frac{e^p \sin q}{1-e^p\cos q} - \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\xi_0\eta_0}{\xi\eta}\right)^{\frac{1}{2}} arctg\frac{e^r\sin t}{1-e^r\sin t} \qquad (p<0, r<0). \qquad (20)$$

Проаналізуємо одержаний вираз в околі кутової точки (ξ_0,η_0), де ряди мають найгіршу збіжність. Враховуючи (18) і розкриваючи невизначеність у співвідношенні (20), знаходимо при $\xi\to\xi_0$ і $\eta\to\eta_0$

$$\theta^*(\xi,\eta) \sim \frac{\alpha}{\pi}arctg\frac{\eta-\eta_0}{\xi-\xi_0} + \frac{\gamma}{\pi}arctg\frac{\xi-\xi_0}{\eta-\eta_0} = \frac{\alpha}{\pi}\varphi + \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{A}{2}, \qquad (21)$$

де φ – полярний кут точки $M(\xi';\eta')$ (рис.2).



$$\xi' = \xi - \xi_0$$
$$\eta' = \eta - \eta_0$$

Рис.2. Полярні координати точки М

З формули (21) бачимо, що хоча кожна складова розв'язку в кутовій точці є розривною в сумі вони дають однозначний результат. Отже, одержаний розв'язок крайової задачі є регулярним в усіх точках області включно з кутовою.

Висновки. Результати дослідження показують, що одержано точний розв'язок крайової задачі і дають можливість на базі виявлених асимптотичних властивостей розв'язку побудувати методом покращеної редукції ефективну процедуру його числової реалізації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональне многочлены.-М., «Наука», 1966.- 295 с.
2. Маделунг Э. Математический аппарат физики.-М., «Наука», 1968.- 618 с.
3. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч1.-М., Гостехиздат, 1965.- 396 с.
4. Кільчинський О.О., Скрипка В.І. Задача Неймана про розподіл потенціалу у двопорожнинному гіперболоїді обертання, обмеженому еліпсоїдальною поверхнею. Праці міжнародного симпозіуму «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV)». Т.1.-К., 2009.- С. 317-321.

Ляшко О.В, Скрипка В.И.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ПОЛОМ ПАРАБОЛОИДЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Строится общее решение уравнения Лапласа для полого параболоида, ограниченного частями координатных поверхностей параболоидальной системы. Доказывается регулярность бесконечных алгебраических систем, возникающих при удовлетворении граничных условий Неймана. Исследуется характер сходимости рядов общего решения и даются рекомендации относительно его корректной числовой реализации.

Ключевые слова: *Уравнение Лапласа, скалярный потенциал, краевая задача, задача Неймана, параболоид, параболоидальные координаты, функции Бесселя.*

Lyashko O., Scripka V.

THE DISTRIBUTION OF THE SCALAR POTENTIAL IN A HOLLOW PARABOLOID OF FINITE LENGTH

We construct a general solution of Laplace equation for paraboloid cavernous, limited parts of the coordinate surfaces paraboloyidalnoyi system. Proved the regularity of infinite algebraic systems that arise in satisfying the boundary conditions of Neumann. Investigate the nature of convergence of series of general solution and makes recommendations to correct its numerical realization.

Keywords: *Equation Laplassa, scalar potential, boundary value task, Neumann task, paraboloid, paraboloidal coordinates, Bessel functions.*