Ключевые слова: *математическая модель, ваер, трал, механическая система.*

Golikov S.P., Ivanovskiy N.V., Cherney S.G., Smetyh N.P., Skidan O.S.
MATHEMATICAL MODELING OF THE TRAWL COMPLEX ELEMENTS

The article presents the analysis of the existing mathematical models for complex industrial trawl vessels with the stern trawling scheme. The possibility of using the models for the processes analysis in the powersection of the complex is defined.

Keywords: *mathematical model, warp, trawl, mechanical system.*

УДК 514.7

Лопатюк М.М., Лопатюк С.П.

ЗГЛАДЖУВАННЯ ДИСКРЕТНО ЗАДАНИХ ПРОФІЛІВ

Представлена методика згладжування дискретно заданого аеродинамічного профілю. Запропонований алгоритм закріплення нескінченого значення похідної в лобовій точці профілю на основі використання параметричних сплайн-функцій.

Ключові слова*: сплайн-функція, момент, аеродинамічний профіль, згладжування.*

У задачах дослідження аеродинамічних профілів або теоретичних шпангоутів корпусів суден, моделювання аеродинамічних або гідродинамічних поверхонь достатньо часто виникає необхідність згладжування контурів при задоволенні заданих технічних умов. Методи згладжування представлені в деяких роботах Райнша, Завьялова, Тузова та ін.[1,2,4].

У статті пропонується методика згладжування дискретних профілів за допомогою кубічних сплайн-функцій [1].

У цілому, алгоритм зводиться до пошуку інтерполюючої функції $u(x)$, яка б реалізувала компроміс між необхідним наближенням до заданих точок контура $(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, N$ на інтервалі $[a, b]$

$$\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{N} (u(x_i) - y_i)^2$$

і гладкістю функції, яка оцінюється величиною $l(u) = \int_a^b (u'')^2 dx$.

Для реалізації ітераційного алгоритму шукаємо функцію $Q(x)$, що мінімізує функціонал

$$\Phi = \int_a^b (u'')^2 dx + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{R_j} \left[u(x_j) - y_j \right]^2, \tag{1}$$

де R_j – деякі вагові множники, які узгоджують гладкість і інтерполяцію.

Виходячи з теореми Холлідея, розв'язок шукаємо в класі функцій, що двічі неперервно диференціюються. Використовуємо кубічні сплайн-функції, які задовольняють цим вимогам і граничним вимогам

$$Q''(a) = Q''(b) = 0 .$$

Тоді з вимоги мінімізації функціоналу (1) отримуємо вираз для шуканої функції

$$Q(x) = y_j - R_j \left(\frac{M_{j+1} - M_j}{h_{j+1}} - \frac{M_{j-1}}{h_j}\right).$$

Відмітимо, що вираз в дужках – це стрибок третьої похідної в j -ій точці, а рівність нулю будь-якого з вагових множників

$$R_j = 0 \quad (j = 1,\ldots,N)$$

Означає, що мінімізуюча функція точно проходить через точку $(x_j, y_j),\quad j = 1,\ldots,N$. Після кожного кроку ітерації згладжування y_j все більше наближаються до вимог, а їх відповідні вагові множники зменшуються. При $R_j \to 0 \quad (j = 1,\ldots,N)$ функція $Q(x)$ являє собою інтерполяційний кубічний сплайн $S(x)$.

Так само, як і в випадку простої інтерполяції кубічними сплайн-функціями [2], задача зводиться до розв'язування системи рівнянь, що зв'язують коефіцієнти – моменти M_j в вузлових точках, але на відміну від інтерполяційної матриці тут матриця є п'ятидіагональною

$$\begin{aligned}
&M_{j-2}\frac{R_{j-1}}{h_{j-1}h_j} + M_{j-1}\left\{-\frac{1}{h_j}\left[\left(\frac{1}{h_{j-1}}+\frac{1}{h_j}\right)R_{j-1} + \left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)R_j\right] + \frac{h_j}{6}\right\} + \\
&+ M_j\left[\frac{1}{h_j^2}R_{j-1} + R_j\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)^2 + \frac{1}{h_{j+1}}R_{j+1} + \frac{1}{3}\left(h_j + h_{j+1}\right)\right] + \\
&+ M_{j+1}\left\{-\frac{1}{h_{j+1}}\left[\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)R_j + \left(\frac{1}{h_{j+1}}+\frac{1}{h_{j+2}}\right)R_{j+1}\right] + \frac{h_{j+1}}{6}\right\} + \\
&+ M_{j+2}\frac{R_{j+1}}{h_{j+1}h_{j+2}} = \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}, \quad j = 2,\ldots,N-1, \quad M_0 = M_{N+1} = 0
\end{aligned}$$

або в матричній формі

$$\overline{A} \cdot \overline{M} = \overline{F} ,$$

де

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N-4} & b_{N-3} & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{N-2} & b_{N-1} & a_N \end{bmatrix}$$

$$\overline{M}=\begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{vmatrix}, \qquad M_1=M_N=0$$

$$\overline{F}=\begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ f_N \end{vmatrix}, \qquad f_j=\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}, \quad j=2,\dots,N-1$$

$$h_j=x_{j+1}-x_j, \quad j=1,\dots,N-1$$

Коефіцієнти матриці $\overline{A}$ мають вигляд:

$$a_1=a_N=1 \qquad b_1=c_1=c_{N-2}=b_{N-1}=f_1=f_N=0$$

$$a_j=\frac{1}{3}\left(h_{j-1}+h_j\right)+\frac{1}{h_{j-1}^2}R_{j-1}+\left(\frac{1}{h_{j-1}}+\frac{1}{h_j}\right)^2R_j+\frac{1}{h_j^2}R_{j+1}$$

$$b_j=\frac{1}{6}h_j-\frac{1}{h_j}\left[\left(\frac{1}{h_{j-1}}+\frac{1}{h_j}\right)R_j+\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)R_{j+1}\right], \quad j=2,\dots,N-2$$

$$c_j=\frac{1}{h_jh_{j+1}}, \quad j=2,\dots,N-3$$

Система розв’язується методом факторизації [1]. Покладаючи рівними нулю відповідні вагові множники, можна наперед закріпляти точки, які необхідно зберегти в процесі згладжування (наприклад, лобову і хвостову точки профілю, що згладжується). При моделюванні поверхні крила виникає необхідна умова закріплення нескінченого значення похідної в лобовій точці. В цьому випадку пропонується використовувати параметричні сплайни $x(s), y(s)$, де s - параметр [2]. Коефіцієнти для сплайна $x(s)$ визначаються з урахуванням вимоги

$$\frac{dx}{ds} = 0,$$

що необхідною умовою для виконання вимоги

$$\frac{dy}{dx} = \infty .$$

Тоді коефіцієнти першого рівняння матимуть вигляд

$$\bar{a}_1 = 2, \quad \bar{b}_1 = 1, \quad \bar{f}_1 = 6\frac{y_2 - y_1}{h_2^2};$$

другого:

$$\bar{a}_2 = \frac{h_3}{3} + \frac{h_2}{4} + \frac{3}{2}R_1\frac{1}{h_2^2} + R_2\left(\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_3} + \frac{3}{2}\frac{1}{h_2}\right) + \frac{R_3}{h_3^2},$$

$$\bar{f}_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_3} - 3\frac{y_2 - y_1}{h_2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{h_2^2}\left(R_1\frac{1}{h_2} + R_2\left(\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_2}\right)\right)\right];$$

третього:

$$\bar{b}_2 = -\frac{1}{h_3}\left[\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)R_2 + \left(\frac{1}{h_4} + \frac{1}{h_3}\right)R_3\right] - \frac{1}{2h_2h_3}R_2 + \frac{h_3}{6},$$

$$\bar{f}_3 = \frac{y_4 - y_3}{h_4} - \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{3}{h_2^3h_3}R_2\left(y_2 - y_1\right).$$

А матриці $\overline{A}$ і $\overline{F}$ приймають вигляд

$$\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \vdots \\ \bar{f}_{N-2} \\ \bar{f}_{N-1} \\ \bar{f}_N \end{bmatrix},$$

$$
\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix}
a_1 & \overline{b}_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_1 & \overline{a}_2 & \overline{b}_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_1 & \overline{b}_2 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N-4} & b_{N-3} & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-1} & b_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{N-2} & b_{N-1} & a_N
\end{bmatrix}
$$

Система рівнянь для визначення сплайна, що згладжує, приймає вигляд:

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{M} = \overline{\overline{F}} .$$

Таким чином, в результаті розв’язування задачі інтерполяції і згладжування отримуємо матриці коефіцієнтів MX_i і MY_i, $i = 1, \dots, N$, що визначають відповідно залежності $X = X(s)$ і $Y = Y(s)$ на заданій дискретній множині точок $\{x_i, y_i\}$, що визначають аеродинамічний профіль.

За допомогою представленого вище алгоритму можна розв’язувати, наприклад, задачу згладжування поверхні корпусу судна, представленого набором поздовжніх і поперечних ізопараметричних ліній. Алгоритм легко програмується і дозволяє зберігати типові множини геометричних параметрів для подальших геометричних і технічних розрахунків.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функцій. –М.: Наука, 1980. – 352 с.
2. *Тузов А.Д.* Сглаживание функций, заданных таблицами. –Н.: Выч. системы, вып.68. – 1976.
3. *Лопатюк М.М., Лопатюк С.П.* Определение аэродинамических и геометрических параметров при исследовании профиля.- Депонирована в ВИМИ, РЖ, №32, МРС. –1981. –5 с.
4. *Cliff W.* Estes (BaseLine Technology) translated into Russian by A. Surkov [Електронний ресурс] //Rhinoceros Advanced Training Series. Marine Design.-2004.-Режим доступу: http://sual.narod.ru/Rhino/ RhinoMarineTutorial/ RhinoMarine.htm

Лопатюк М.М., Лопатюк С.П.

СГЛАЖИВАНИЕ ДИСКРЕТНО ЗАДАННЫХ ПРОФИЛЕЙ

Представлена методика сглаживания дискретно заданного аэродинамического профиля. Предложен алгоритм закрепления бесконечного значения производной в лобовой точке профиля на основе использования параметрических сплайн-функций.

Ключевые слова: *сплайн-функция, момент, аэродинамический профиль, сглаживание.*

Lopatjuk M., Lopatjuk S.

THE SMOOTHING OF DISCRETELY DEFINED PROFILES

The article deals with the methods of smoothing the discrete profile (airfoil). Special attention is given to the algorithm of fixing the infinite value of the derivative at the point of the frontal profile using parametric spline-functions.

***Keywords**: spline-function, moment, airfoil, smoothing.*