УДК 532.5, 621.6

Бовсуновська К.С., Ганношина І.М.

ІДЕНТИФІКАЦІЯ СТРУКТУРИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ГІДРОДИНАМІКИ

Розглядається задача еквівалентного спрощення виразів, що отримують при розв’язанні системи рівнянь гідродинаміки. Запропоновано алгоритм спрощення, що ґрунтується на використанні теорії ланцюгових дробів.

Ключові слова: *інтегральні перетворення, ітераційна схема, конвективно-дифузійний перенос, ланцюгові дроби, рівняння гідродинаміки.*

Конвективно-дифузійне перенесення речовини у водних об’єктах (рух рідини, перенесення субстанції у ній, температурний режим тощо) описується системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних із відповідними початковими і межовими умовами [1]

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\mu_T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}-\frac{2}{3}\rho\frac{\partial K}{\partial x};\tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\mu_T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}-(\rho-\rho_\infty)g-\frac{2}{3}\rho\frac{\partial K}{\partial z};\tag{2}$$

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\lambda_T\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right);\tag{3}$$

Рівняння енергії турбулентного руху K визначається як [1]

$$\rho\left(\frac{\partial K}{\partial t}+u\frac{\partial K}{\partial x}+w\frac{\partial K}{\partial z}\right)=G-\rho\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_t\frac{\partial K}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_t\frac{\partial K}{\partial z}\right)+\rho\frac{g}{T}\frac{\partial T}{\partial z}.\tag{4}$$

Згідно рівнянню Клапейрона за сталої густини потоку $p=\rho RT$, тоді

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho R\frac{\partial T}{\partial x};\ \frac{\partial p}{\partial z}=\rho R\frac{\partial T}{\partial z}.$$

Система рівнянь (1)-(4) набуває вигляду

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\mu_T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\rho R\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{2}{3}\rho\frac{\partial K}{\partial x};$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\mu_T\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\rho R\frac{\partial T}{\partial z}-(\rho-\rho_\infty)g-\frac{2}{3}\rho\frac{\partial K}{\partial z};$$

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\lambda_T\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right);$$

У результаті застосування числово-аналітичного методу до розв’язання нелінійних рівнянь із частинними похідними [1] до розв’язання системи рівнянь гідродинаміки (рівнянь Нав’є-Стокса) [2] отримують розв’язання для компонент швидкості руху субстанції

$u = [u_x, u_y, u_z]$ (рідинне або газове середовище) у такому вигляді (на першій ітерації)

$$u_x^{(1)}(x,y,z,t) = u_x^{(0)}(x,y,z,t) + \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z} X_i(\alpha_i, x) Y_j(\beta_{i,j} y) Z_k(\gamma_{i,j,k} z)[U1_{i,j,k}^{(1)} + U2_{i,j,k}^{(1)}] e^{-\delta_{i,j,k} t}. \quad (5)$$

Згідно загальної схеми ітераційного процесу лінійна частина розв'язання системи нестаціонарних рівнянь гідродинаміки, яка містить і рівняння Нав'є-Стокса, може бути подана у вигляді ряду

$$u_x^{(0)}(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z} X_{u_x}(\alpha_i, x) Y_{u_x}(\beta x_{i,j} y) Z_{u_x}(\gamma x_{i,j,k} z)[U1_{i,j,k}^{(0)} + U2_{i,j,k}^{(0)}] e^{-\delta x_{i,j,k} t}. \quad (6)$$

Тут $X_{u_x}(\alpha_i, x)$, $Y_{u_x}(\beta_{i,j} y)$, $Z_{u_x}(\gamma_{i,j,k} z)$ – власні функції лінійної частини крайової задачі на власні значення і функції стосовно компоненти швидкості u_x [3].

Числа N_x, N_y, N_z визначають кількість членів ряду, що враховуються у розв'язанні з погляду на потрібну точність розв'язання. Величини $U1_{i,j,k}^{(0)}$, $U2_{i,j,k}^{(0)}$ визначаються початковими і межовими умовами відповідної крайової задачі, що підпорядковуються відповідним інтегральним перетворенням.

Аналогічно можна записати розв'язання лінійної частини відносно компонент швидкості u_y, u_z

$$u_y^{(0)}(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z} X_{u_y}(\alpha y_i, x) Y_{u_y}(\beta y_{i,j} y) Z_{u_y}(\gamma y_{i,j,k} z)[V1_{i,j,k}^{(0)} + V2_{i,j,k}^{(0)}] e^{-\delta_{i,j,k} t}.$$

$$u_z^{(0)}(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z} X_{u_z}(\alpha z_i, x) Y_{u_z}(\beta z_{i,j} y) Z_{u_z}(\gamma z_{i,j,k} z)[W1_{i,j,k}^{(0)} + W2_{i,j,k}^{(0)}] e^{-\delta_{i,j,k} t}.$$

Наступний етап полягає в обчисленні інтегральних перетворень від добутку шуканих функцій у конвективній частині квазілінійних рівнянь Нав'є-Стокса – $u_x \partial u_x/\partial x$, $u_y \partial u_x/\partial y$, $u_z \partial u_x/\partial z$ у першому рівнянні, $u_x \partial u_y/\partial x$, $u_y \partial u_y/\partial y$, $u_z \partial u_y/\partial z$ – у другому та $u_x \partial u_z/\partial x$, $u_y \partial u_z/\partial y$, $u_z \partial u_z/\partial z$ у третьому рівнянні системи. Те саме стосується й рівняння відносно температури потока рідини або газу.

Добуток виразів типу (5), (6) і застосуванням інтегральних перетворень за просторовими змінними дає вираз вигляду

$$\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}\sum_{l=1}^{N_x}\sum_{m=1}^{N_y}\sum_{n=1}^{N_z} U3_{i,j,k} e^{-\delta x_{i,j,k} t} V3_{l,m,n} e^{-\delta_{l,m,n} t}. \quad (7)$$

Виконання подальших ітерацій кожного разу призводить до подвоєння сум відносно часової змінної, що фактично унеможливлює подальше використання такого вигляду виразів.

У зв'язку з цим у роботі вирішується проблема еквівалентного спрощення виразів вигляду (5) таким чином, щоб уніфікувати отримані розв'язання з метою їхнього подальшого використання для розв'язання квазілінійної системи рівнянь Нав'є-Стокса.

У роботі пропонується алгоритм еквівалентного спрощення, що грунтується на застосуванні апарату ланцюгових дробів [3].

Застосуємо до виразу (5) інтегральне перетворення за Лапласом відносно часової змінної. Маємо

$$\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}\sum_{l=1}^{N_x}\sum_{m=1}^{N_y}\sum_{n=1}^{N_z}\frac{R_{i,j,k,l,m,n}}{p+\delta x_{i,j,k}+\delta_{l,m,n}}. \tag{8}$$

Розглянемо спочатку часткову суму вигляду

$$Y(p)=\sum_{n=1}^{N}\frac{R_n}{p+\delta_n}.$$

Подамо її у вигляді дробово-раціональної функції

$$Y(p)=\frac{\sum_{n=0}^{N-1}b_n p^n}{\sum_{n=0}^{N}a_n p^n}. \tag{9}$$

Застосування алгоритму еквівалентного спрощення [3] дає можливість отримати замість (8) такий вираз

$$Y(p)\approx\frac{b_0+b_1 p}{a_0+a_1 p+a_2 p^2}. \tag{10}$$

У просторі оригіналів цьому виразу відповідає

$$y(t)=e^{-\alpha t}[A\varphi_1(t)+B\varphi_2(t)],$$

де

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\cos\omega t, & \omega>0\\ \cosh\omega t, & \omega<0.\end{cases}$$

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}\sin\omega t, & \omega>0\\ \sinh\omega t, & \omega<0.\end{cases}$$

Повторне застосування алгоритму (8)-(9) до решти складових ряду (5) дозволяє отримати вираз вигляду (10). Обгрунтування такого підходу – будь-яка система високого порядку наближено веде себе як система другого порядку із запізненням.

Отже,

$$\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}\sum_{l=1}^{N_x}\sum_{m=1}^{N_y}\sum_{n=1}^{N_z}U3_{i,j,k}e^{-\delta x_{i,j,k}t}V3_{l,m,n}e^{-\delta_{l,m,n}t}\approx e^{-\alpha t}[A\varphi_1(t)+B\varphi_2(t)].$$

Тоді розв'язання, наприклад, першого рівняння (1) системи квазілійних рівнянь Нав'є-Стокса можна наближено подати у вигляді функції

$$u_x^{(1)}(x,y,z,t)=u_x^{(0)}(x,y,z,t)+\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}X_i(\alpha_i,x)Y_j(\beta_{i,j}y)Z_k(\gamma_{i,j,k}z)\times$$
$$\times e^{-\alpha_{i,j,k}t}[A_{i,j,k}\varphi_1(\omega_{i,j,k}t)+B_{i,j,k}\varphi_2(\omega_{i,j,k}t).$$

Похибки, що накопичуються за рахунок такої апроксимації, по-перше, не є суттєві (рис. 1), по-друге, їх можна скопенсувати за рахунок додаткових ітерацій під час розв'язання системи рівнянь.

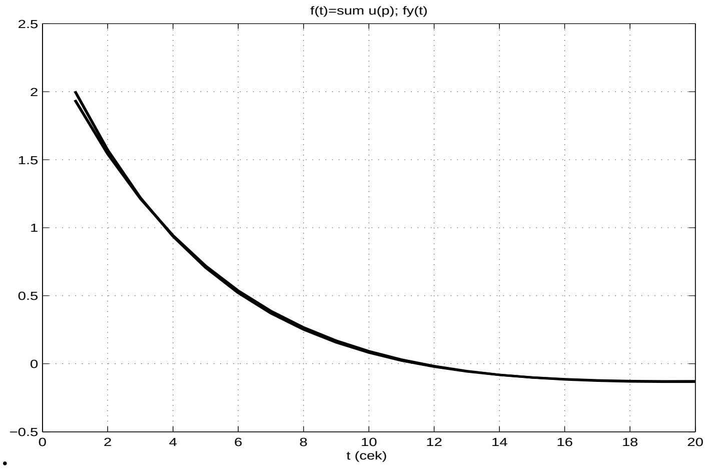

Рис. 1.

Наведений алгоритм може ефективно застосовуватися до розв'язання широкого класу нестаціонарних нелінійних рівнянь математичної фізики.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Халатов А.А., Авраменко А.А., Шевчук И.В.* Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил. Том 3. – Закрученные потоки: Институт техн. теплофизики НАНУ, 2000. – 474 с.
2. *Зеленський К.Х.*. Ітераційний метод розв'язання нелінійних крайових задач. Наукові нотатки. Міжв. збірник. Вип. 26. – Луцьк, ЛНТУ, 2009. – С.92– 100.
3. *Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М, Коц О.П.* Комп'ютерні методи прикладної математики. К.: Наукова думка, 2002. – 480 с.

Бовсуновская К.С., Ганношина І.М.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Рассматривается задача эквивалентного упрощения выражений, получаемых при решении системы уравнений гидродинамики. Предложен алгоритм эквивалентного упрощения, основанный на применении теории цепных дробей.

Ключевые слова: *интегральные преобразования, итерационная схема, конвективно-диффузионный перенос, уравнения Навье-Стокса.*

Bovsunovska K.S., Gannoshina I.N.

IDENTIFICATION OF STRUCTURE OF DECISION OF SYSTEM OF HYDRODYNAMIC EQUATIONS

A problem of redusing of expresions, that are received while solving the system of Navier-Stokes equations is discussed. An algorithm of equivalent reducing is proposed, Based on the theory of chain fractions.

Keywords*: integral transforms, iterative procedure, convective-diffusion transform, Navier-Stokes equations, chain fractions.*