УДК 656.61.052

Астайкин Д.В.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СМЕШАННЫХ ЗАКОНОВ

Получены функции распределения вероятностей случайных погрешностей навигационных измерений для смешанного распределения первого типа (обобщенного распределения Коши). Приведены аналитические выражения функций распределения для трех значений существенных параметров смешанных законов и получены их графические зависимости.
***Ключевые слова**: случайные погрешности, смешанный закон распределения, плотность и функция распределения.*

Постановка проблемы. Традиционно полагается, что погрешности навигационных измерений подчиняются нормальному закону, устойчивость которого позволяет его использование для описания системы зависимых случайных величин.

Однако во многих случаях статистические данные погрешностей навигационных измерений, полученные в натурных наблюдениях, не подчиняются нормальному закону, что повело к поиску альтернативных законов распределения вероятностей погрешностей навигационных измерений. При этом возникает вопрос правомерности применения метода наименьших квадратов для определения эффективных оценок обсервованых координат судна.

Анализ последних достижений и публикаций, выделение нерешенных ранее частей общей проблемы. В работах [1,2] указано, что погрешности навигационных измерений, полученные в натурных наблюдениях, не подчиняются нормальному закону. Модель смешанного распределения, корректно описывающая распределение случайной величины общей выборки, которую составляют частные выборки нормально распределенной случайной величины с различными значениями среднего квадратического отклонения, предложена в работах [1,3,4].

В работе [5] получены смешанные распределения, плотность которых выражается в явном виде. Однако отсутствуют выражения для функции распределения смешанного закона, что затрудняет проверку статических гипотез распределения случайных погрешностей навигационных измерений, полученных в натурных наблюдениях

Формулировка целей статьи (постановка задачи). Цель статьи заключается в анализе возможности получения аналитического выражения функции распределения вероятностей случайных погрешностей измерения навигационных параметров, подчиняющихся смешанному закону, плотность которого выражается в явном виде.

Изложение основного материала исследования с обоснованием полученных научных результатов.

В смешанном распределении первого типа в качестве базового используется закон распределения вероятностей Коши, недостатком которого является отсутствие дисперсии и центральных моментов высшего порядка.

Плотность $f_K(x)$ распределения Коши имеет следующий вид

$$f_o(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}\pi}\ \frac{1}{(x^2/2+\alpha)}.$$

Так как $\int\limits_{R1} f_o(x)dx = 1$, то справедливо равенство

$$\int\limits_{R1} \frac{dx}{(x^2/2+\alpha)} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\alpha}}. \qquad (1)$$

Найдем первую производную левой и правой части выражения (1) по параметру α

$$\int\limits_{R1} \frac{dx}{(x^2/2+\alpha)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\alpha^{-\frac{3}{2}}. \qquad (2)$$

Следовательно, следующее выражение $f_{K1}(x)$ является плотностью распределения

$$f_{K1}(x) = \frac{2\alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi}\,\frac{1}{(x^2/2+\alpha)^2}.$$

Аналогично, дважды дифференцируя выражение (1), найдем выражение для плотности $f_{K2}(x)$

$$f_{K2}(x) = \frac{2^2\alpha^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}\pi 1\cdot 3}\,\frac{1\cdot 2}{(x^2/2+\alpha)^3}.$$

Дифференцируя выражение (1) *n* раз, получим первый тип смешанного распределения (обобщенное распределение Коши) с плотностью распределения $f_{Kn}(x)$, которая имеет вид

$$f_{Kn}(x) = \frac{2^n\alpha^{n+\frac{1}{2}}n!}{\sqrt{2}\pi 1\cdot 3\cdot\cdot(2n-1)}\,\frac{1}{(x^2/2+\alpha)^{n+1}}, \qquad (n\le 6)$$

причем *n* является существенным параметром.

Данное распределение вероятностей целесообразно применять для описания случайных погрешностей навигационных измерений, которые встречаются в граничных разрядах чаще, чем в нормальном законе. Причем существенный параметр должен быть меньше 7.

На рис. 1 приведены кривые плотности распределения нормированных и центрированных случайных погрешностей с существенным параметром от 1 до 6, которые снизу ограничены кривой плотности закона Коши, а сверху - кривой плотности закона Гаусса.

Найдем функцию распределения вероятностей закона Коши

$$F_o(x,\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{d\xi}{(\xi^2/2+\alpha)}. \qquad (3)$$

Произведем замену переменной $y = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$, $d\xi = \sqrt{2}dy$ и получим

$$F_o(x,\alpha) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{dy}{(y^2+\alpha)} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}arctg\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\Bigg|_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}}. \qquad (4)$$

Подставляя пределы интегрирования, получим функцию распределения вероятностей закона Коши

$$F_o(x,\alpha) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\xi}{(\xi^2/2+\alpha)} = \frac{1}{\pi}(arctg\frac{x}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\frac{x}{\sqrt{2\alpha}} \ . \quad (5)$$

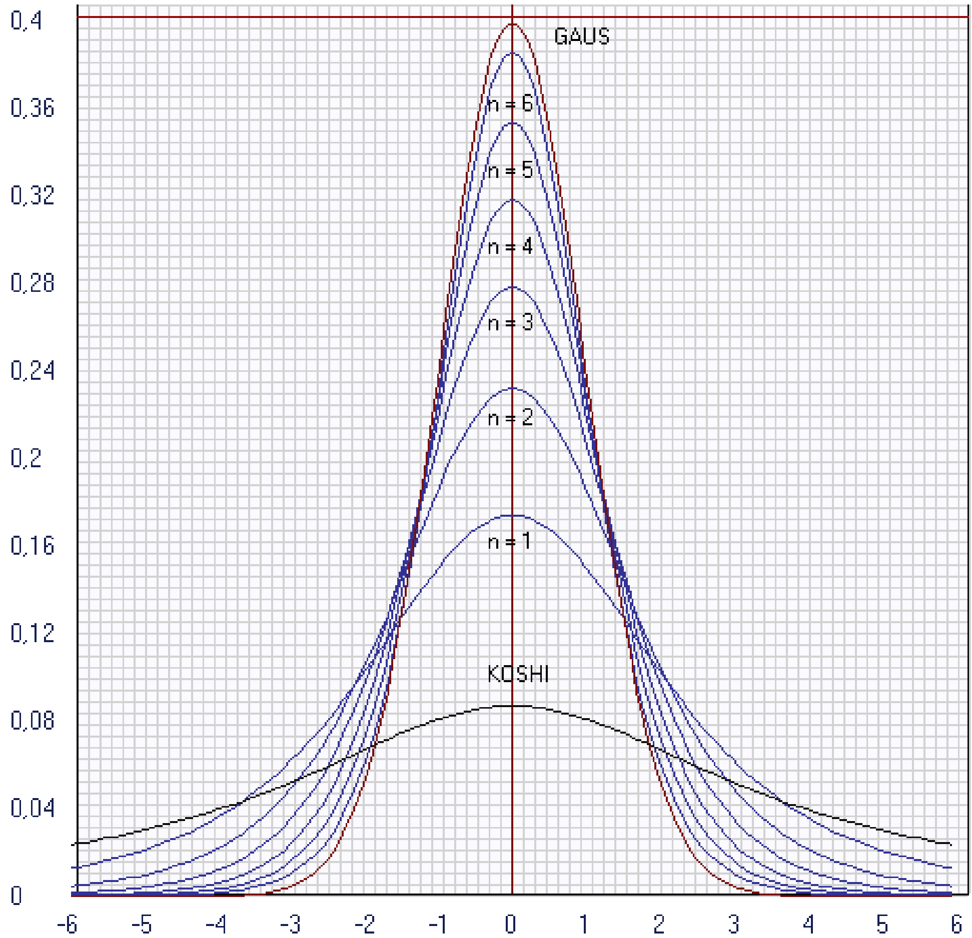

Рис. 1. Кривые плотности смешанных распределений

В общем виде функция распределения для смешанного закона первого типа выражается следующим образом

$$F_{Ki}(x,\alpha,n) = \int_{-\infty}^{x} f_{Ki}(\xi,\alpha,n)d\xi \, . \qquad (6)$$

Левую часть выражения (5) можно записать следующим образом

$$F_o(x,\alpha) = \int_{-\infty}^{x} A^{-1}(\alpha)\Phi_o(\xi,\alpha)d\xi \, , \qquad (7)$$

где $A^{-1}(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}$, и

$$\Phi_o(\xi,\alpha) = \frac{1}{(\xi^2/2+\alpha)}\,. \qquad (8)$$

Из выражения (7) следует

$$A\ (\alpha)F_o(x,\alpha) = \int_{-\infty}^{x} \Phi_o(\xi,\alpha)d\xi\,.$$

Обозначаем $\Im_o(x,\alpha) = A\ (\alpha)F_o(x,\alpha)$ и получим

$$\Im_o(x,\alpha) = \int_{-\infty}^{x} \Phi_o(\xi,\alpha)d\xi \qquad (9)$$

Дифференцируем обе части уравнения (9) по параметру α

$$\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[\Im_o(x,\alpha)] = \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[\Phi_o(\xi,\alpha)]d\xi\,.$$

Умножим обе части уравнения на величину $\{\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[A\ (\alpha)]\}^{-1}$

$$\{\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[A\ (\alpha)]\}^{-1}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[\Im_o(x,\alpha)] = \int_{-\infty}^{x} \{\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[A\ (\alpha)]\}^{-1}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[\Phi_o(\xi,\alpha)]d\xi\,.$$

Правая часть данного уравнения под знаком интеграла содержит смешанную плотность распределения $f_{Kn}(\xi,\alpha,n)$, а сама правая часть равна функции распределения смешанного закона $F_{Kn}(x,\alpha,n)$. Поэтому

$$F_{Kn}(x,\alpha,n) = \{\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[A\ (\alpha)]\}^{-1}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[\Im_o(x,\alpha)] \qquad (n \le 6). \qquad (10)$$

С помощью полученного выражения, используя формулы (8) получены функции распределения в явном виде. Здесь приведем их выражения для n =1,2 и 3, а их графические зависимости для нормированной случайной погрешности в диапазоне от -6 до 6 с.к.о. получены на компьютере и показаны на рис. 2.

Обозначим $A^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[A\ (\alpha)]$ и $F_o{}^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}[F_o(x,\alpha)]$:

$$F_{K1} = F_o(x,\alpha) + \frac{A}{A^{(1)}}F_o{}^{(1)};\ F_{K2} = F_o(x,\alpha) + 2\frac{A^{(1)}}{A^{(2)}}F_o{}^{(1)} + \frac{A}{A^{(2)}}F_o{}^{(2)};$$

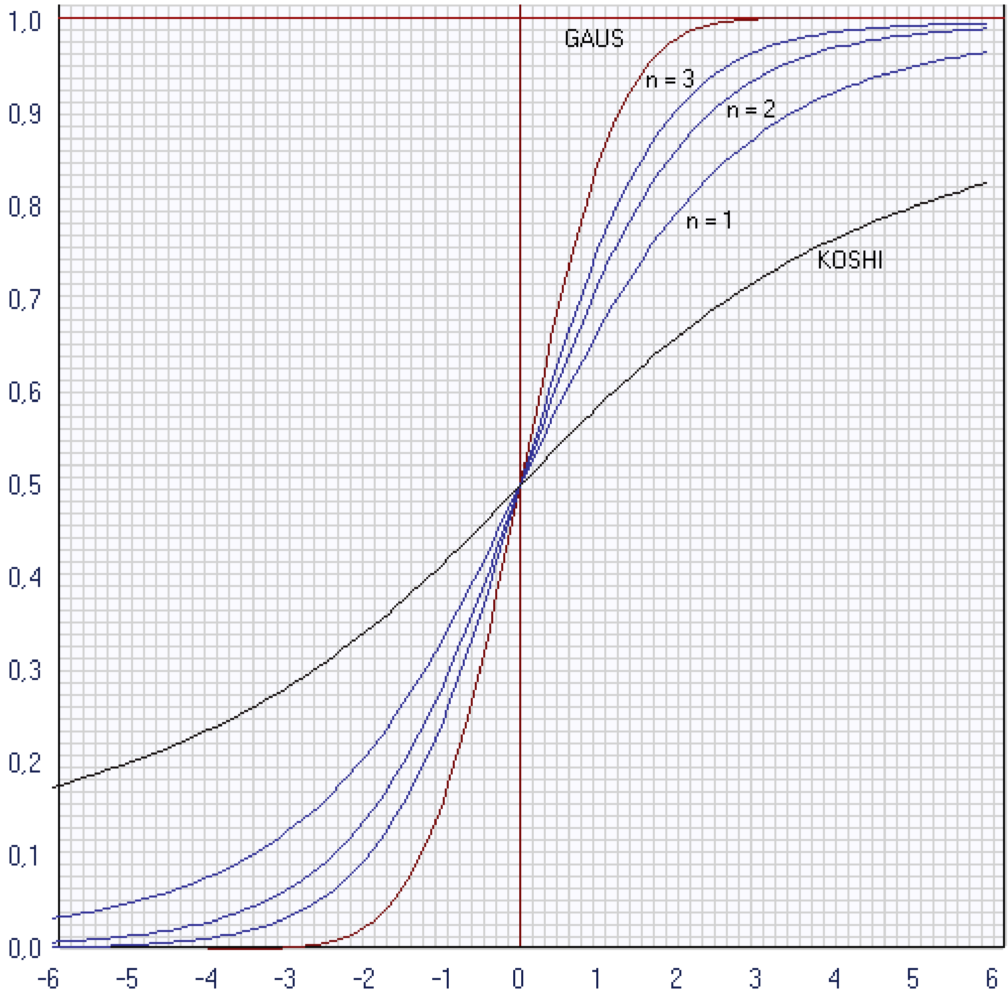

Рис. 2. Функции распределения смешанного закона

$$F_{КЗ} = F_o + 3\left(\frac{A^{(2)}}{A^{(3)}} F_o^{(1)} + \frac{A^{(1)}}{A^{(3)}} F_o^{(2)}\right) + \frac{A}{A^{(3)}} F_o^{(3)},$$

где $A = \sqrt{2\pi}\alpha^{-\frac{1}{2}}$; $A^{(1)} = -\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\alpha^{-\frac{3}{2}}$; $A^{(2)} = \frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{2\pi}\alpha^{-\frac{5}{2}}$;

$A^{(3)} = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\sqrt{2\pi}\alpha^{-\frac{7}{2}}$; $F_o = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{\sqrt{2\alpha}}$; $F_o^{(1)} = -\dfrac{x\alpha^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{x^2}{2\alpha}\right)}$;

$$F_o^{(2)} = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1\cdot 3}{2^2}\alpha^{-\frac{5}{2}} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2\alpha}\right)} - \frac{1}{4}\alpha^{-\frac{7}{2}} \frac{x^2}{\left(1+\frac{x^2}{2\alpha}\right)^2}\right];$$

$$F_o^{(3)} = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\alpha^{-\frac{7}{2}} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2\alpha}\right)} + \left(\frac{1\cdot 3}{2^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2}\right)\alpha^{-\frac{9}{2}} \frac{x^2}{\left(1+\frac{x^2}{2\alpha}\right)^2} - \frac{1}{4}\alpha^{-\frac{11}{2}} \frac{x^4}{\left(1+\frac{x^2}{2\alpha}\right)^3}\right].$$

Выводы и перспектива дальнейшей работы по данному направлению.

Для смешанного распределения первого типа (обобщенного распределения Коши) получены функции распределения вероятностей случайных погрешностей навигационных измерений. Приведены аналитические выражения функций распределения для трех значений существенных параметров смешанных законов и получены их графические зависимости.

В дальнейшем целесообразно исследовать статистический материал по случайным погрешностям навигационных измерений и проверить их распределение по смешанному закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондрашихин В. Т. Определение места судна. – М.: Транспорт, 1989. – 250 с.
2. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation // The Journal of Navigation. – Vol. 32.- № 3. – P. 426-429.
3. Ткаченко А. С. К вопросу формирования модели смешанного распределения погрешностей навигационных измерений // Судовождение. – 2005. – № 10 – С. 118-122.
4. Алексишин В. Г. Требования к плотности распределения среднего квадратического отклонения в модели смешанного распределения / Алексишин В.Г. Ткаченко А.С. // Судовождение. – 2006. - № 11. – С. 9 – 13.
5. Ткаченко А. С. Совершенствование методов контроля и прогноза места судна. Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.22.13/ ОНМА. – Одесса, 2009. – 24 с.

Астайкін Д.В.

АНАЛІТИЧНИЙ ВИРАЗ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ЗМІШАНИХ ЗАКОНІВ

Одержані функції розподілу вірогідності випадкових похибок навігаційних вимірювань для змішаного розподілу першого типу (узагальненого розподілу Коші). Приведені аналітичні вирази функцій розподілу для трьох значень істотних параметрів змішаних законів і одержані їх графічні залежності.

***Ключові слова**: випадкові погрішності, змішаний закон розподілу, щільність і функція розподілу.*

Astajkin D.

ANALYTICAL EXPRESSION OF FUNCTION OF DISTRIBUTING OF CASUAL ERRORS OF THE MIXED LAWS

The functions of probability distribution of random error terms of the navigation measurings for the mixed distributing of the first type are got (generalized distributing Koshy). Analytical expressions of functions of distributing are resulted for three values of substantial parameters of the mixed laws and their graphic dependences are got.

***Keywords**: random error terms, mixed law of distributing, closeness and function of distributing.*