

## ПОЛІНОМІАЛЬНА КРИВА ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ ІЗ КЕРУЮЧИМИ ТОЧКАМИ, ЩО НАЛЕЖАТЬ КРИВІЙ

*Пропонується спосіб розрахунку сегментів кубічної кривої із керуючими точками, що інцидентні кривій та наведено тестовий приклад.*

**Ключові слова:** кубічна крива, керуючі точки.

**Постановка проблеми.** Для моделювання гладких кривих, поверхонь і тіл у конструюванні машинобудівних агрегатів широко застосовується спосіб подання векторно-параметричних кривих у формі Фергюсона та Бернштейна-Безьє або за допомогою раціональних векторно-параметричних функцій [5]. Та, коли є необхідність працювати тільки з точками на кривій, ці способи не зовсім зручні, оскільки каркасні серединні точки у формі Бернштейна-Безьє не лежать на первинно-заданому точковому каркасі й у кінцевому вигляді не знаходяться на вихідній кривій. Також бувають випадки, коли не зовсім зручно працювати з кривими у формі Фергюсона через необхідність розрахування похідних у вузлових точках. Це особливо стосується методу деформації довільної форми (так званий метод FFD – Free Form Deformation [6]).

**Формулювання цілей статті.** Можна запропонувати подання векторно-параметричної кривої у такому вигляді, при якому каркасні точки будуть належати первинному точковому ряду і лежати на вихідній кривій та провести дослідження властивостей такого подання. Для дослідження такого способу застосуємо формулу Лагранжа для поліноміальної інтерполяції.

**Основна частина.** Поліноміальна крива  $n$ -го степеня із керуючими точками, що належать кривій. Візьмемо  $N+1$  точок:  $0(x_0, y_0)$ ,  $1(x_1, y_1)$ , ...,  $N(x_N, y_N)$ . Для отримання поліноміальної формули застосуємо поліноміальну інтерполяцію за Лагранжем [7] у залежності  $y = y(x)$ . Призначимо параметр  $u = (x - x_0)/(x_N - x_0)$  (рис. 1). Отримаємо:

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 \frac{(u - u_1)(u - u_2) \dots (u - u_i) \dots (u - u_N)}{(u_0 - u_1)(u_0 - u_2) \dots (u_0 - u_i) \dots (u_0 - u_N)} + \\
 &+ y_1 \frac{(u - u_0)(u - u_2) \dots (u - u_i) \dots (u - u_N)}{(u_1 - u_0)(u_1 - u_2) \dots (u_1 - u_i) \dots (u_1 - u_N)} + \\
 &+ \dots + y_N \frac{(u - u_0)(u - u_1) \dots (u - u_{(N-1)})}{(u_N - u_0)(u_N - u_1) \dots (u_N - u_{(N-1)})} = \\
 &= \sum_{i=0}^N [y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{(u - u_j)}{(u_i - u_j)}].
 \end{aligned} \tag{1}$$

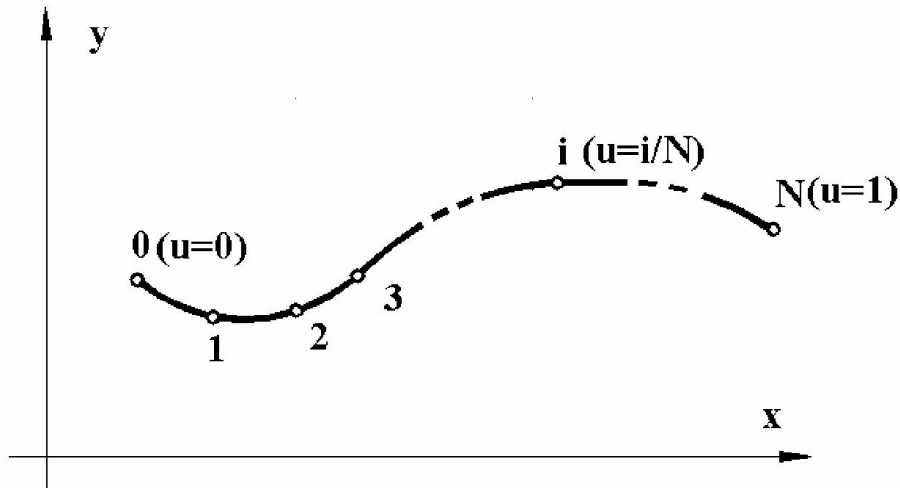


Рис.1. Сегмент поліноміальної кривої n-го степеня

Якщо взяти рівномірне розташування точок, то  $u_0=0$ ,  $u_N=1$ ,  $u_i=i/N$ , а формула (1) матиме вигляд:

$$y = \sum_{i=0}^N [y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{(u - j/N)}{(i/N - j/N)}] = \sum_{i=0}^N [y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{(Nu - j)}{(i - j)}]. \quad (2)$$

Таким чином, формули (1) та (2) визначають поліноміальну криву із точками, що належать кривій.

Поліноміальна крива третього степеня із керуючими точками, що належать кривій. Візьмемо чотири точки  $0(x_0, y_0)$ ,  $1(x_1, y_1)$ ,  $2(x_2, y_2)$ ,  $3(x_3, y_3)$ . Для отримання кубічної формули застосуємо (1). Маємо запис сегмента поліноміальної кривої

$$y = y_0 \frac{(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)}{(u_0 - u_1)(u_0 - u_2)(u_0 - u_3)} + y_1 \frac{(u - u_0)(u - u_2)(u - u_3)}{(u_1 - u_0)(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} + \\ + y_2 \frac{(u - u_0)(u - u_1)(u - u_3)}{(u_2 - u_0)(u_2 - u_1)(u_2 - u_3)} + y_3 \frac{(u - u_0)(u - u_1)(u - u_2)}{(u_3 - u_0)(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)}. \quad (3)$$

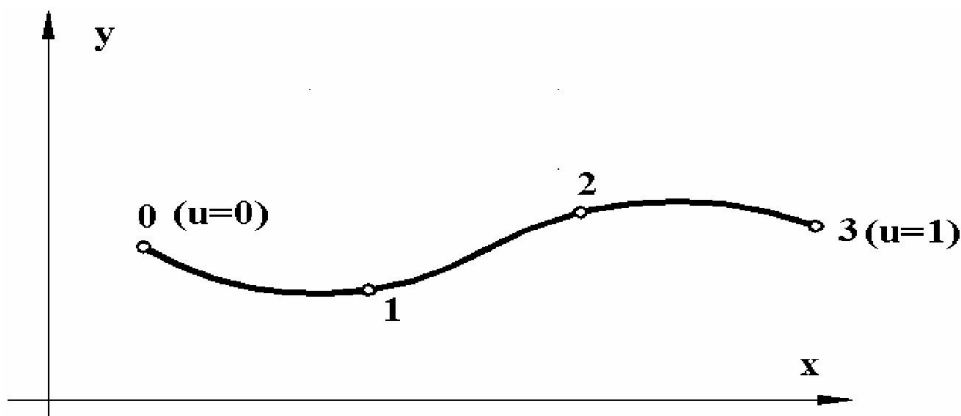


Рис. 2. Сегмент поліноміальної кривої 3-го степеня

Підставимо конкретні значення параметра  $u$ . Призначимо в цих точках значення параметра  $u$ :  $u_0=0$ ,  $u_1=1/3$ ,  $u_2=2/3$ ,  $u_3=1$ , що буде відповідати рівномірному розташуванню точок. Отримаємо:

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 \frac{(u-1/3)(u-2/3)(u-1)}{(0-1/3)(0-2/3)(0-1)} + y_1 \frac{(u-0)(u-2/3)(u-1)}{(1/3-0)(1/3-2/3)(1/3-1)} + \\
 &+ y_2 \frac{(u-0)(u-1/3)(u-1)}{(2/3-0)(2/3-1/3)(2/3-1)} + y_3 \frac{(u-0)(u-1/3)(u-2/3)}{(1-0)(1-1/3)(1-2/3)} = \\
 &= \frac{9}{2} \left[ -y_0 \left( u^3 - 2u^2 + \frac{11}{9}u - \frac{2}{9} \right) + 3y_1 \left( u^3 - \frac{5}{3}u^2 + \frac{2}{3}u \right) - \right. \\
 &- 3y_2 \left( u^3 - \frac{4}{3}u^2 + \frac{1}{3}u \right) + y_3 \left( u^3 - u^2 + \frac{2}{9} \right) = \\
 &= y_0 + \left( -\frac{11}{2}y_0 + 9y_1 - \frac{9}{2}y_2 + y_3 \right) u + \left( 9y_0 - \frac{45}{2}y_1 + 18y_2 - \frac{9}{2}y_3 \right) u^2 + \\
 &+ \left( -\frac{9}{2}y_0 + \frac{27}{2}y_1 - \frac{27}{2}y_2 + \frac{9}{2}y_3 \right) u^3.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Також криву (4) після перетворення коефіцієнтів можна записати ще й у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{9}{2} \left[ y_0 (1-u) \left( \frac{2}{3} - u \right) \left( \frac{1}{3} - u \right) + 3y_1 (1-u) \left( \frac{2}{3} - u \right) u + 3y_2 (1-u) \left( u - \frac{1}{3} \right) u + \right. \\
 &+ y_3 \left( u - \frac{2}{3} \right) \left( u - \frac{1}{3} \right) u \left. \right].
 \end{aligned} \tag{5}$$

Таким чином усі чотири точки лежать на кривій у межах  $0 \leq u \leq 1$ . У даному випадку призначене конкретне значення параметра  $u$  у кожній точці, що відповідає рівномірному розташуванню.

Перепишемо (3) у матричному вигляді:

$$y = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(u) \\ \alpha_1(u) \\ \alpha_2(u) \\ \alpha_3(u) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

Де

$$\begin{aligned}
 \alpha_0(u) &= \frac{(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)}{(u_0 - u_1)(u_0 - u_2)(u_0 - u_3)}, \\
 \alpha_1(u) &= \frac{(u - u_0)(u - u_2)(u - u_3)}{(u_1 - u_0)(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)},
 \end{aligned}$$

$$\alpha_2(u) = \frac{(u - u_0)(u - u_1)(u - u_3)}{(u_2 - u_0)(u_2 - u_1)(u_2 - u_3)},$$

$$\alpha_3(u) = \frac{(u - u_0)(u - u_1)(u - u_2)}{(u_3 - u_0)(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)},$$

$$u_i = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0}.$$

Тестовий приклад подано на рис. 3. Програма реалізована мовою AutoLisp.

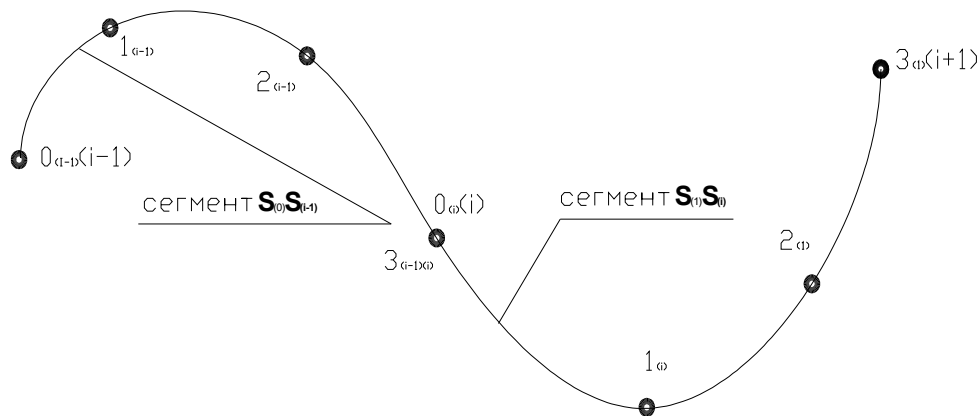


Рис. 3. Тестовий приклад сегментів кубічної кривої із керуючими точками, що інцидентні кривій

На основі таких кривих можна будувати сплайни за керуючими точками, що інцидентні кривій.

**Висновки та перспективи.** Сплайни третього степеня із керуючими точками, інцидентними кривій дають змогу довільно корегувати форму кривій за вимогою користувача програмного продукту. Також керуючі точки належать кривій, що значно спрощує процес конструювання. Наявні недоліки існуючих видів сплайнів (зокрема кубічних) та велика потреба промисловості у нових видах гладких кривих вимагає подальших досліджень видів сплайнів, розглянутих у статті.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Перевод с английского. Москва Мир. 1982г. – 304с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн функций. Москва Наука. 1982г. – 352с.
3. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002, – 472с.
4. Роджерс Д., Адамс Дж., Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. – 600с.
5. Якунин В.И. Геометрические основы автоматизированного проектирования технических поверхностей. – М.:Маи, 1080. –86 с.
6. Alan Watt. 3D Computer Graphics. Third Edition/ Addison-Wesley, 2000. – 570 p.
7. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций. – М.:Наука, 1980. – 246 с.
8. Бадаев Ю.І., Ковтун О.М. Порівняльні характеристики поліноміальних сплайнів третього і четвертого степенів. // Прикл. геометрія та інж. графіка. Праці / Таврійська держ. агротехн. Академія. – Вип..4, т.28. – Мелітополь: ТДАТА, 2004. – С.70-74

- 
9. Бадаєв Ю.І. Ковтун А.М. Специальные сплайны из полиномов третьей, четвертой и пятой степеней в геометрическом моделировании. Монография. Одесса Феникс, 2011г.
  10. Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М. Апроксимація сплайнами на основі кривих із інцидентними точками. // Сучасні проблеми геометричного моделювання: Праці Національного університету «Львівська політехніка»(спецвипуск): Матеріали міжнар. наук.-практ. конференції. / Національний університет «Львівська політехніка». Львів, 2003, С. 75-77.
  11. Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М. Векторно-параметричні сегменти, поверхні та тіла за інцидентними з ними точками. // Прикл. геометрія та інж. графіка. Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Вип. 4, т. 18 Мелітополь: ТДАТА, 2003. – С.37-40.
  12. Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М. Сплайнові векторно-параметричні криві. // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – К: КНУБА, 2003. – Вип.72. – С.47-49.
  13. Бадаєв Ю.І., Ковтун О.М. Інтерполяція поліноміальними сплайнами п'ятого степеня. // Матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика та комп'ютерна підтримка навчальних дисциплін у середній і вищій школі». – Бердянськ.: БДПУ, 2004. – С. 11-14.

**Ковтун О.М.**

### **ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ КРИВАЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ С УПРАВЛЯЮЩИМИ ТОЧКАМИ, КОТОРЫЕ ПРИНАДЛЕЖАТ КРИВОЙ**

*Предлагается способ расчета сегментов кубической кривой с управляющими точками, которые инцидентны кривой и приведен тестовый пример.*

**Ключевые слова:** кубическая кривая, управляющие точки.

**Kovtun O.M.**

### **THE THIRD DEGREE POLYNOMIAL SPLINE WITH THE OPERATING POINTS INCIDENTAL A CURVE**

*Splines are smooth but flexible curves, with great practical importance when constructing curvilinear forms and graphing. Proposing a method of constructing a third degree Lagrange polynomial-based spline on points that incidental (belongs) a curve.*

**Keywords:** third degree spline, incidental points.

УДК 517.564

**Кільчинський О.О., Скрипка В.І.**

### **УЗАГАЛЬНЕНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ МЕЛЕРА-ФОКА В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ДВОПОРОЖНИННОГО ГІПЕРБОЛОЇДА**

*Пропонується комплексна форма узагальненого інтегрального перетворення Мелера-Фока для неповного інтервалу  $[\xi_0, +\infty)$ . На основі одержаного перетворення будується загальний розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа у зрізаному двопорожнинному гіперболоїді обертання.*

**Ключові слова:** інтегральне перетворення, крайова задача, двопорожнинний гіперболоїд, рівняння Лапласа.

**Постановка проблеми.** Щоб знайти розв'язок крайової задачі теорії потенціалу для зрізаного двопорожнинного гіперболоїда обертання, необхідно спершу побудувати систему базисних функцій на неповному інтервалі  $[\xi_0, \infty)$ . В роботі [4] ця спектральна задача