

Гейлик А.В.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ЕФЕКТИВНОСТІ

У статті розглянуто використання математичних методів у економічному аналізі. Виокремлено основні математичні дисципліни та проаналізовано методи їх застосування до дослідження показників ефективності. Сформульована задача дослідження показників ефективності.

Ключові слова: оцінка показників ефективності, дослідження операцій, критерій ефективності, економіко-математична модель.

Постановка проблеми. У сучасних умовах підприємство будь-якої галузі є складним соціально-економічним об'єктом, який здійснює цілий комплекс різноманітних зв'язків. Формування стратегії управління такою системою визначає необхідність використання науково обґрунтованих алгоритмів оцінки ефективності, побудованих на сучасних методах формалізації з урахуванням динаміки ситуації та галузевих особливостей [2, с.23].

Використання математичних методів в оцінці економічних процесів сприяє розв'язанню ряду практичних завдань:

- впорядкування системи економічної інформації, встановлення вимог для її нормування та коректування з метою розв'язання певної системи задач ефективної оптимізації планування та управління;
- надання інструменту для забезпечення інтенсифікації та підвищення точності економічних розрахунків, що дозволяє проводити багатофакторні обґрунтування економічних процесів;
- проведення поглибленого кількісного аналізу оцінки послідовних змін розвитку економічних об'єктів;
- розв'язання принципово нових економічних задач, які іншими засобами розв'язати неможливо [4, с.48].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теоретичні та практичні питання моделювання економічних процесів та економічної ефективності підприємства знайшли відображення в роботах А. В. Козаченко, В. Ф. Гапоненка, Ю. Г. Лисенка, Ф. І. Євдокімова, С. М. Шкарлета, В. М. Порохні, Н. О. Подлужної, М. В. Куркіна та ін.

У створення сучасного математичного апарату і розвитку багатьох напрямків дослідження операцій значний внесли вчені Р. Акоф, Р. Беллман, Г. Данциг, Г. Кун, Дж. Нейман, Т. Сааті, Р. Черчмен, А. Кофман, Л.В. Канторович, Н.П. Бусленко, Е.С. Вентцель, Н.Н. Воробйов, Н.Н. Моїсеєв, Д.Б. Юдін та інші.

Враховуючи значення здобутих ними результатів, необхідно зазначити, що деякі важливі питання застосування математичних методів дослідження показників ефективності потребують подальшого вдосконалення та розвитку. На сьогодні існують певні суперечності щодо побудови економіко-математичних моделей дослідження економічних процесів. Як наслідок, виникає питання реалізації математичного інструментарію для обґрунтування оцінки ефективності з точки зору економіко-математичного моделювання; не розкрито питання вибору домінантних показників. Недостатня вивченість питань кількісної оцінки та аналізу показників ефективності стає на заваді своєчасному попередженню кризових явищ на підприємстві, знижує ефективність його функціонування [5, с.15].

Метою дослідження є систематизація математичних методів оцінки показників ефективності; встановлення взаємозв'язку між математичними методами та системою завдань економічного аналізу; обґрунтування застосування математичних методів дослідження показників ефективності.

Виклад основного матеріалу. В економіко-математичному моделюванні є складним бачення математичного змісту економічної проблеми. Для цього необхідно розуміти особливості економічного процесу та володіти математичним інструментарієм.

Розв'язання задач економічного аналізу математичними методами можливе, якщо вони сформульовані математично, тобто реальні економічні взаємозв'язки і залежності виражені із застосуванням математичного аналізу. Це викликає необхідність розробки математичних моделей.

На практиці для вирішення економічних завдань вдаються до різних математичних методів.

Методи елементарної математики використовуються в традиційних економічних розрахунках при обґрунтуванні потреб у ресурсах, розробці плану, проектів.

Класичні методи математичного аналізу використовуються самостійно (диференціювання та інтегрування) і в рамках інших методів (математичної статистики, математичного програмування).

Статистичні методи – основний засіб дослідження масових повторюваних явищ. Вони застосовуються при дослідженні зміни аналізованих показників ефективності як випадкового процесу. Якщо зв'язок між аналізованими характеристиками не детермінований, а стохастичний, то статистичні та імовірнісні методи стають практично єдиним інструментом дослідження. В економічному аналізі найбільш відомі методи множинного і парного кореляційного аналізу.

При вивченні одночасних статистичних сукупностей використовують закон розподілу, варіаційний ряд, вибірковий метод. Для багатовимірних статистичних сукупностей застосовуються кореляції, регресії, дисперсійний, коваріаційний, спектральний, компонентний, факторний види аналізу.

Економетричні методи базуються на синтезі трьох областей знань: економіки, математики та статистики. Основа економетрії – економічна модель, тобто схематичне представлення економічного явища або процесів, відображення їхніх характерних рис за допомогою наукової абстракції.

Найбільш поширений метод аналізу економіки «витрати – випуск». Метод являє собою матричні (балансові) моделі, побудовані за шаховою схемою, що наочно ілюструють взаємозв'язок витрат і результатів виробництва.

Методи математичного програмування – основний засіб вирішення задач оптимізації виробничо-господарської діяльності. По суті, методи є засобами планових розрахунків, вони дозволяють оцінювати напруженість планових завдань, дефіцитність результатів, визначення граничних видів сировини, груп устаткування.

Під дослідженням операцій розуміються розробки методів – цілеспрямованих дій (операцій), кількісна оцінка рішень і вибір найкращого з них. Мета дослідження операцій – поєднання структурних взаємопов'язаних елементів системи, що найбільшою мірою забезпечує дослідження показників ефективності.

Теорія ігор як розділ дослідження операцій являє собою теорію математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах невизначеності або конфлікту кількох сторін, що мають різні інтереси.

Теорія масового обслуговування на основі теорії ймовірності досліджує математичні методи кількісної оцінки процесів масового обслуговування. Особливість всіх завдань, пов'язаних з масовим обслуговуванням – випадковий характер досліджуваних явищ. Кількість вимог на обслуговування і часові інтервали між їх надходженнями мають випадковий характер, однак у сукупності підкоряються статистичним закономірностям, кількісне вивчення яких і є предметом теорії масового обслуговування.

Дана теорія дозволяє вивчати системи, призначені для обслуговування масового потоку вимог випадкового характеру. Випадковими можуть бути як моменти появи вимог, так і витрати часу на їх обслуговування. Метою методів теорії є відшукування розумної організації обслуговування, що забезпечує задану якість, визначення оптимальних (з погляду прийнятого критерію) норм чергового обслуговування, потреба в якому виникає не заплановано, нерегулярно [4, с.67].

Економічна кібернетика аналізує економічні явища і процеси як складні системи з погляду законів управління і руху в них інформації. Методи моделювання і системного аналізу найбільш розроблені саме в цій галузі.

Постановка задачі дослідження показників ефективності в загальному вигляді.

Всі фактори, які впливають на операцію дослідження економічних показників ефективності, можна поділити на дві групи:

✓ постійні фактори (умова проведення операції), вплив на них є неможливим. Позначимо їх через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$;

✓ залежні фактори (елементи розв'язання) – x_1, x_2, \dots

Критерій ефективності виражається деякою цільовою функцією, що залежить від факторів обох груп. Тому цільову функцію запишемо у вигляді

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \quad (1)$$

Всі моделі дослідження операцій можуть бути класифіковані залежно від природи і властивостей операції, характеру вирішуваних завдань, особливостей застосовуваних математичних методів.

Слід зазначити, насамперед, великий клас оптимізаційних моделей. Такі завдання виникають при спробі оптимізувати ефективність планування та управління складними системами, в першу чергу економічними системами. Оптимізаційну задачу ефективності можна сформулювати в загальному вигляді:

– знаходження змінних x_1, x_2, \dots, x_n , що задовольняє системі нерівностей (рівнянь)

$$\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

– та перетворення максимізації (або мінімізації) цільової функції

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \quad (3)$$

У тих випадках, коли функції f і ϕ_i в задачах (2) - (3) хоча б двічі диференційовані, можна застосувати класичні методи оптимізації. Але, застосування цих методів в дослідженні операцій показників ефективності досить обмежена, так як завдання визначення умовного екстремуму функції n змінних технічно дуже важке: метод дає можливість визначити локальний екстремум, а через багатовимірність функції визначення її максимального (або мінімального) значення (глобального екстремуму) може виявитися досить трудомістким, тим більше, що цей екстремум можливий на границі області розв'язань. Класичні методи зовсім не працюють, якщо безліч допустимих значень аргументу дискретно або функція Z задана таблично. У цих випадках для вирішення завдання (2) - (3) застосовуються методи математичного програмування.

Математичне програмування – область математики, що розробляє теорію і чисельні методи розв'язання багатовимірних екстремальних задач з обмеженнями, тобто задач на екстремум функції багатьох змінних з обмеженнями на область зміни цих змінних.

Функцію, екстремальне значення якої потрібно знайти в умовах економічних можливостей, називають цільовою, показником ефективності чи критерієм оптимальності. Економічні можливості формалізуються як системи обмежень. Все це становить математичну модель.

Якщо критерій ефективності $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є лінійною функцією, а функція $\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ знаходиться в системі обмежень (1), то така задача розв'язується засобами лінійного програмування.

Якщо, виходячи із змістового сенсу, її розв'язком мають бути цілі числа, то це – задача цілочисельного лінійного програмування. Якщо критерій ефективності та (або) система обмежень задаються нелінійними функціями, то маємо задачу нелінійного програмування. Зокрема, якщо зазначені функції мають властивості опуклості, то отримана задача є задачею опуклого програмування.

Якщо в задачі математичного програмування є змінна часу і критерій ефективності (2) виражається не в явному вигляді як функція змінних, а дотично – через рівняння, що описують протікання операцій у часі, то така задача є задачею динамічного програмування.

Перевагою запропонованої нами моделі є те, що в якості результативного показника Y виступає величина, виміряна за допомогою методики, що дозволяє здійснити єдиний підхід до оцінювання всіх показників та їх взаємозв'язків, отримати результати, виміряні за єдиною шкалою, а також спрогнозувати її реальне значення.

Розглянемо приклад багатофакторної регресійної моделі, що описує зв'язок між інтегральним коефіцієнтом адаптованості та формуючими показниками ефективної діяльності підприємства.

Завданням є вивчення і встановлення форми зв'язку (побудова багатофакторної регресійної моделі) інтегрального коефіцієнта ефективності з набором економічних показників, що впливають на ефективність діяльності підприємства:

x_1 – рентабельність загальна основної діяльності; x_2 – рентабельність основних засобів; x_3 – коефіцієнт фондівдачі; x_4 – коефіцієнт оборотності; x_5 – коефіцієнт придатності основних засобів; x_6 – продуктивність праці.

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + b_6 x_6 + e, \quad (4)$$

де e – випадковий вектор похибки;

$b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ – невідомі параметри у багатофакторній регресії, які обчислюються за допомогою методу найменших квадратів, що дозволить мінімізувати вектор похибки.

Вплив кожного показника ефективності діяльності підприємства на коефіцієнт адаптованості характеризується частковим коефіцієнтами регресії. Частковий коефіцієнт регресії показує, на скільки одиниць зміниться значення відповідного показника на одиницю при умові, що значення всіх інших показників залишатимуться постійними.

Загалом, можна вважати, що математичне сподівання випадкового вектора похибки дорівнює 0, а дисперсія є обмеженою. Тоді інтегральний показник адаптованості y є функцією від формуючих його факторів ефективності діяльності підприємства.

Представимо запропоновану модель у матричній формі $Y=XB$, де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ – вектор-стовпець значень залежної змінної } y, \text{ що в нашому випадку;}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} & x_{51} & x_{61} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} & x_{52} & x_{62} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} & x_{53} & x_{63} \end{pmatrix} \text{ – матриця значень показників ефективної діяльності підприємства;}$$

X^T – матриця, транспонована до матриці X ;

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}$$

– вектор-стовпець невідомих коефіцієнтів регресії.

Для визначення невідомих параметрів застосуємо метод найменших квадратів, тоді $B = (X^T X)^{-1} \cdot (X^T Y)$.

Використовуючи дані звітної інформації ефективної діяльності підприємства [1], маємо:

Матриця X в табличній формі:

0,03	0,01	0,95	1,41	0,15	64,73
-0,34	-0,21	0,04	0,67	0,14	33,81
-0,42	-0,27	0,35	0,95	0,14	42,89

Виконуємо операцію транспонування і отримуємо X^T :

1	1	1
0,03	-0,34	-0,42
0,01	-0,21	-0,27
0,95	0,04	0,35
1,41	0,67	0,95
0,15	0,14	0,14
64,73	33,81	42,89

Знаходимо добуток утворених матриць $X^T X$:

3	-0,73	-0,47	1,34	3,03	0,43	141,43
-0,73	0,2929	0,1851	-0,1321	-0,5845	-0,1019	-27,5673
-0,47	0,1851	0,1171	-0,0934	-0,3831	-0,0657	-18,0331
1,34	-0,1321	-0,0934	1,0266	1,6988	0,1971	77,8574
3,03	-0,5845	-0,3831	1,6988	3,3395	0,4383	154,6675
0,43	-0,1019	-0,0657	0,1971	0,4383	0,0617	20,4475
141,43	-27,5673	-18,0331	77,8574	154,6675	20,4475	7172,641

Розрахунок оберненої матриці $(X^T X)^{-1}$ дає результат:

1,12298	3,28752	6,25696	5,77799	9,15529	5,70015	7,26747
5,1972	2,52072	3,86912	1,0637	1,18037	1,07355	2,93181
8,36456	3,98187	6,1276	1,76117	1,73504	1,77457	4,93695
3,05274	6,93536	1,05038	7,08345	1,494	7,11159	1,874614
1,64924	5,47264	8,66007	5,88493	7,31875	5,41965	1,6934
3,02946	5,43821	8,25349	4,14773	3,92521	5,11808	1,22879
6,28479	1,09049	1,55576	8,30205	2,95029	9,834714	1,85737

Знаходимо добуток $X^T Y$:

0,408017
-0,08891
-0,05744
0,194913
0,421689
0,058708
19,7025

Отже, вектор-стовпець невідомих коефіцієнтів регресії b дорівнює:

b_0	0,1483154
b_1	0,06020629
b_2	0,1011563
b_3	0,03993138
b_4	0,03760462
b_5	0,02725289
b_6	0,04241248

Таким чином, отримана наступна регресійна модель:

$$K_{\text{ef}} = 0,1483154 + 0,06020629x_1 + 0,1011563x_2 + 0,03993138x_3 + 0,03760462x_4 + 0,02725289x_5 + 0,04241248x_6$$

Висновок. Систематизація математичних методів дозволяє адекватно і зважено побудувати економіко-математичну модель дослідження показників ефективності, спираючись на засоби дослідження операцій і математичного програмування. Подальшого розвитку потребують питання економетричного моделювання функцій ефективності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беник Н. Г. Організаційно-економічний механізм адаптації суднобудівельно-судноремонтних підприємств водного транспорту : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. екон. наук : спец. 08.00.04 «Економіка та управління підприємствами (за видами економічної діяльності)» / Н. Г. Беник. – Київ, 2015. – 20 с.
2. Дикарева О. Н. Ситуационное управление социально-экономическими процессами пищевых производств: дис. канд. техн. наук : 05.13.10 / Дикарева Ольга Николаевна. – Воронеж, 2011. – 168 с.
3. Ломкова Е. Н. Экономико-математические модели управления производством (теоретические аспекты) / Е. Н. Ломкова, А.А. Эпов. – Волгоград: ВолгГТУ, 2005. – 67 с.
4. Лубенцова В. С. Математические модели и методы в логистике: учеб. пособ. / В. С. Лубенцова. Под редакцией В. П. Радченко. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2008. – 157 с.
5. Мамаева З. М. Введение в моделирование / З.М. Мамаева. – Н. Новгород: ННГУ. – 2005.
6. Новикова Н. В. Экономико-математические методы и модели (конспект лекций) / Н. В. Новикова. – Минск, 2010. – 46 с.

Гейлик А.В.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
ЭФФЕКТИВНОСТИ**

В статье рассмотрено использование математических методов в экономическом анализе. Выделены основные математические дисциплины и проанализированы методы их применения к исследованию показателей эффективности. Сформулирована задача исследования показателей эффективности

Ключевые слова: *оценка показателей эффективности, исследование операций, критерий эффективности, экономико-математическая модель.*

Geilyk A.

THE MATHEMATICAL RESEARCH METHODS OF PERFORMANCE INDICATORS

The article discusses the use of mathematical methods in economic analysis. Thesis there is determined basic mathematical disciplines and analyzes the methods of their application to the study of performance indicators. The problem research of performance indicators

Keywords: *of performance indicators evaluation, operations research, the criterion of efficiency, economic and mathematical model.*