УДК 531.2

Лупіна Т.О.

ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ СУДЕН

Розглянуто задачі теоретичної механіки для студентів напряму підготовки «Морський та річковий транспорт» про бортову, кільову та вертикальну качку суден на прикладі металевого понтона. Складено та розв'язано відповідні диференціальні рівняння власних коливань понтона. Отримані значення періодів качки порівнюються з результатами розрахунків за відомими «капітанськими» формулами.

Ключові слова: *качка суден, рівняння власних коливань,«капітанські» формули.*

Задачі про качку суден на тихій воді відносяться до задач, що викликають зацікавленість студентів, демонструють можливості застосування диференціальних рівнянь для отримання важливих практичних результатів, приваблюють своєю простотою та можливістю розробки комп'ютерної програми.

Качка судна на тихій воді, що відбувається після припинення дії деякого початкового збурення, являє собою власні (вільні) коливання [1,2,3]. Звичайно розглядають три основні незалежні один від одного види качки на тихій воді: бортову, кільову та вертикальну.

Розглянемо задачу про бортову качку на прикладі сталевого понтона у вигляді прямокутного паралелепіпеда розмірами $L \times B \times H$ з масою m, рівномірно розподіленою по його об'єму (рис.1), нехтуючи силами, пов'язаними із в'язкістю води. Осі вибраної прямокутної системи координат xyz співпадають з осями симетрії понтона, при цьому x – поздовжня, z – вертикальна, y – поперечна осі. Показані на рис.1 точки *O, C, M* – центр ваги, центр величини та метацентр відповідно, пряма w – слід ватерлінії, T – осадка понтона в стані рівноваги.

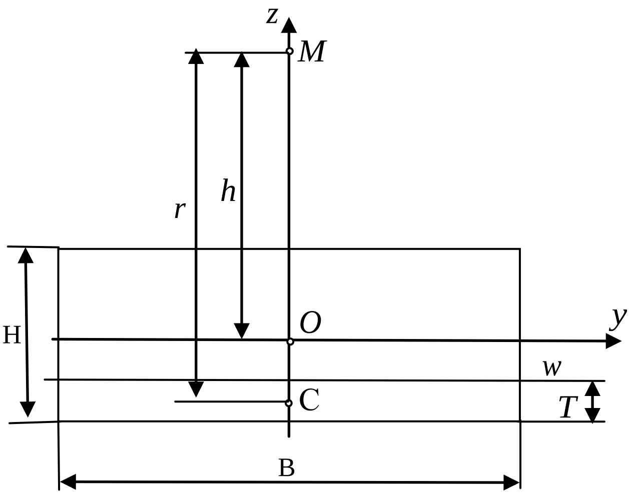

Рис.1. **Понтон в стані рівноваги**

Осадку понтона T в стані рівноваги знайдемо із умови плавучості $T = \dfrac{m}{L \cdot B \cdot \rho}$, де ρ – питома маса води. Поперечний метацентричний радіус r (відстань від точки C – центра величини до точки M – метацентра) визначимо за формулою

$$r = \frac{I_{x'}}{V},$$

де $I_{x'}$ – момент інерції площі ватерлінії відносно її поздовжньої осі симетрії x', V – занурений об'єм. В даному випадку

$$I_{x'} = \frac{LB^3}{12},\ V = LBT = \frac{m}{\rho},\ CM = r = \frac{LB^3\rho}{12m}.$$

Метацентричну висоту h (відстань від точки O – центру ваги понтона до точки M – метацентра) знайдемо із співвідношення

$$h = r - \frac{H-T}{2} \text{ або } h = \frac{LB^3\rho}{12m} - \frac{H}{2} + \frac{m}{2LB\rho}.$$

Нехай в момент часу t понтон повернеться навколо поздовжньої осі симетрії x на невеликий кут φ, при якому днище понтона повністю занурене в воду (рис.2).

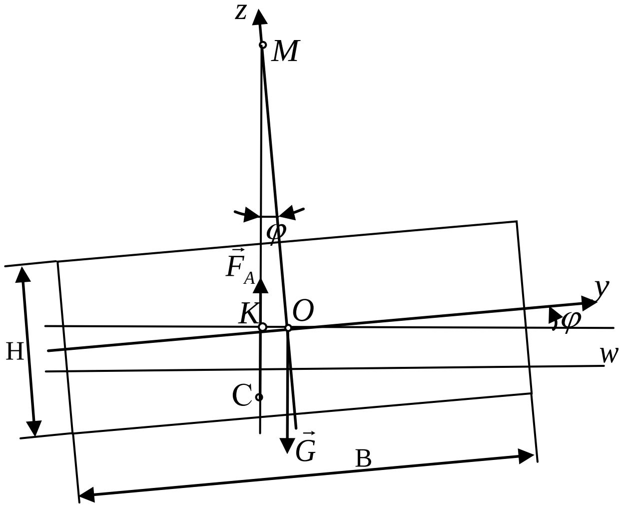

Рис.2. **Поворот понтона на малий кут**

Сила плавучості (сила Архімеда) $\vec{F}_A$ та рівна їй за величиною і протилежна за напрямом вага понтона $\vec{G} = m\vec{g}$ утворюють пару сил з плечем $0K = h \cdot sin\varphi$. Під дією моменту цієї пари сил (відновлювального моменту) відбуватимуться коливання (бортова качка) понтона.

Оскільки для малих кутів $sin(\varphi) \approx \varphi$, величину згаданого моменту визначаємо за формулою

$$M = -mg(\frac{\rho LB^3}{12m} - \frac{H}{2} + \frac{m}{2LB\rho})\varphi.$$

Позначивши момент інерції понтона відносно його поздовжньої осі симетрії як I_x та враховуючи, що момент інерції понтона $I'_{x'}$ відносно поздовжньої осі симетрії ватерлінії x', відносно якої, власне, відбуваються коливання, визначається як $I'_{x'} = I_x + (\frac{H}{2} - \frac{m}{LB\rho})^2 m$, отримаємо наступне лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку бортової качки понтона:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mg(\frac{\rho LB^3}{12m} - \frac{H}{2} + \frac{m}{2LB\rho})}{I_x + (\frac{H}{2} - \frac{m}{LB\rho})^2 m}\varphi = 0;$$

Позначивши

$$\frac{mg\left(\frac{\rho LB^3}{12m}-\frac{H}{2}+\frac{m}{2LB\rho}\right)}{I_x+\left(\frac{H}{2}-\frac{m}{LB\rho}\right)^2 m}=k^2,$$

останнє рівняння набере канонічного вигляду

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0, \qquad (1)$$

де k – колова частота власних коливань.

Загальний розв'язок такого рівняння запишемо у вигляді

$$\varphi=C_1\sin kt+C_2\cos kt \qquad (2)$$

де C_1 і C_2 – сталі, що визначаються з початкових умов руху.

Робимо відлік часу t від того моменту, коли понтон досяг амплітудного кута крену $\varphi=A$. Тоді при $t=0$

$$\varphi(0)=A,\ \dot{\varphi}(0)=0.$$

Застосувавши ці умови до рівняння (2), отримаємо

$$C_1=0;\ C_2=A.$$

Підставивши значення C_1 і C_2 в рівняння (2), знайдемо

$$\varphi=A\cos kt. \qquad (3)$$

або

$$\varphi=A\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (4)$$

Рівняння (4) відповідає гармонійним коливанням з амплітудою A та початковою фазою $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$.

Величина періоду коливань визначається за формулою $T_\theta=\frac{2\pi}{k}$.

Поклавши, наприклад, $L=9$ м, $B=2{,}4$ м, $H=0{,}9$ м, $m=2123$ кг, $g=9{,}81$ м/с^2, $I_x=1830$ кгм^2, отримаємо:

$$T=0{,}098\text{ м},\ h=4{,}4828\text{ м},\ I'_{x'}=2092{,}6194\text{ кг·м2},\ k^2=44{,}5692,\ k=6{,}6760;$$

$$\ddot{\varphi}+44{,}5692\cdot\varphi=0.$$

Знаходимо розв'язок цього диференціального рівняння при початкових умовах $t=0, \varphi(0)=0{,}035$, $\varphi(t)=0{,}035\sin(6{,}6760t+\frac{\pi}{2})$ і отримуємо гармонійні коливання з амплітудою $A=0{,}035$, початковою фазою $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ та періодом $T_\theta=0{,}941$ с.

Відома «капітанська» формула [3] для періоду бортової качки

$$T_\theta=\frac{(0{,}72...0{,}86)B}{\sqrt{h}}$$

для розглядуваного прикладу дає $T_\theta=0{,}816...0{,}975$ с. Отже, точний розв'язок знаходиться в діапазоні значень, які можна отримати за «капітанською» формулою.

Задача про кільову качку судна розв'язується аналогічно.

В цьому випадку поздовжній метацентричний радіус $R=\frac{I_{y'}}{V}$, де $I_{y'}$ – момент інерції площі ватерлінії відносно її поперечної осі симетрії y', V – занурений об'єм. Тут $I_{y'}=\frac{BL^3}{12}$,

$V = LBa = \frac{m}{\rho}$, $R = \frac{BL^3 \rho}{12m}$, $h = \frac{BL^3 \rho}{12m} - \frac{H}{2} + \frac{m}{2LB\rho}$. Відновлювальний момент обчислимо за формулою

$$M = -mg(\frac{BL^3 \rho}{12m} - \frac{H}{2} + \frac{m}{2LB\rho})\varphi .$$

Якщо момент інерції понтона відносно його поперечної осі симетрії y позначити як I_y, то диференціальне рівняння кільової качки понтона матиме вигляд:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mg(\frac{\rho BL^3}{12m} - \frac{H}{2} + \frac{m}{2LB\rho})}{I_y + (\frac{H}{2} - \frac{m}{LB\rho})^2 m} \varphi = 0 .$$

Позначивши $\frac{mg(\frac{\rho BL^3}{12m} - \frac{H}{2} + \frac{m}{2LB\rho})}{I_y + (\frac{H}{2} - \frac{m}{LB\rho})^2 m} = k^2$, знову отримаємо відоме диференціальне рівняння (1).

Враховуючи вищенаведені дані понтона та значення його моменту інерції відносно поперечної осі симетрії y $I_y = 18226$ кгм^2, одержимо:

$$h = 68{,}2775 \text{м}, \ I'_{y'} = 18488{,}6 \text{ кг·м2}, \ k^2 = 76{,}8310 , \ k = 8{,}7653;$$

$$\ddot{\varphi} + 76{,}831\varphi = 0 .$$

При початкових умовах $t = 0, \ x(0) = 0{,}035$ знаходимо розв'язок останнього рівняння: $\varphi(t) = 0{,}035 \sin(8{,}7653t + \frac{\pi}{2})$ і отримуємо гармонійні коливання з амплітудою $A = 0{,}035$, періодом $T_\phi = 0{,}7165$ с, та початковою фазою $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

За «капітанською» формулою [3] для періоду кільової качки

$$T_\phi = 2{,}4\sqrt{T}$$

для розглядуваного прикладу одержимо $T_\phi = 0{,}752$ с. Отже, в даному випадку «капітанська» формула дає значення періоду кільової качки на 4,9% більше його значення, отриманого з точного розв'язку.

Вертикальна качка, як самостійний вид коливальних рухів, можлива тільки тоді, коли центр ваги шару, що входить в воду, буде знаходитись на одній вертикалі з центром ваги судна.

В цьому випадку, нехтуючи силами, зумовленими в'язкістю води, судно можна розглядати як матеріальну точку масою m, що рухається вздовж вертикальної осі x під дією сили ваги $\vec{G} = m\vec{g}$ та змінної сили плавучості $\vec{F}_A = -\vec{g}\rho S(T + x)$, де $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння, ρ – питома маса води, S – площа ватерлінії, T – осадка судна в положенні рівноваги, x – відхилення від положення рівноваги O.

Враховуючи, що при рівновазі $mg = g\rho ST$, диференціальне рівняння вертикальних коливань судна в проекції на вісь x має вигляд:

$$\ddot{x} + xS\rho g / m = 0 .$$

Позначивши $S\rho g / m = k^2$, отримаємо рівняння вертикальних коливань судна аналогічного вигляду:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

При початкових умовах $t = 0,\ x(0) = x_0$ розв'язок цього диференціального рівняння матиме такий вигляд:

$$x(t) = x_0 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right), \text{ де } k = \sqrt{\frac{S\rho g}{m}}.$$

Отже, вільні вертикальні коливання судна відбуватимуться за синусоїдальним законом з амплітудою x_0 і періодом $T_\varsigma = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{S \cdot \rho \cdot g}}$.

Маючи на увазі, що $\frac{m}{\rho} = V$ – занурений об'єм і $\frac{V}{S} = T$ – осадка плоскодонного прямобортного судна в положенні рівноваги, отримаємо $T_\varsigma = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{T}{g}}$.

З останнього виразу видно, що період вертикальних коливань плоскодонного прямобортного судна зростає пропорційно кореню квадратному з осадки судна в положенні рівноваги.

Для понтона із вказаними вище розмірами період вертикальних коливань становить $T_\varsigma = 0{,}629$ с.

На основі розглянутих задач здійснюватиметься розробка завдання для розрахункової роботи з теоретичної механіки (розділ «Динаміка»), виконання якої, на думку автора, сприятиме поглибленню фахової спрямованості викладання курсу теоретичної механіки для майбутніх фахівців водного транспорту.

ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Теоретична механіка: Збірник задач/О. С.Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.; За ред. М. А.Павловського. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.
3. Донцов С. В. Основы теории судна. – ЛАТСТАР, 2001. – 136 с.

Лупина Т.О.

ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СУДОВ

Рассмотрены задачи теоретической механики для студентов направления подготовки «Морской и речной транспорт» о бортовой, килевой и вертикальной качке судов на примере металлического понтона. Составлены и решены соответствующие дифференциальные уравнения собственных колебаний понтона. Полученные значения периодов качки сравниваются с результатами расчетов по известным «капитанским» формулам.

Ключевые слова: *качка судов, уравнения собственных колебаний, «капитанские» формулы.*

Lupina T.

THE TASKS OF THE NATURAL OSCILLATIONS OF THE SHIPS

The tasks of theoretical mechanics for students of training direction "Maritime and River Transport" on the trip, pitching and heaving ships on the example of the metal pontoon are reviewed. The differential equations of the natural oscillations of the pontoon are compiled and resolved. The periods of pitchings are compared with the results of calculations for the famous "capitans" formulas.

Keywords: *pitching vessels, equations of the natural oscillations, "capitans" formula.*