УДК 51:378.147:656.61.052 doi.org/10.33298/2226-8553/2018.1.27.17

Кліндухова В. М., Ляшко О. В., Гейлик А. В.

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Метою статті є розвинення ідеї використання сучасних економіко-математичних методів студентами напряму підготовки «Морський та річковий транспорт» під час опанування ними фундаментального курсу вищої математики. Практична реалізація запропонованих ідей сприяє розвитку обчислюваної і графічної культури, підвищує рівень загальноматематичної і професійної підготовки студентів технічних спеціальностей.

Ключові слова: *вища математика, лінійне програмування, графічний метод, оптимізаційні задачі, градієнт.*

Постановка проблеми. Відомо, що основною особливістю освітніх процесів XXI століття міжнародною конференцією ЮНЕСКО визнано перехід від навчання (teaching) до освіти (education), а також підвищення уваги до фундаментальних знань, до більш інтенсивного розвитку творчого потенціалу суб'єктів учіння, до використання ІКТ [2, 7]. Система сучасної вітчизняної математичної освіти не може стояти та не стоїть осторонь відповідних досліджень та спроб їх практичної реалізації.

Аналіз останніх джерел і публікацій. Методологічними питаннями вивчення математичних дисциплін на рівні вищих навчальних закладів займались К. Власенко, Н. Ванжа, Г. Дутка, В. Клочко, Т. Крилова, О. Скафа, Л. Нічуговська, Л. Межейнікова та багато інших вчених. Їхні роботи присвячено різним окремим аспектам зазначеної проблеми. Однак у працях майже усіх дослідників прослідковується думка про те, що недоліками сучасної математичної підготовки студентів вузів є формалізація математичних знань, рецептурний характер засвоєння математичного матеріалу, відсутність міжпредметних зв'язків математики з іншими дисциплінами, слабкі навички у використанні математичного апарату при вивченні спеціальних дисциплін та при застосуванні ІКТ [5, с. 27]. Таким чином, основним стратегічним напрямком дослідницько-методологічної роботи сьогодні можна вважати створення дидактичних та психолого-педагогічних передумов, які б сприяли оновленню мотиваційної сфери студентів, включенню їх в інтенсивну математичну діяльність на інтелектуальному рівні та на рівні особистої соціальної активності.

Виділення невирішених частин загальної проблеми. Як усе зазначене врахувати та реалізувати на практиці? Одним із багатьох можливих шляхів є доповнення традиційного змісту математичних дисциплін, змістом, що сприяє оптимальному співвідношенню між фундаментальністю, професійною, прикладною та практичною спрямованістю математичної підготовки студентів, а також із розвитком їх загальнонаукового світогляду.

Мета нашої статті: навести декілька відповідних прикладів. Приклади задач, які будуть запропоновані нижче, демонструють спроби «вплітання» деяких окремих елементів математичного апарату, а також методів і моделей оптимізаційного характеру у традиційний зміст вищої математики. У даному контексті вдалим практичним матеріалом, на наш погляд, є деякі задачі математичного програмування, які можна розв'язати графічним способом.

Виклад основного матеріалу. Наведемо конкретні приклади, пов'язуючи при цьому фабули стандартних задач лінійного програмування зі специфікою нашого ВНЗ, зокрема із підготовкою студентів за напрямками «Транспортні технології», «Морський та річковий транспорт» [7, с. 205].

Задача 1. В деякі пункти необхідно доставити 200 тисяч тонн вантажу. Для доставки можуть бути виділені 11 мілкосидячих вантажних теплоходів ГТ-1 та 8 крупногабаритних теплоходів ГТ-2. За певними кадровими та технічними показниками діють певні квоти: загалом необхідно використати не менше ніж 15 суден; кількість використаних суден ГТ-1 має не більше ніж на 5 одиниць перевищувати кількість використаних суден ГТ-2. Експлуатаційні витрати для суден ГТ-1 складають 17 тисяч грошових одиниць за період доставки, а для ГТ-2 - 20 тисяч грошових одиниць. Перевізна здатність кожного судна за період доставки відповідно: 10 тисяч тонн та 18 тисяч тонн. Визначити мінімальні експлуатаційні витрати, а також відповідну кількість суден обох типів x_1 (ГТ-1) та x_2 (ГТ-2), що необхідні для забезпечення доставки при вказаних умовах.

Коментарі до розв'язування задачі. Вважаємо, що судна обох типів упродовж всього періоду завозу можуть використовуватись на повну вантажопідйомність, що дозволяє без значних похибок прийняти лінійну залежність перевізної здатності від числа використаних суден [7, 205]. Таким чином перевізна здатність по усіх суднах обох типів дорівнюватиме: $(10x_1 + 18x_2)$.

Цільова функція задачі матиме вигляд:

$$z = 17x_1 + 20x_2 \to \min ,$$

а система обмежень:

$$\begin{cases} 10x_1 + 18x_2 \geq 200 \\ x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 11, x_2 \leq 8 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

Першим етапом розв'язання задачі лінійного програмування графічним способом є побудова на координатній площині $x_1 O x_2$ розв'язку вищенаведеної системи нерівностей (області визначення цільової функції), який в лінійному програмуванні називають многокутником (областю) допустимих розв'язків. На жаль, питанням щодо геометричного змісту лінійних нерівностей з двома невідомими зовсім не приділяється увага в шкільному курсі математики (окрім класів з поглибленим вивченням математики) і майже не приділяється уваги у курсі вищої математики. Саме тому важливо і доцільно подібними задачами доповнити традиційний курс вищої математики. По-перше, з пропедевтичними цілями. Зокрема, для забезпечення базового рівня знань для вивчення різних предметів інтегративного характеру, пов'язаних із математичними методами та моделями. По-друге, з метою формування більш якісних уявлень студентів щодо провідних ідей, понять та тверджень аналітичної геометрії.

Пропоновану задачу можна розв'язувати зі студентами на початку вивчення курсу вищої математики (під час вивчення елементів аналітичної геометрії) і (або) пізніше (під час вивчення диференційованого числення функцій декількох змінних).

У ***першому випадку*** основна увага студентів спрямовується на побудову многокутника допустимих розв'язків *ABCDE* (рис.1), який побудовано внаслідок наступних дій:

- побудова відповідних прямих: $10x_1 + 18x_2 = 200$ (1); $x_1 + x_2 = 15$ (2); $x_1 - x_2 = 5$ (3); $x_1 = 11$ (4); $x_2 = 8$ (5);

- знаходженню точок їх перетину: *A*(8,75;6,25), *B*(7;8), *C*(11;8), *D*(11;6), $E\left(\frac{145}{14};\frac{75}{14}\right)$;

- визначення півплощин, що є розв'язками лінійних нерівностей з двома змінними.
- визначити область перетину вищевказаних півплощин: многокутник *ABCDE*.

Техніка виконання вищенаведених дій детально та доступно викладена у відомих посібниках [1, с. 21], [2, с. 24], [6, с. 60].

Далі, використовуючи такий прийом розумової діяльності як встановлення та використання аналогій, студентам повідомляється (обґрунтування відповідних тверджень буде наведено пізніше), що оскільки цільова функція z, будучи лінійною, не може мати точок екстремуму всередині області допустимих розв'язків, то вона набуває найбільшого та найменшого значення на межі області. Однак система обмежень також є лінійною, тому можна зробити висновок, що найбільше та найменше значення цільової функції досягається у вершинах отриманого многокутника допустимих розв'язків: $A(8{,}75;6{,}25)$, $B(7;8)$, $C(11;8)$, $D(11;6)$, $E\left(\frac{145}{14};\frac{75}{14}\right)$.

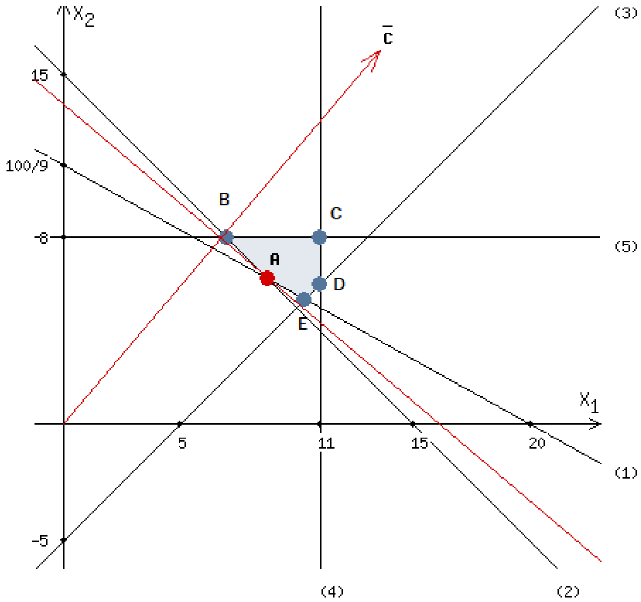

Рисунок 1 – Многокутник допустимих розв'язків, лінії рівня та градієнт цільової функції

Вершини згаданого многокутника у лінійному програмування називають опорними розв'язками (або опорними планами). Таким чином, знайти найменше (або найбільше) значення цільової функції можна наступним чином:

- обчислити значення функції в вершинах отриманого многокутника:

$z_A(8{,}75;6{,}25)=273{,}75;\ z_B(7;8)=279;\ z_C(11;8)=347;$

$z_D(11;6)=307;\ z_E\left(\frac{145}{14};\frac{75}{14}\right)\approx 283$

- вибрати з цих значень найменше (найбільше) та вказати опорний розв'язок, при якому цільова функція набуває відповідного екстремального значення (його називають оптимальним):

$$z_{\min}(8{,}75;6{,}25)=273{,}75.$$

У задачах, де змінними цільової функції можуть бути будь-які дійсні числа, отриманий вираз відображає розв'язок (оптимальний план). Однак, згідно із змістом пропонованої оптимізаційної задачі змінні X_1 та X_2 можуть набувати лише цілих значень.

Якщо округлити отримані значення змінних, то матимемо $x_1=9$ та $x_2=6$. Але точка з такими координатами не належить многокутнику допустимих розв'язків *ABCDE*. Такий висновок можна зробити або шляхом візуального аналізу, або аналітично:

$$10x_1+18x_2=10\cdot 9+18\cdot 6\le 200.$$

Отже, округлення розв'язків може привести до неправильного результату. Тому пропоновану задачу варто розглядати як задачу цілочисельного програмування [2, 24]. Наблизимо многокутник допустимих розв'язків *ABCDE* вписаним многокутником з вершинами в цілих точках *LCDFKM*, (рис. 2) де $L(8;8)$, $C(11;8)$, $D(11;6)$, $F(10;6)$, $K(10;7)$, $M(8;7)$, тоді

$$z_L(8;8)=296; z_C(11;8)=347; z_D(11;6)=307; z_F(10;6)=290;$$
$$z_K(10;7)=310; z_M(8;7)=276,$$

$$z_{\min}(8;7)=276.$$

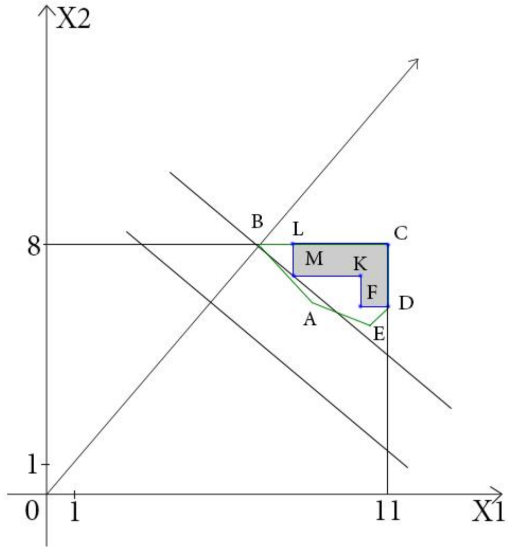

Рисунок 2 - Наближення многокутника допустимих розв’язків ABCDE вписаним многокутником з вершинами в цілих точках LCDFKM

У ***другому випадку*** основна увага студентів спрямовується на розуміння суті та використання поняття про лінії рівня, а також про градієнт функції, що значно скорочує процес розв’язування задачі і якісно переорієнтовує його.

Після побудови многокутника допустимих розв’язків, будують лінії рівня та градієнт цільової функції (рис.1):

$$17x_1+20x_2=250$$
$$\ldots$$
$$17x_1+20x_2=270$$
$$\vec{c}=\overrightarrow{grad\ z}=(17;20)$$

При цьому доцільно звернути увагу студентів на роль, важливість та численне використання ліній рівня як одного із способів наочного зображення та дослідження поведінки функцій багатьох змінних. Відомо, що у процесі побудови графіків функцій двох змінних здебільшого виникають значні труднощі. Надаючи функції різних значень k $(z=f(x,y)=k, k=const)$ і щоразу будуючи лінію із заданим рівнем *k*, дістаємо низку ліній рівня (її часто називають топологічною картою графіка функції). Отримане сімейство ліній рівня дає наочне уявлення про характер зміни функції, а також дозволяє судити про графік функції $z=f(x,y)$. Прикладами використання ліній рівня є паралелі й меридіани на глобусі (ліній рівня функції широти й довготи); синоптики публікують карти із зображенням ізотерм та ізобар (лінії рівня температури); в економіці прикладом ліній рівня слугують ізокванти (лінії, вздовж яких виробнича функція дорівнює константі) [4, с. 394]. У пропонованих задачах цільова функція є лінійною, тому лінії рівня є сім’ю прямих.

Не менш важливим є звернути увагу студентів на значущість та використання поняття градієнта цільової функції. Відомо, що саме градієнт цільової функції показує напрямок її найбільшого зростання, а у протилежному напрямку функція спадає з найбільшою швидкістю.

Також відомо, що градієнт функції $\overrightarrow{grad\,z}(M_0)$є вектором нормалі дотичної, проведеної до лінії рівня в точці $M_0(x_0;y_0)$. Саме тому для знаходження екстремумів цільової функції здійснюють паралельне перенесення лінії рівня у напрямку $\overrightarrow{grad\,z}$ (для знаходження максимуму цільової функції) або у протилежному напрямку $-\overrightarrow{grad\,z}$ (для знаходження мінімуму цільової функції). Паралельне перенесення здійснюється до тих пір поки лінія рівня не пройде через останню точку (точки) її перетину із областю розв'язків. Координати вказаної точки і визначають оптимальний план задачі.

Зрозуміло, що як і в першому випадку змінні x_1 та x_2 можуть набувати лише цілих значень. Як многокутник допустимих розв'язків використовують многокутник *LCDFKM* (замість *ABCDE*). А останньою точкою, у якій лінія рівня, рухаючись у напрямі $-\overrightarrow{grad\,z}=(-17;-20)$, перетне область *LCDFKM,* буде точка *M*(8;7), тому (рис.2):

$$z_{\min}(8;7)=276$$

Якби за змістом задачі нас влаштовували б не лише цілі значення змінних, то останньою точкою, у якій лінія рівня, рухаючись у напрямі $-\overrightarrow{grad\,z}=(-17;-20)$, перетнула б область *ABCDE*, була точка *A*(8,75;6,25) (рис.1).

Особливо позитивним моментом пропонованого розв'язування задачі у курсі вищої математики є те, що фактично воно є ілюстрацією використання відомої теореми:

Теорема. Нехай задано диференційовану функцію $z=f(x,y)$ і $\overrightarrow{grad\,z}(M_0)\neq 0$, тоді градієнт перпендикулярний до лінії рівня, що проходить через дану точку [4, 416].

Відповідь: Мінімальні експлуатаційні витрати складатимуть біля 276 тис. грошових одиниць, при цьому має бути залучено 8 суден типу ГТ-1 та 7 суден типу ГТ-2.

Під час постановки та розв'язання задачі 1 використовувався термін «перевізна здатність». Зупинимось на ньому детальніше. Загалом перевізна здатність – це обсяг роботи, який судно може виконати за певний період часу і в певних умовах. Вона виражається у тонах (або тонно-милях) вантажу, що перевозиться судном. Перевізна здатність залежить не лише від вантажопідйомності судна, а і від особливостей його використання, протяжності шляху плавання, часу знаходження судна під вантажними та допоміжними операціями. Розглянемо приклад задачі, в якій ці фактори будуть наведені в умові задачі та відповідно враховані під час побудови математичної моделі. Фабула задачі залишається такою ж як і у *задачі 1*. Нижченаведена задача є задачею нелінійного програмування, однак у нескладних випадках подібні задачі також можуть розв'язуватись графічним методом.

Зауваження до задачі 1. Загальновідомо, що під час розв'язування задач лінійного програмування та їх геометричного тлумачення, можливі наступні чотири випадки:

1) цільова функція досягає *min (max)* в одній точці;
2) цільова функція досягає *min (max)* в будь-якій точці відрізка, що є однією із сторін многокутника розв'язків;
3) цільова функція не обмежена знизу (зверху) на множині допустимих розв'язків;
4) система обмежень задачі є несумісною.

Пропонуючи задачі студентам-першокурсникам під час вивчення курсу вищої математики доцільно обмежитись лише першим випадком.

Задача 2. В деякі пункти, що розміщені вздовж бічної річки, в нетривалий період весняного паводку необхідно доставити 200 тисяч тонн вантажу. Для доставки можуть бути виділені 11 мілкосидячих вантажних теплоходів ГТ-1 та 8 крупногабаритних теплоходів ГТ-2. Експлуатаційні витрати для суден ГТ-1 складають 17 тисяч грошових одиниць за період доставки, а для ГТ-2 - 20 тисяч грошових одиниць. Визначити мінімальні експлуатаційні витрати, а також відповідну кількість суден обох типів x_1 (ГТ-1) та x_2 (ГТ-2), що необхідні для забезпечення доставки при наступних умовах.

Відомо, що судна першого типу продовж всього завозу можуть бути використані на повну вантажопідйомність. Перевізна здатність одного судна за період завозу 10 тисяч тон, а відповідно по усім суднам першого типу вона матиме вигляд: $10x_1$

Судна другого типу достатньо ефективно можуть використовуватись лише в найбільш повноводний період, а зі спаданням рівня води вони працюють с недовантаженням та з пониженням швидкості руху. Ці та інші фактори визначають нелінійну залежність перевізної здатності від кількості використаних суден, яка матиме вигляд [7, с.205]: $\left(10+5x_2-0{,}5x_2^2\right)\cdot x_2$
.

Коментарі до розв'язування задачі . Цільова функція та система обмежень:
задачі матимуть вигляд: $z = 17x_1 + 20x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 10x_1 + \left(10+5x_2-0{,}5x_2^2\right)\cdot x_2 \geq 200 \\ x_1 \leq 11, x_2 \leq 8 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

Як і у задачі 1, першим етапом розв'язання задачі графічним способом є побудова на координатній площині $x_1 O x_2$ розв'язку вищенаведеної системи нерівностей *KLM* (області визначення цільової функції).

З'ясуємо: чи можливо для цієї задачі запропонувати такі ж підходи як і під час розв'язування задачі 1.

У ***першому випадку*** цільова функція *z*, також є лінійною і не може мати точок екстремуму всередині області *KLM*. Однак система обмежень не на усіх ланках є лінійною (зокрема, дуга *KM*). Тому найбільшого та найменшого значення цільова функція може набувати не лише у вершинах *K, L, M*, а і на межі *KM*. Таким чином подальший розв'язок можливо реалізувати лише за умови цілочисленності змінних x_1 та x_2

Наблизимо область допустимих розв'язків *KLM* вписаним многокутником з вершинами в цілих точках *ABCDEFNL* (рис.3) де *A*(6;8), *B*(6;7), *C*(7;7), *D*(7;6), *E*(9;6), *F*(9;5), *N*(11;5), *L*(11;8), тоді

$$Z_A(6;8) = 262; Z_B(6;7) = 242; Z_C(7;7) = 259; Z_D(7;6) = 239;$$
$$Z_E(9;6) = 273; Z_F(9;5) = 253; Z_N(11;5) = 287; Z_L(11;8) = 347$$
$$Z_{\min}(7;6) = 239$$

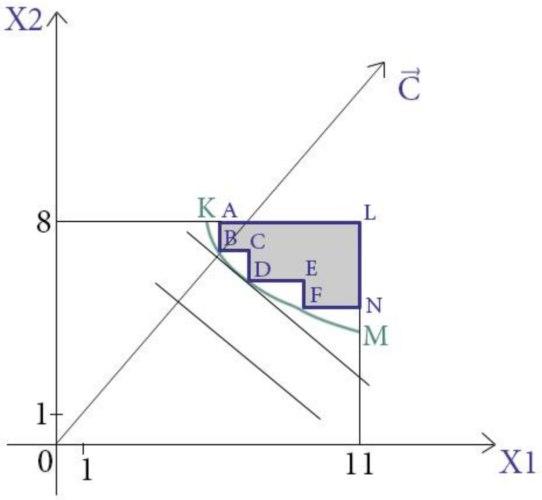

Рисунок 3 – Наближена область допустимих розв'язків KLM вписаним многокутником з вершинами в цілих точках ABCDEFNL

У ***другому випадку*** також будують лінії рівня та градієнт цільової функції, які, зрозуміло, будуть мати такий же вигляд як і у задачі 1. За умови дотримування цілочисленності змінних x_1 та x_2, останньою точкою, у якій лінія рівня, рухаючись у напрямі $-\overrightarrow{grad\,z} = (-17;-20)$, перетне область *ABCDEFNL*, буде точка *D*(7;6), тому: $Z_{\min}(7;6) = 239$

Якби за змістом задачі нас влаштовували б не лише цілі значення змінних, то останню точку $P(x_1;x_2)$, у якій лінія рівня, рухаючись у напрямі $-\overrightarrow{grad\,z} = (-17;-20)$, перетинає область *KLM*, можна знайти лише наближено $x_1 \approx 6{,}2$ та $x_2 \approx 6{,}4$ (рис.4). Для їх знаходження доцільно використати відомі програмно-педагогічні засоби, зокрема можливості динамічних моделей GRAN 2D-new.

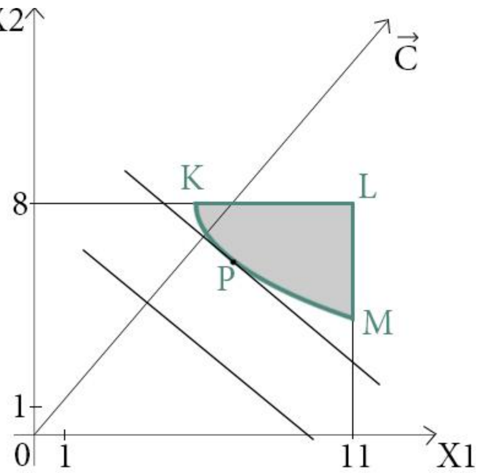

Рисунок 4 – Перетин області KLM лінією рівня в напряму градієнта цільової функції

Відповідь: Мінімальні експлуатаційні витрати складатимуть біля 239 тисяч грошових одиниць, при цьому має бути залучено 7 суден типу ГТ-1 та 6 суден типу ГТ-2.

Висновки і пропозиції. Запропоновані задачі є лише відокремленими прикладами, які можуть бути використані дослідниками під час оновлення методичних систем навчання вищої математики або викладачами-практиками під час практичних занять, самостійної роботи студентів, роботи студентських гуртків, семінарів та конференцій. За певних умов доцільно також ознайомити студентів із сучасними можливостями ІКТ щодо розв’язання задач лінійного програмування (зокрема, http://www.reshmat.ru/ZLP). На нашу думку, розв’язування подібних задач сприяє підтримці та розвитку обчислювальної та графічної культури, що є особливо актуальним та важливим для студентів напряму підготовки «Морський та річковий транспорт». А залучення елементів обчислювального експериментування (особливо із залученням ІКТ) «оживляє» та осучаснює вивчення математичних дисциплін, робить якіснішим загальну математичну та професійну підготовку студентів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Учеб. Пособие для студентов эконом. спец. вузов. / И.Л.Акулич. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
2. Власенко К. В. Теоретичні й методичні аспекти навчання вищої математики з використанням інформаційних технологій в інженерній машинобудівній школі: Монографія. / К. В.Власенко. – Донецьк: «Ноулідж» (донецьке відділення), 2011. – 410 с.
3. Гончаренко Я. В. Математичне програмування. / Я. В.Гончаренко. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. - 183с.
4. Грисенко М. В. Математика для економістів: методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. / М. В.Грисенко. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.

5. Крилова Т. В. Дидактичні засади фундаменталізації математичної освіти студентів нематематичних спеціальностей університетів / Т. В. Крилова, О. М.Гулеша, О. Ю.Орлова // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – 2011. – Випуск 35. – С.27-35.
6. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование. Учеб. Пособие для вузов / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М.: Высшая школа, 1976. – 352 с.
7. Пьяных С. М. Экономико-математические методы оптимального планирования работы речного транспорта. Учеб-к для институтов водного транспорта / С. М.Пьяных. – М.: Транспорт, 1988. – 253 с.

Клиндухова В.Н., Ляшко О.В., Гейлик А.В.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Актуальность статьи связана с основным стратегическим направлением исследовательско-методологической работы, сориентированной на выявление психолого-педагогических предпосылок, которые способствуют обновлению мотивационной сферы студентов, включению их в интенсивную математическую деятельность на интеллектуальном уровне, а также на уровне личностной социальной активности. Целью исследования является развитие идеи использования современных экономико-математических методов студентами направления подготовки «Морской и речной транспорт» при изучении ними фундаментального курса высшей математики.

Ключевые слова: *высшая математика, линейное программирование, графический метод, оптимизационные задачи, градиент.*

Klindukhova V., Lyashko O., Geilyk A

ELEMENTS OF MATHEMATICAL PROGRAMMING IN THE HIGHER MATHEMATICS COURSE

The article is devoted, the introduction of elements of optimization problems in the course of higher mathematics. The relevance of the study is related to the main strategic direction of research and methodological work are oriented to identify the psychological and pedagogical prerequisites that contribute to renewal of motivational sphere of students, their inclusion in an intensive mathematical operations on an intellectual level, but also at the level of personal social activity. The aim of the study is to reveal the idea of using the in modern economic and mathematical methods for students training areas "Sea and river transport" while learning of the fundamental course of higher mathematics.

Keywords: *higher mathematics, linear programming, systems of linear equations, graphical method, optimization problems, gradient.*