

Бадаев Ю.И., Ганношина И.Н., Медведева О.Ю.

УПРАВЛЕНИЕ ФОРМОЙ ПЛОСКОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ КРИВОЙ БЕЗЬЕ

В работе предлагается метод целенаправленного изменения формы плоской рациональной кривой Безье на основе анализа величин первой и второй производных исходной кривой и кривых, определяемых узловыми точками. На основе сравнения первых и вторых производных определяется нужное изменение узловых точек и (или) их весов для достижения желаемого результата.

Ключевые слова: рациональная кривая Безье, кривизна, форма кривой.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими заданиями. В практике конструирования обводов машин и агрегатов, которые работают в движущейся среде, одной из главных задач является проектирование формы из заданной кривизной вдоль кривой. Поэтому в данной работе рассматриваются методы управления формой кривой, которая проектируется, таким образом, который позволяют достичь желаемой кривизны на заданном участке кривой.

Научная новизна заключается в разработке нового метода управления формой плоской кривой, который дает более точные результаты и результаты, которые не могут быть получены другими методами.

Практическая полезность определяется тем, что предложенный метод дает возможность конструировать обводы оптимальной формы для машин и агрегатов, которые работают в движущейся среде.

Анализ последних исследований и публикаций. В статьях [1-4] предлагаются интерактивные подходы к управлению формой NURBS-кривой, причем в [1] используется разработанная программа построения NURBS-кривой. Предлагается методом последовательного изменения точек узлового вектора и их веса оценивать изменение кривой и пошагово её изменять до тех пор, пока не получим желаемый результат. Такой подход не даёт возможности предвидеть конечный результат в начале проектирования.

Нерешенная ранее часть общей проблемы. В рассмотренных статьях нерешенной проблемой является способ изменения параметров кривой для достижения заранее предполагаемых результатов.

Формулирование целей статьи (постановка задания). Целью статьи является разработка метода целенаправленного изменения точек репера и ее веса плоской рациональной кривой Безье для получения кривой желаемой формы.

Изложение основного материала исследования с обоснованием полученных научных результатов.

Рациональная кривая Безье n -й степени [3, с.101] определяется формулой

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i * r_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}}{\sum_{i=0}^n a_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}}, \quad (1)$$

где:

$$a_i = \frac{n!}{i! (n-i)!},$$

r_i – узловой репер кривой,

w_i – веса точек узлового репера.

Управлять формой кривой (1) можно с помощью изменения положения точек r_i узлового репера, а также с помощью изменения весов этих точек. Однако достаточно сложно заранее определить каким образом эти изменения повлияют на форму кривой. Вначале проанализируем влияние на форму при изменении положения узловой точки репера. Изменим в (1) одну из реперных точек, например $r_i, i=j$. Будем иметь: $r_j = r_i + \Delta r_i$, подставив в (1), получим:

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i * r_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)} + a_i * \Delta r_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}}{\sum_{i=0}^n a_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}}. \quad (2)$$

Здесь видим, что кривая изменилась на величину $\Delta r(t)$, то есть $r(t)_{\text{новое}} = r(t)_{\text{предыдущее}} + \Delta r(t)$, где

$$\Delta r(t) = \frac{a_i * \Delta r_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}}{\sum_{i=0}^n a_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}}. \quad (3)$$

Новая кривая $r(t)_{\text{новое}}$ будет являться суммой предыдущей $r(t)_{\text{предыдущее}}$ и дополнительной кривой (3).

Можно предложить построить эту дополнительную кривую с масштабированием Δr_i и тогда будет видно, как будет изменяться исходная кривая. Однако, более точный анализ изменяемой формы даст анализ изменения кривизны кривой. Кривизна плоской кривой определяется формулой [4, с.125]:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Анализируя формулу (4) видим, что кривизна кривой линейно зависит от величины второй производной и от деления на величину $(1 + y'^2)^{3/2}$. Причем, коэффициент $(1 + y'^2)^{-3/2}$ достаточно сильно влияет на кривизну, и в гораздо большей степени, чем вторая производная. График этого коэффициента показан на рис.1.

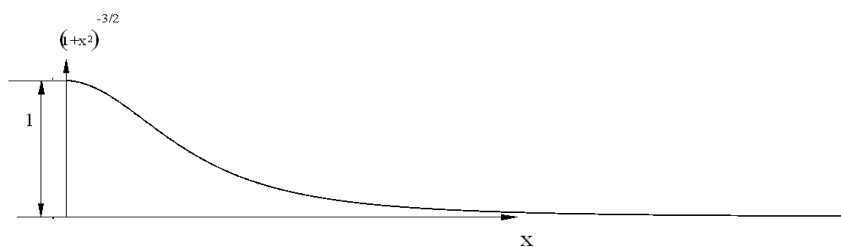


Рисунок 1 – График влияния коэффициента $(1 + y'^2)^{-3/2}$ на кривизну кривой

После изменения положения реперной точки кривизна кривой станет равна:

$$k_{\text{новое}} = \frac{r''_{xx}(t)_{\text{предыдущее}} + \Delta r''_{xx}}{\{1 + [y'_x(t)_{\text{предыдущее}} + \Delta r'_x(t)]\}^{3/2}} \quad (5)$$

Здесь можно предложить оценивать изменения кривизны в начале по изменению первой производной, а потом уже и по изменению второй производной. Предлагается построить график $r''_{xx}(t)_{\text{предыдущее}}$, $\Delta r''_{xx}(t)$, $y'_x(t)_{\text{предыдущее}}$ и $\Delta r'_x(t)$. Эти графики удобно оценивать, когда они построены в зависимости от X . Если же кривая имеет изогнутый вертикально-неоднозначный характер, то эти графики нужно строить по длине кривой.

Далее оценим изменение кривой (1) при изменении веса реперной точки. Изменим вес в какой-либо реперной точке, например r_j . Будем иметь: $w_j = w_i + \Delta w_j$.

Тогда

$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i * r_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)} + a_j * r_j * \Delta w_j * t^j (1-t)^{(n-j)}}{\sum_{i=0}^n a_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)} + a_j * \Delta w_j * t^j (1-t)^{(n-j)}} \quad (6)$$

Разделим числитель и знаменатель на $\sum_{i=0}^n a_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}$.
Получим

$$\begin{aligned} & r(t) \quad (7) \\ = & \frac{\frac{\sum_{i=0}^n a_i * r_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}}{\sum_{i=0}^n a_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}} + \frac{\sum_{i=0}^n a_j * r_j * \Delta w_j * t^j (1-t)^{(n-j)}}{\sum_{i=0}^n a_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}}}{1 + \frac{\sum_{i=0}^n a_j * \Delta w_j * t^j (1-t)^{(n-j)}}{\sum_{i=0}^n a_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}}} \end{aligned}$$

Можно пренебречь величиной $\frac{a_j * \Delta w_j * t^j (1-t)^{(n-j)}}{\sum_{i=0}^n a_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}}$, поскольку она намного меньше 1.

Поэтому можно записать: $r(t)_{\text{новое}} = r(t)_{\text{предыдущее}} + \Delta r(t)$, где

$$\Delta r(t) = \frac{\sum_{i=0}^n a_j * r_j * \Delta w_j * t^j (1-t)^{(n-j)}}{\sum_{i=0}^n a_i * w_i * t^i (1-t)^{(n-i)}} \quad (8)$$

Можно, также, построить кривую (8) с масштабированием по Δw_j и будет видно, как будет меняться форма кривой при изменении w_j . Однако более точный анализ даст анализ изменения кривизны кривой также, как это было предложено для оценки изменения положения реперной точки.

Предложенную методику управления формой кривой продемонстрируем на конкретном примере. На рис.2 представлена рациональная кривая Безье 4-й степени и графики первой производной, второй производной и кривизны по оси X .

На рис.3 представлена кривая с опущенной точкой 1 и графики ее производных. На рис. 4 представлена кривая с поднятой точкой 1 и графики ее производных.

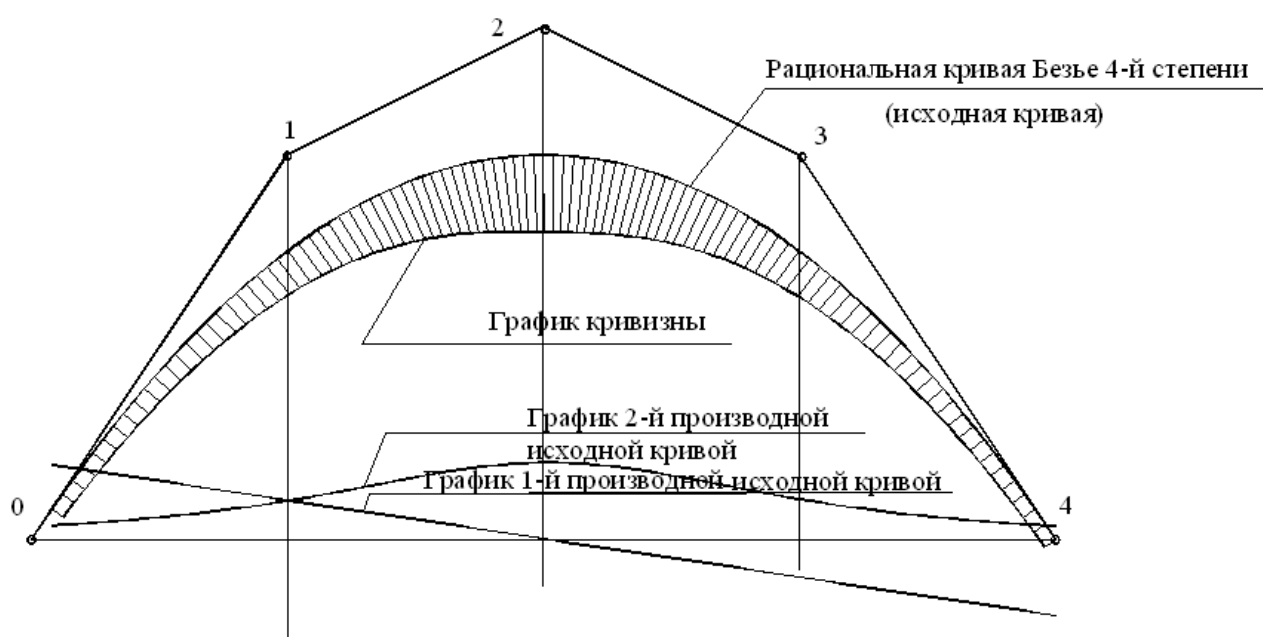


Рисунок 2 – Рациональная кривая Безье 4-й степени и графики ее производных



Рисунок 3 – Рациональная кривая Безье с опущенной точкой 1

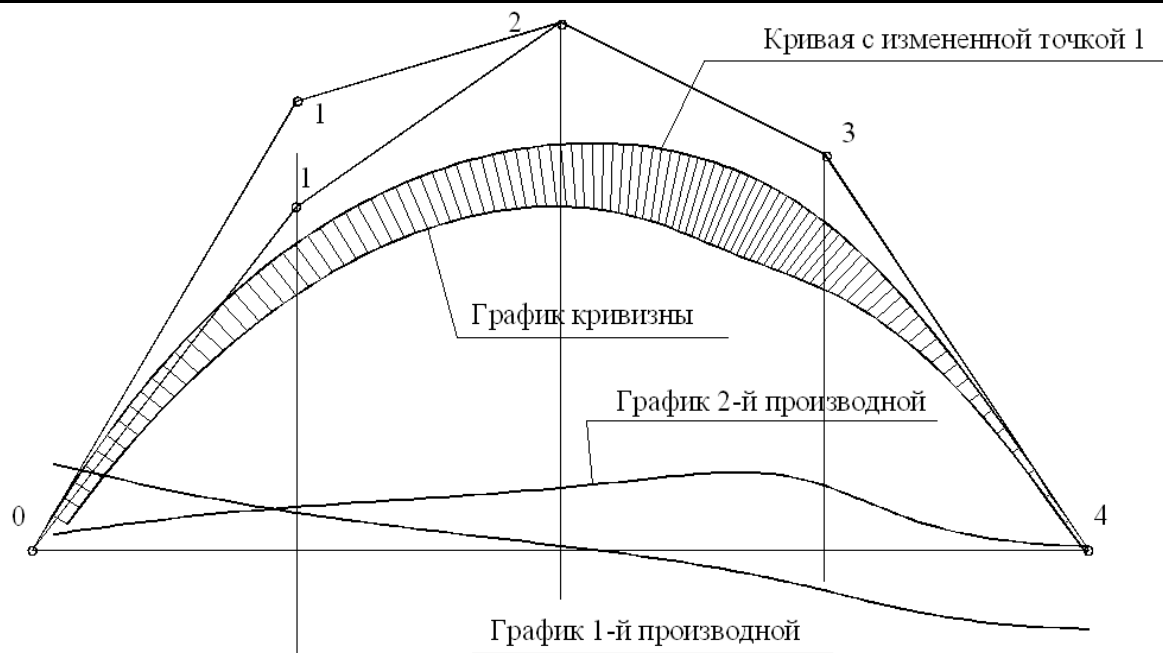


Рисунок 4 – Рациональная кривая Безье с поднятой точкой 1

На рис.5 представлена кривая с поднятой точкой 3 и графики ее производных.

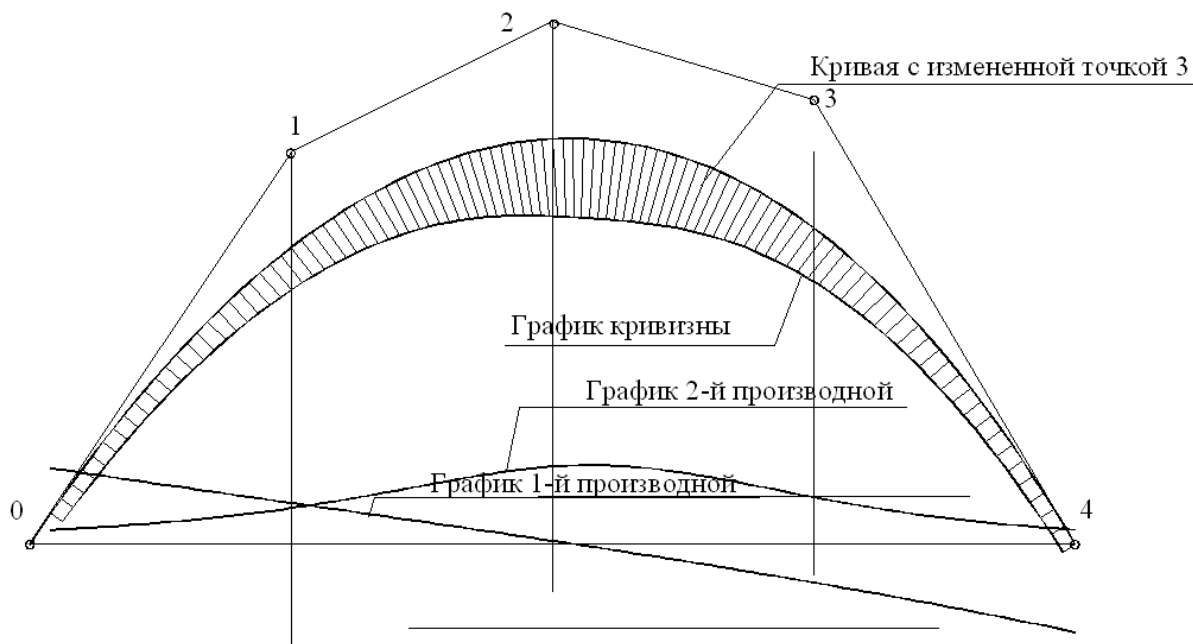


Рисунок 5 – Рациональная кривая Безье с поднятой точкой 3

На рис.6 представлена кривая с опущенной точкой 3 и графики ее производных.

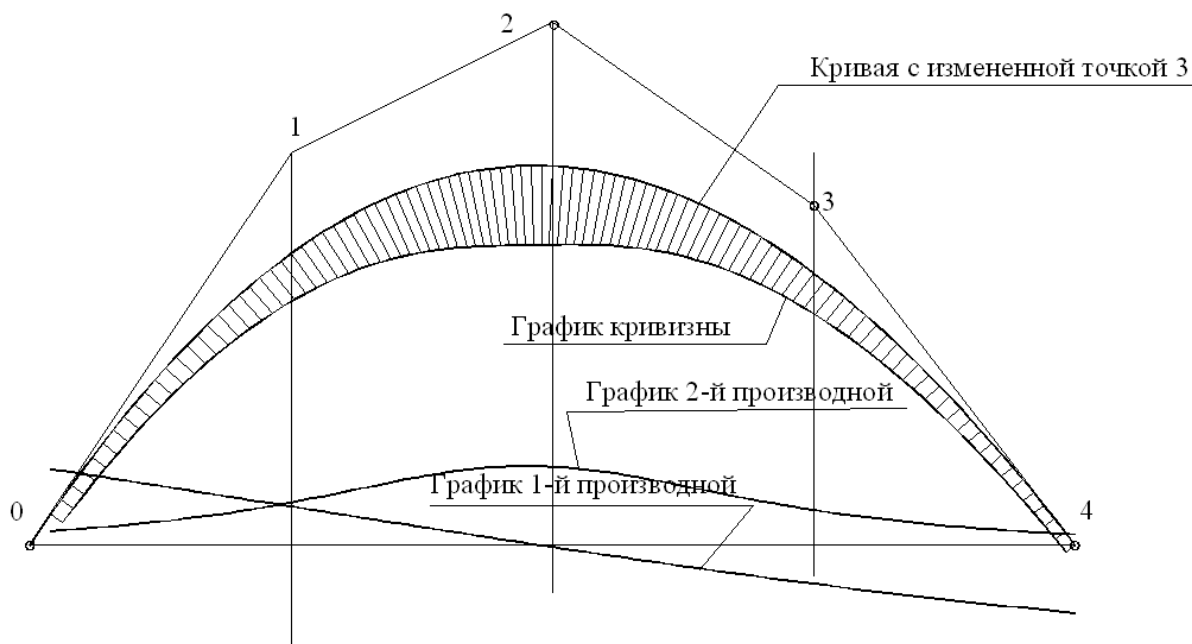


Рисунок 6 – Рациональная кривая Безье с опущенной точкой 3

На рис.7 представлены кривые влияния положения точки 2 и графики ее производных.

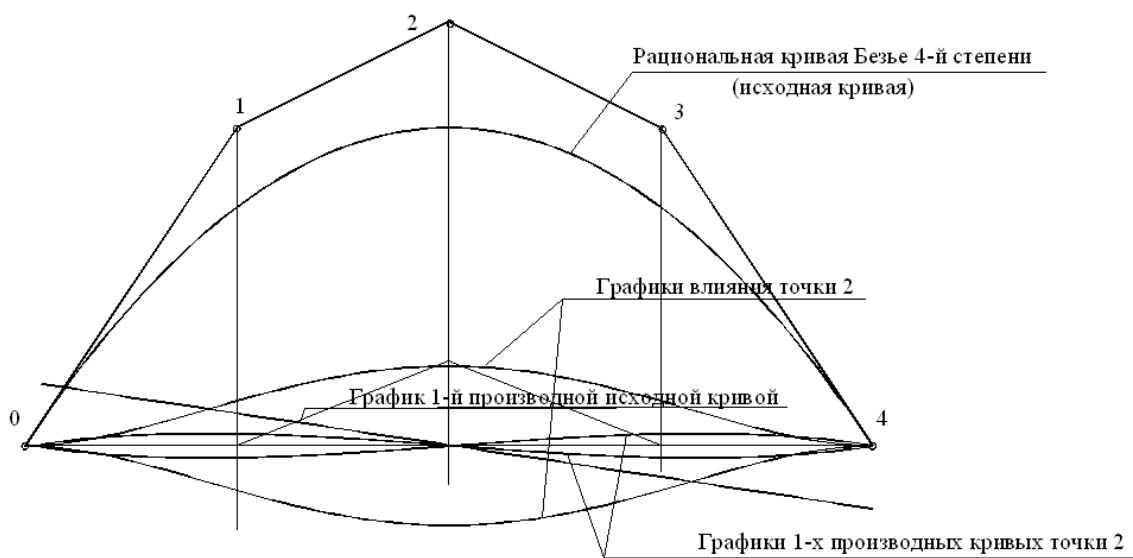


Рисунок 7 – Влияния положений точки 2

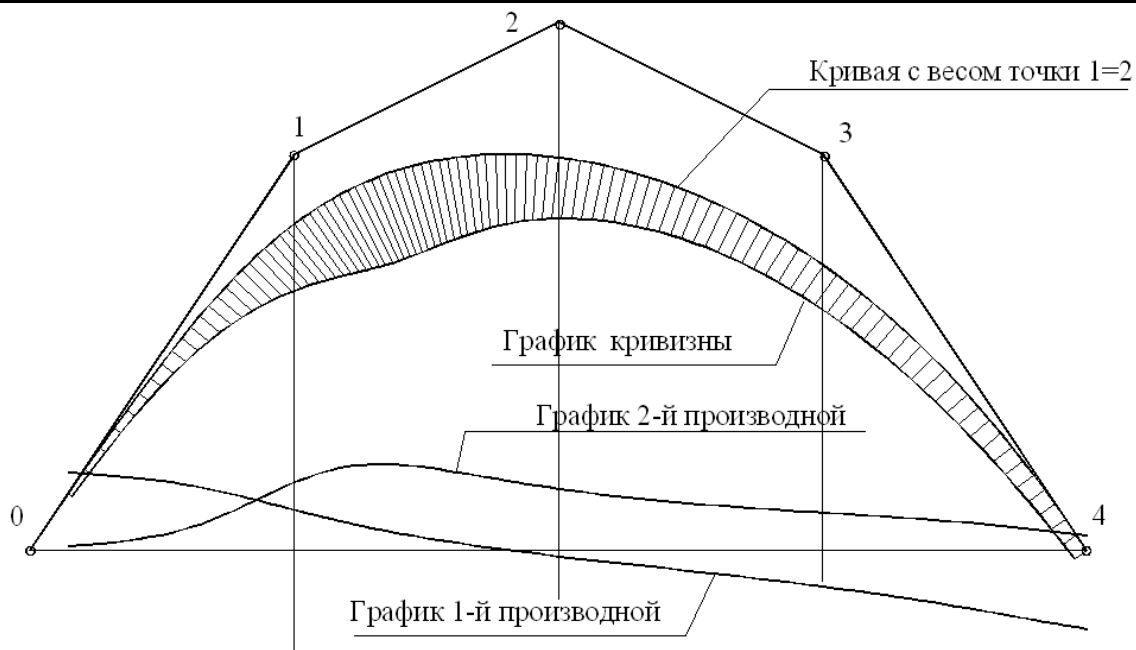


Рисунок 8 – Влияние изменения веса в точке 1

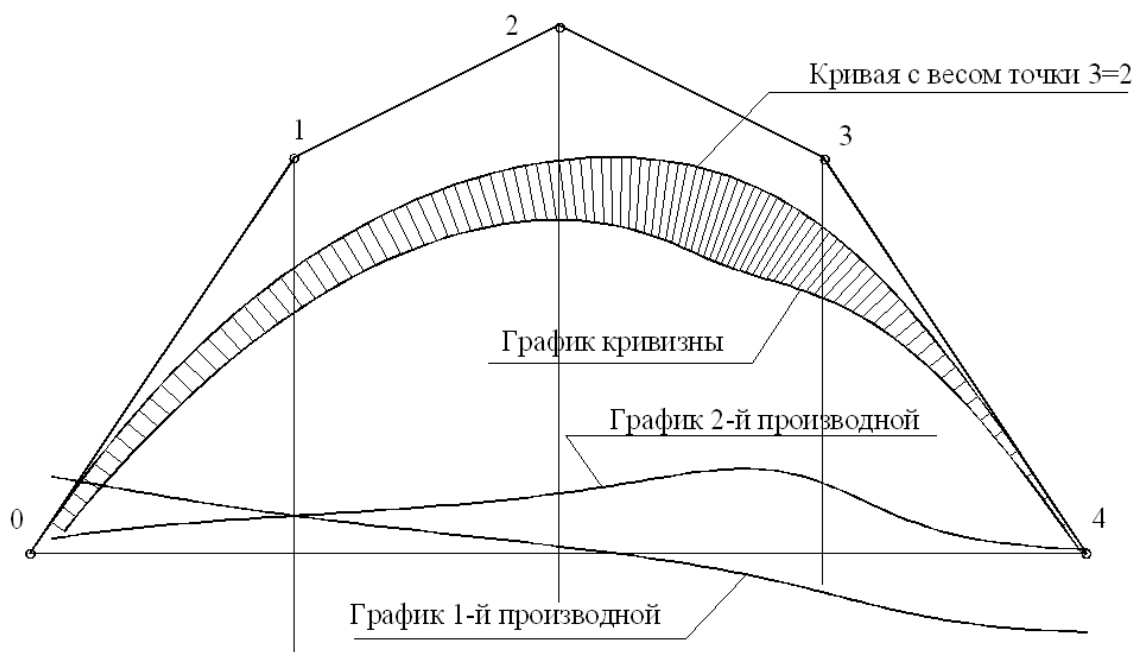


Рисунок 9 – Влияние изменения веса в точке 3

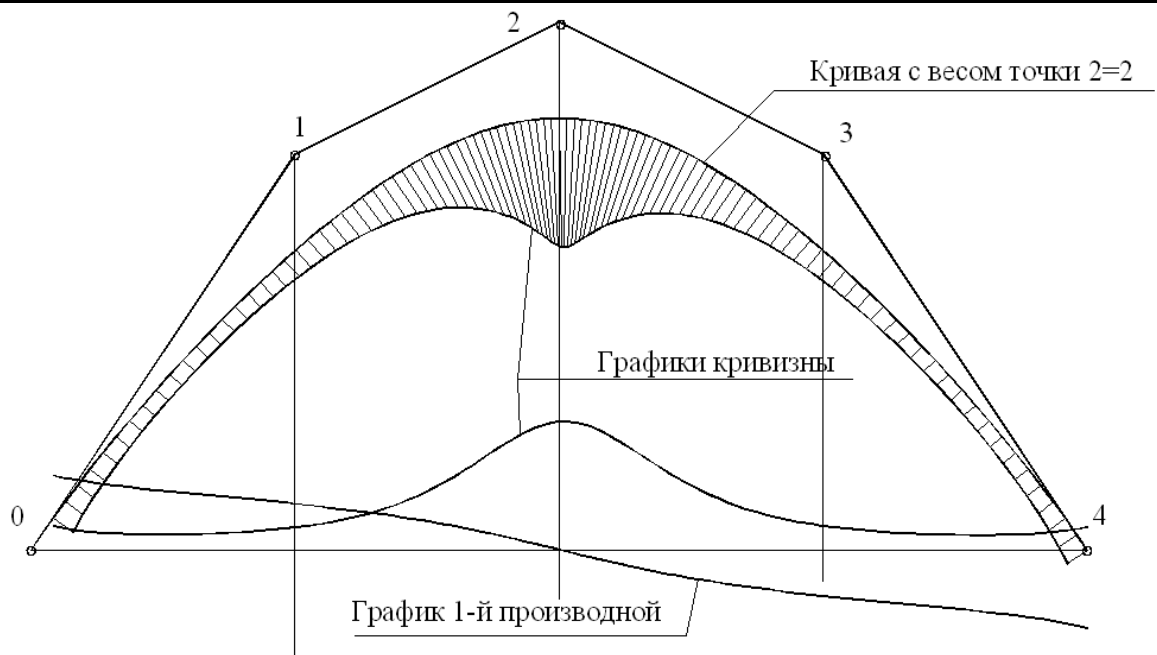


Рисунок 10 – Влияние изменения веса в точке 2

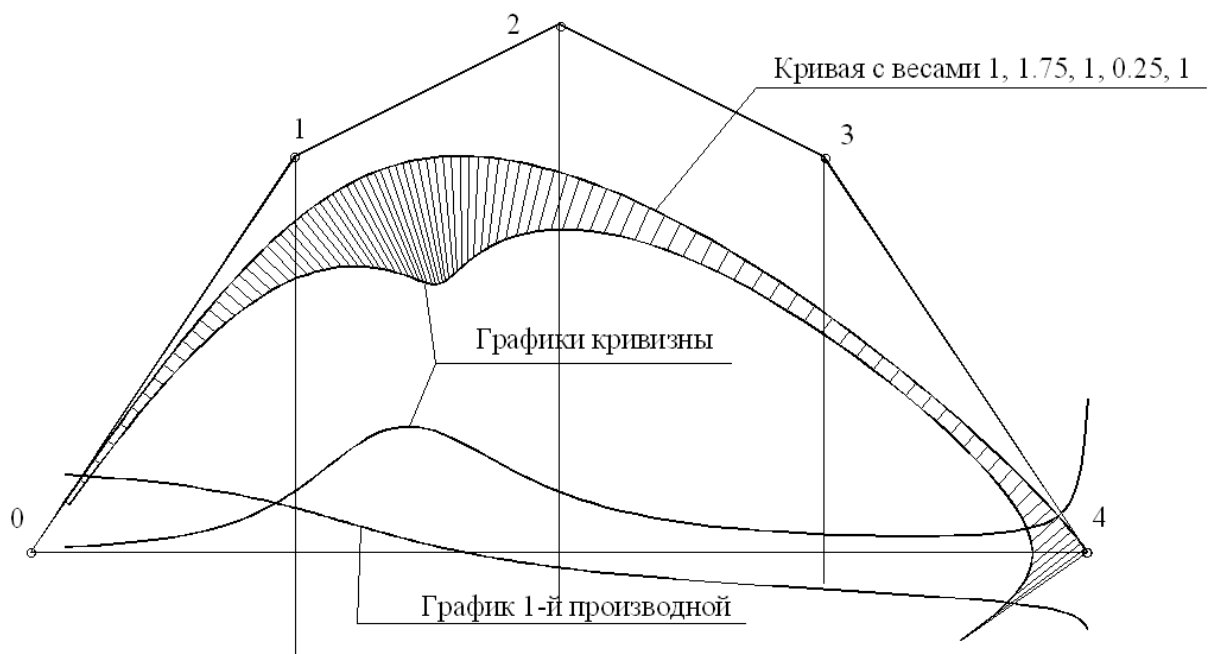


Рисунок 11 – Модификация кривой с целью увеличения кривизны на участке 1-2

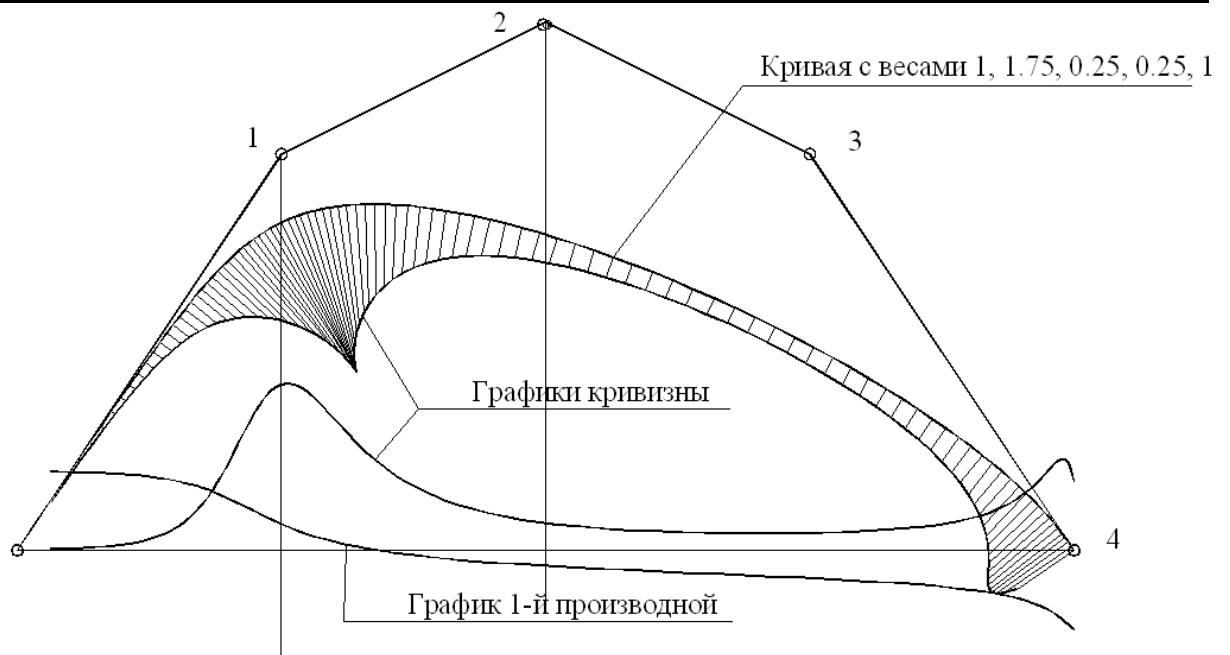


Рисунок 12 – Модификация кривой с целью увеличения кривизны на участке $x = x_1$

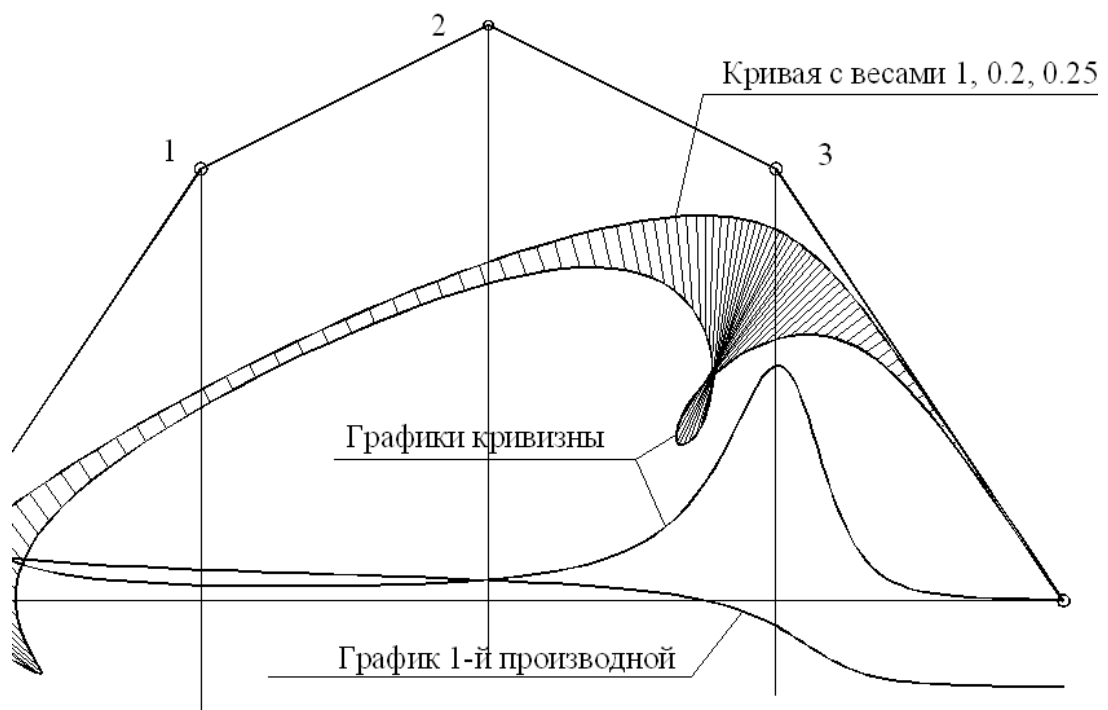


Рисунок 13 – Модификация кривой с целью резкого увеличения кривизны на участке $x = x_3$

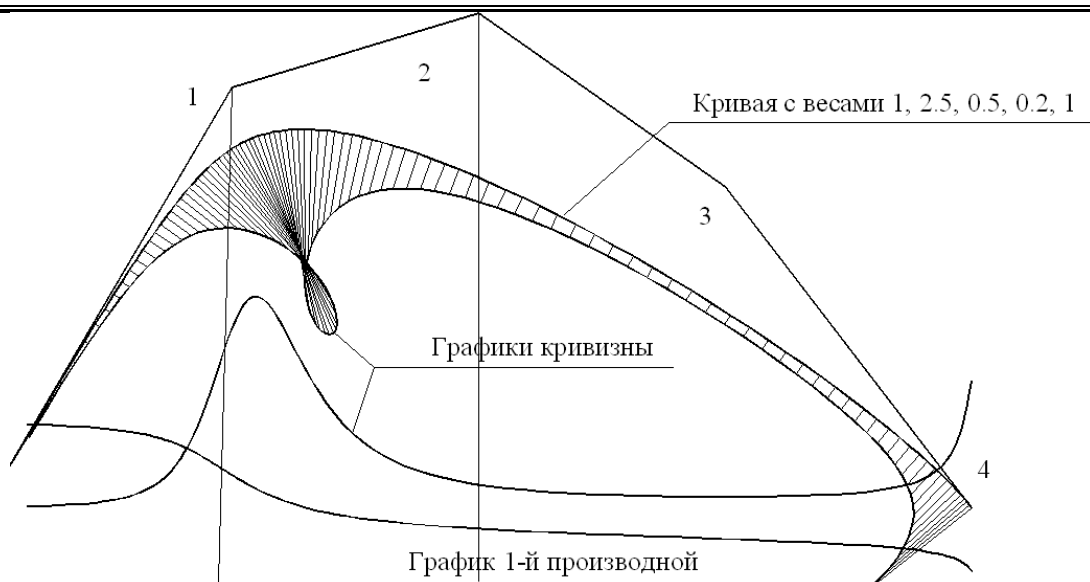


Рисунок 14 – Модификация кривой с целью резкого увеличения кривизны на участке $x = x_1$

Выводы. В работе предложены методы управления формой рациональной кривой Безье на основе оценки влияния изменений положения и веса реперных точек на кривизну кривой на заданном участке кривой. Предложенный метод можно без изменений применить и к NURBS-кривым. Предложенный метод дает возможность конструировать оптимальные обводы машин и агрегатов, которые работают в движущейся среде (обводы самолетов, судов, автомобилей).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадаев Ю. И. Керування кривиною NURBS-кривої 3-го порядку за допомогою ваги контрольних вектор-точок/ Ю.И. Бадаев, А.О. Блиндарук // Водний транспорт. Зб. наук. праць Київської державної академії водного транспорту. – К: КДАВТ, 2015. – №3(21) – С.103-105.
2. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. – М.: Физмат, 1989, – 472с.
3. Погорелов А. В. Геометрия. - М.: Наука, 1983, – 288с.
4. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Переведено с английского – М.: Издательство Мир, 1982. – 304 с.

Бадаєв Ю.І., Ганношина І.М., Медведєва Е.Ю.

УПРАВЛІННЯ ФОРМОЮ ПЛОСКОЇ РАЦІОНАЛЬНОЇ КРИВОЇ БЕЗЬЄ

У роботі пропонується метод цілеспрямованої зміни форми плоскої раціональної кривої Безьє на основі аналізу величин першої та другої похідних вихідної кривої і кривих, визначених вузловими точками. На основі порівняння першої та другої похідних визначається потрібна зміна вузлових точок і (або) їх вагів для досягнення бажаного результату.

Ключові слова: раціональна крива Безьє, кривизна, форма кривої.

Badaev Yu. I., Gannoshina I.M., Medvedeva O.Yu.

RATIONAL MANAGEMENT FROM OF FLAT BEZIER CURVES

The paper proposes a method of changing the shape of the flat targeted rational Bezier curve based on the values of analysis of the first and second derivatives of the original curve and curves defined by nodal points. Based on a comparison of the first and the second derivative is determined by the desired change in the nodal points and (or) their weights to achieve the desired result.

Keywords: rational Bezier curve, curvature, shape of the curve.