УДК 517.977

В.И. Нещерет

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ В ЗАДАЧЕ ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В работе исследуются условия инвариантности линейного многообразия, которые возникают при решении задач локально-оптимальной стабилизации программного движения. Это связано как с рациональным выбором целевого множества на программном многообразии, так и с вопросом о целых траекториях на множестве, где управление становится неэффективным.

Ключевые слова: *уравнение, матрица, множество, инвариантность, ранг.*

В роботі досліджуються умови інваріантності лінійної множини, що виникають при рішенні задач локально-оптимальної стабілізації програмного руху. Це пов'язано як з раціональним вибором цільової множини на програмному русі, так і з питанням про цілі траєкторії в області, де управління стає неефективним.

Ключові слова: *рівняння, матриця, множина, інваріантність, ранг*

In this article are researched the conditions of invariance of linear manifold, that arise up at the decision of tasks of the locally-optimal stabilizing of programmatic motion. They are related both with rational choice of a purpose domain on a programmatic variety and with a question about whole trajectories on a domain, where control becomes ineffective

Keywords: *equation, matrix, manifold, invariance, grade*

Вступление. В задачах локально-оптимального управления последнее определяется из условия минимума производной от локального критерия в силу системы дифференциальных уравнений. На некотором многообразии эта производная не зависит от управления. В зависимости от области допустимых управлений здесь возможно возникновение скользящих режимов [1] или необходимо исследовать поведение системы на этом многообразии [2]. Аналогичны также вопросы об инвариантности самого программного многообразия и наличия у него инвариантного ядра. Данные проблемы возникают и при использовании локально-оптимального управления в конкретных технических задачах [3].

Постановка задачи. Необходимо сформулировать условия инвариантности программного многообразия для систем дифференциальных уравнений и особых многообразий, которые возникают при решении задач локально-оптимальной стабилизации программного движения.

1. На траекториях системы неоднородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + a \tag{1}$$

рассмотрим линейное многообразие **Ω**, задаваемое уравнениями

$$\Omega = Dx + d = 0 \, , \tag{2}$$

где A – матрица $N \times N$; D – матрица $M \times N$; a –вектор $N \times 1$; d – вектор $M \times 1$; $rank\ \bar{D} = M$, $\bar{D} = \{D, d\}$ – матрица $M \times (N+1)$, $M \le N$.

Вначале рассмотрим условие однородности задачи (1), (2). Для этой цели обозначим её как задачу $\overline{E}$, в отличие от следующей задачи E, в которой уравнения (1), (2) будут однородными

$$E \begin{cases} \dot{x} = A\,x & (3) \\ \omega = Dx = 0 & (4) \end{cases}$$

Сделаем в $\bar{E}$ замену $x = G\hat{x} + g$ с произвольной невырожденной матрицей G размерности $N \times N$. Уравнение (1) приобретает вид $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{a}$, где $\hat{A} = G^{-1}AG$, $\hat{a} = G^{-1}(Ag + a)$. Для однородности этого уравнения $(\hat{a} = 0)$ примем $g = -A^{-1}a$, так как $\det G^{-1} \neq 0$. Функция $\omega(x)$ в новых переменных $\omega = \hat{D}\hat{x} - DA^{-1}a + d, \ \hat{D} = DG.$

Если выполняется условие

$$d = DA^{-1}a \, , \tag{5}$$

то с помощью указанной замены уравнения (1), (2) могут быть приведены к однородной форме: $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}, \ \ \omega = \hat{D}\hat{x} = 0$. Можно взять в качестве G единичную матрицу, и тогда $\dot{\hat{x}} = A\hat{x}, \ \ \omega = D\hat{x} = 0$. Уравнения (1), (2) однородны в точке покоя $x^* = g$.

Условие (5) предполагает невырожденность матрицы A. При $\det A = 0$ система имеет неединственное положение равновесия x^*, а многообразие Ω^* таких положений, определяемое системой уравнений $\omega^* = Ax + a = 0$, если $rank\ \{A, a\} = rank\ A = N^* < N$.

Для того чтобы задача $\overline{E}$ обладала свойством однородности, то есть могла быть приведена к виду E, надо, чтобы хотя бы одна их точек

$x^* \subseteq \Omega^*$, в которую теперь можно перенести начало координат, принадлежала Ω. Действительно, если начало координат x=0 расположено на пересечении гиперплоскостей Ω, последние описываются однородными уравнениями. Следовательно, необходимо и достаточно, чтобы множество $\breve{\Omega}=\Omega\bigcap\Omega^*$ было не пусто. Составим матрицу $\breve{D}=\left|\frac{A}{D}\right|$ и вектор $\breve{d}=\left|\frac{a}{d}\right|$. Для того, чтобы $\breve{M}=N^*+M$ уравнений $\breve{\omega}=\breve{D}x+\breve{a}=0$ имели хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $rank\left\{\breve{D},\breve{d}\right\}=rank\,\breve{D}$.

Лемма 1. Для того, чтобы задача (1), (2) могла быть приведена к однородной форме, необходимо и достаточно выполнения условия

$$rank\left|\frac{A\,|\,a}{D\,|\,d}\right|=rank\left|\frac{A}{D}\right|, \tag{6}$$

в частности условия (5) при $\det A\neq 0$.

Дальше будем рассматривать общий случай неоднородной задачи программного движения (1), (2).

Рассмотрим условия инвариантности (интегральности) программного многообразия Ω. Для того, чтобы Ω было инвариантным многообразием системы (1), необходимо и достаточно, в силу линейности уравнений (1), (2), чтобы существовала матрица *B* размерности *M*×*M* такая, чтобы выполнялось соотношение

$$\dot{\omega}=B\omega, \tag{7}$$

где $\dot{\omega}=\varphi(x)=DAx+Da$. Рассматривая (7) в виде

$$DAx+Da=BDx+Bd,$$

получаем

$$\begin{gathered} DA=BD \\ Da=Bd \end{gathered} \tag{8}$$

или $D\overline{A}=B\overline{D}$, где $\overline{A}=\{A,a\}$ – матрица *N*×*(N+1)*. Элементы каждой строки B_m матрицы *B* определяются из соответствующей системы $\overline{D}'B_m'=\overline{A}'D_m'$, если $rank\left\{\overline{D}',\overline{A}'D_m\right\}=M$, где D_m – строка матрицы D, *m=1,2,..M.*

Лемма 2. Для того, чтобы многообразие Ω вида (2) было инвариантным многообразием системы (1) необходимо и достаточно выполнения условия

$$rank\,\overline{\overline{D}} = M, \qquad \overline{\overline{D}} = \left|\frac{\overline{D}}{D\overline{A}}\right| = \left|\frac{D\,|\,d}{DA\,|\,Da}\right| \tag{9}$$

Здесь и далее предполагаем, что все *M* строк матрицы D (и, следовательно, матрицы $\overline{D}$) независимы, то есть $rank\,D = M$. В противном случае надо предварительно оговорить, что среди уравнений (1) нет таких, которые определяют параллельные плоскости, то есть потребовать $rank\,\overline{D} = rank\,D$. Тогда условие инвариантности Ω в общем виде

$$rank\,\overline{\overline{D}} = rank\,\overline{D} = rank\,D \tag{10}$$

Отметим, что условие (9) не перестаёт быть необходимым и при выполнении условия однородности (6) задачи – в том смысле, что тогда второе из соотношений (8) выполняется тождественно.

2. Теперь перейдём непосредственно к построению инвариантно ядра $\widetilde{\Omega}$ многообразия Ω.

В задачах об устойчивости линейных систем обычно предполагают, что они допускают невозмущённое движение *x=0*, то есть рассматривают устойчивость системы (3). Аналогично, говоря об устойчивости программного многообразия Ω, естественно принять, что Ω инвариантно на траекториях системы дифференциальных уравнений. Но в задаче стабилизации Ω с помощью некоторого управления u(ω,x), требование инвариантности Ω можно ослабить, если предположить, что хотя бы некоторая часть его $\widetilde{\Omega}$ инвариантна.

Рассмотрим вначале однородную задачу *E*. Будем обозначать производные $\omega^{(n)} = \varphi^n = DA^n x, n = 0,1,2...$, причём $\varphi^0 = DC$.

Пусть *M=1*. Если производная φ^1 не обращается в нуль на всём Ω (векторы *D* и *DA* независимы), но вторая производная φ^2 равна нулю при $\varphi^0 = 0,\ \varphi^1 = 0$, то гиперплоскость Ω не является интегральной для (3), но пересечение двух гиперплоскостей $\Omega^2 = \{x : \omega(x) = 0, \varphi^1 = 0\}$, будет интегральным многообразием. Если $\varphi^2(x)$ не обращается в нуль на Ω^2, то надо рассматривать $\varphi^3 = \frac{d}{dt}\varphi\ (x)$ и так далее. Таким образом будет построено многообразие $\Omega^n = \{x : \omega(x) = 0, \varphi^1(x) = 0, ...\varphi^{n-1}(x) = 0\}$

размерности *N-n, n<=N.* Если при некотором n<N функция $\varphi^n(x)$ обращается в нуль на Ω^n, то есть имеет место

$$\varphi^n = \sum_{i=0}^{n-1} B^i \varphi^i , \qquad (11)$$

то Ω^n – интегральное многообразие. Так как $\Omega^n \subset \Omega$, будем называть его инвариантным ядром и обозначать $\widetilde{\Omega}$. Если ни при каком *n<N* Ω^n не будет интегральным многообразием, то $\widetilde{\Omega}$ не существует, то есть Ω не содержит целых траекторий системы (3).

Случай *n=N* можно рассматривать как тривиальный, так как это свидетельствует об инвариантности нуль-мерного многообразия – точки *x=0*. С учётом этого из (11), где $\varphi^i = DA^i x,\ i = 0,...,N-1$, получается, что среди вектор-строк $D, DA,..., DA^{N-1}$ были зависимые, то есть выполнялось условие

$$rank\,\overline{\overline{D}}_N < N,\ \overline{\overline{D'}}_N = \{D', (DA)', (DA^2)',...,(DA^{N-1})'\}. \qquad (12)$$

Это соответствует отсутствию полной наблюдаемости в задаче Е. При $rank\,\overline{\overline{D}}_N = N$ система наблюдаема. Данное условие получено здесь геометрическим путём, в отличие от обычного алгебраического подхода. Такой путь будет использован также для неоднородной задачи $\overline{E}$, где условия наблюдаемости не решают полностью вопрос об инвариантном ядре $\widetilde{\Omega}$.

Условие (12) наличия на Ω ненаблюдаемого инвариантного подмножества справедливо в общем случае *M*>1. Он в основных чертах аналогичен рассмотренному выше. Но окончательный результат можно записать немного иначе, чем (12). Для этого укажем одно свойство блочной матрицы $\overline{\overline{D}}_N$.

Если вектор $D_m A^n$ линейно зависит от векторов $D_j A^p, p < n, j = 1,2,..,M$, то все векторы $D_m A^{n+1}, D_m A^{n+2},...$ также зависимы от них. Поэтому в матрице $\overline{\overline{D}}_N$ базисные векторы содержатся в первых блоках, а число блоков DA^n, в которых есть такие векторы, будет наибольшим в том случае, если в каждом блоке будет только один такой вектор. Следовательно, если $rank\,\overline{\overline{D}}_N = \widetilde{M}$ то все $\widetilde{M}$ независимых векторов содержатся в первых $\widetilde{M}$ блоках, то есть $rank\,\overline{\overline{D}}_N = rank\,\overline{\overline{D}}_{\widetilde{M}}$ и эти матрицы эквивалентны: $\overline{\overline{D}}_N \sim \overline{\overline{D}}_{\widetilde{M}}$. Так как принято $rank\,D = M$, то блоки $DA, DA^2,\ldots$ содержат остальные $N-M$ независимых векторов. Максимальное число этих блоков, в которых могут быть такие векторы, равно $N-M$, а не $N-1$, как в общем случае.

Лемма 3. При $rank\,D = M$ матрица $\overline{\overline{D'}}_N$ эквивалентна матрице

$$\overline{\overline{D'}}_{N-M+1} = \left\{D', (DA)', \ldots, (DA^{N-M})'\right\}.$$

С учётом лемм 2, 3 можно сформулировать окончательные условия существования $\widetilde{\Omega}$ в задаче ***E***.

Теорема 1. Для того, чтобы многообразие Ω в однородной задаче ***E*** имело инвариантное ядро $\widetilde{\Omega}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\widetilde{M} = rank\overline{\overline{D}}_{N-M+1} < N.$$

Здесь $\widetilde{\Omega}$ имеет вид $\widetilde{\omega} = \widetilde{D}x = 0$, где строки $\widetilde{D}_m, m = 1,2..\widetilde{M}$, $M <= \widetilde{M} < N$ матрицы $\widetilde{D}$ - это линейно независимые строки $D_m A^n, m = 1,2,..M, n = 0,1,..N-M$ матрицы $\overline{\overline{D}}_{N-M+1}$. Первые M строк $\overline{\overline{D}}$ есть матрица D.

3. Перейдём к неоднородной задаче $\overline{E}$. Условие наблюдаемости, содержащееся в теореме 1, не меняется. Например, если по результатам измерений известно $\omega = Dx + d$, то можно считать, что известен и однородный выход Dx. Не влияет на свойство наблюдаемости и свободный член в дифференциальных уравнениях, например, управление. Не меняется и размерность $N-\widetilde{M}$ ненаблюдаемого подпространства. Но конкретный вид его для неоднородной задачи имеет свою специфику. Будем обозначать $\omega^{(n)} = \varphi^n DA^n x + DA^{n-1}a$.

Вначале рассмотрим случай $\widetilde{M} = M$. Это значит, что в однородной задаче ***E*** всё многообразие **Ω** инвариантно. Действительно, условие (9) здесь имеет вид $rank\,\overline{\overline{D}} = M$, где $\overline{\overline{D}} = \left|\dfrac{D}{DA}\right|$ состоит из первых двух блоков матрицы $\overline{\overline{D}}_{N-M+1}$. В неоднородном варианте матрица $\overline{D}$ дополняется свободными членами и имеет вид $\overline{\overline{D}}$ в (9). Ранг такого рода расширенных матриц будем для краткости в настоящем выводе обозначать $rank\,\overline{\overline{D}} = \overline{\widetilde{M}}$.

В данном случае $M \leq \overline{\widetilde{M}} \leq 2M$, так как $rank\{D,d\} = M$. Хотя строки матрицы DA линейно зависимы со строками D, требуется также определённое согласование свободных членов d, Da , чтобы строки матрицы $\{DA, Da\}$ были линейно зависимы со строками матрицы $\{D,d\}$. Если $\widetilde{M} = M$, то и в неоднородной задаче Ω инвариантно, то есть $\widetilde{\Omega} = \Omega$. Геометрически это обозначает, что все гиперплоскости $\varphi^1 = DAx + Da = 0$ проходят через Ω, точнее, в силу одинаковой размерности Ω и многообразия $\hat{\Omega}$, определяемого первой производной $\varphi^1(x) = 0$, эти многообразия совпадают.

Предположим, что $\overline{\widetilde{M}} \geq \widetilde{M} + 1\,(\widetilde{M} = M)$, то есть хотя бы одна из плоскостей $\varphi_m^1 = 0$ $(m = 1,2,..M$ фиксировано$)$, не содержит Ω. Будем говорить, что она параллельна Ω, так как её вектор-строка $\{D_m A, D_m a\}$ независима со строками матрицы $\{D,d\}$ только за счёт свободного члена $D_m a$. Она не имеет общих точек с Ω, поэтому её пересечение $\hat{\Omega}$ с остальными плоскостями $\varphi_i^1 = 0,\ i = 1,2,...M, i \neq m$, не имеет общих точек с Ω: $\hat{\Omega} \bigcap \Omega = \varnothing$. Так как $\overline{\widetilde{M}} \neq M$, то по лемме 2 Ω не инвариантно в $\overline{E}$. Покажем, таким инвариантным многообразием теперь будет $\hat{\Omega} : \varphi^1(x) = 0$. В силу предположения об инвариантности Ω в E существует такая квадратная M-мерная матрица B, что справедливо соотношение

$$DA = BD \tag{13}$$

Рассмотрим производную $\varphi^2 = \dfrac{d}{dt}\varphi^1 = DA^2x + DAa$. С учётом (13) $\varphi^2 BDAx + BDa = B\varphi^1$. Производная от φ^1 обращается в нуль при $\varphi^1 = 0$, следовательно, $\hat{\Omega}$ инвариантно в $\overline{E}$.

Таким образом, при $\widetilde{M} = M$ имеем: или $\overline{\widetilde{M}} = M$, тогда инвариантное ядро $\widetilde{\Omega}$ совпадает с Ω, или $\overline{\widetilde{M}} > M$, и тогда Ω не содержит инвариантного ядра. Во втором случае ненаблюдаемое (инвариантное) подпространство это $\hat{\Omega}$. Размерность его равна $N - \widetilde{M}$, но расположение в пространстве иное, чем $\widetilde{\Omega}$.

Перейдём к рассмотрению общего случая $M \le \widetilde{M} < N$. $\overleftrightarrow{M}$ независимых строк матрицы $\overline{D}_{N-M+1}$ составляют $(\overleftrightarrow{M} \times N)$ – мерную матрицу $\overleftrightarrow{B}$, рассмотренную выше. Остальные строки $\overline{D}_{N-M+1}$ зависимы от $\overleftrightarrow{D}$, то есть существует постоянная $\overleftrightarrow{M} \times \overleftrightarrow{M}$ -мерная матрица *B*, такая что имеет место

$$\widetilde{D}A = B\widetilde{D} \ . \tag{14}$$

Инвариантное многообразие, определяемое уравнением $\widetilde{D}x = 0$, обозначим здесь Ω^0, чтобы подчеркнуть, что речь идёт об однородной составляющей общей неоднородной задачи $\overline{E}$.

Аналогично $\overline{\overline{D}}$ составим матрицу

$$\overline{\overline{D}}_{N-M+1} \text{ размерности} (N - M + 1)M \times (N + 1),$$

дополнив $\overline{D}_{N-M+1}$ свободными членами

$$\overline{\overline{D}}_{N-M+1} = \left| \begin{array}{c} D \mid d \\ \hline DA \mid Da \\ \hline DA^2 \mid DAa \\ \hline \ldots \mid \ldots \\ \hline DA^{N-M} \mid DA^{N-M-1}a \end{array} \right|$$

Для записи более удобна её транспонированная форма

$$\overline{\overline{D}}\,'_{N-M+1} = \left\{ \overline{D'},\ \overline{A'}D',\ \overline{A'}A'D',\ ,\ldots\overline{A'}(A')^{N-M-1}D' \right\}.$$

Два первые её блока – это матрица $\overline{D}$. Матрице D^0 в $\overline{\overline{D}}_{N-M+1}$ соответствует $(\widetilde{M} \times (N+1))$-мерная матрица $\left\{\widetilde{D}, \widetilde{d}\right\}$. Очевидно, что ранг её, как и матриц $\widetilde{D}, \overline{D}_{N-M+1}$ равен $\widetilde{M}$. Но в $\overline{\overline{D}}_{N-M+1}$ за счёт свободных членов ещё могут быть строки, линейно независимые со строками матрицы $\left\{\widetilde{D}, \widetilde{d}\right\}$, то есть может быть $\overline{\widetilde{M}} > \widetilde{M}$, где $\overline{\widetilde{M}} = rank\ \overline{\overline{D}}_{N-M+1}$.

Пусть $\overline{\widetilde{M}} = \widetilde{M}$. Это значит что многообразие $\overline{\Omega}^0$, задаваемое уравнениями $\widetilde{\omega} = \widetilde{D}x + \widetilde{d} = 0$, также инвариантно в $\overline{E}$, так как не только справедливо (14), но и свободные члены согласованы обычным образом

$$\widetilde{D}a = B\widetilde{d} \ . \tag{15}$$

Поэтому $\overline{\Omega}^0$ = это инвариантное ядро $\widetilde{\Omega}$ - часть Ω. Отметим, что и многообразие $\hat{\Omega}$, задаваемое производной $\dot{\widetilde{\omega}} = \widetilde{D}Ax + \widetilde{D}a = 0$, совпадает здесь с $\overline{\Omega}^0$, так как в силу (14), (15)

$$\ddot{\widetilde{\omega}} = \widetilde{D}A^2x + \widetilde{D}Ax = B\widetilde{D}Ax + B\widetilde{D}a = B\dot{\widetilde{\omega}} = B^2\widetilde{\omega} .$$

Если $\overline{\widetilde{M}} > M$, то есть хотя бы для одного из свободных членов $\widetilde{d}_i, i = 1,2,..\widetilde{M}$, не выполняется условие (15), где B – матрица (14), то соответствующая плоскость $\dot{\widetilde{\omega}}_i(x) = 0$ не имеет общих точек с $\overline{\Omega}^0$, параллельна ему и $\overline{\Omega}^0$ неинвариантно. Тем не менее, размерность ненаблюдаемого пространства равна $\widetilde{M}$, то есть в фазовом пространстве существует инвариантное многообразие размерности $N - \widetilde{M}$. Покажем, что это $\hat{\Omega} : \dot{\widetilde{\omega}} = 0$.

Запишем производную $\ddot{\widetilde{\omega}} = \dfrac{d}{dt}\dot{\widetilde{\omega}} = \widetilde{D}A^2x + \widetilde{D}Aa$. С учётом (14) $\ddot{\widetilde{\omega}} = B\widetilde{D}Ax + B\widetilde{D}a = B\dot{\widetilde{\omega}}$. Так как производная от $\dot{\widetilde{\omega}}(x)$ обращается в нуль на $\dot{\widetilde{\omega}}(x) = 0$, то $\hat{\Omega}$ инвариантно. Однако, так как в этом случае $\overline{\Omega}^0 \bigcap \hat{\Omega} = \varnothing$ в $\overline{E}$, то Ω не содержит в $\overline{E}$ инвариантного ядра.

Теорема 2. Условия

$$rank\,\overline{D}_{N-N+1} < N, \tag{16}$$

$$rank\,\overline{\overline{D}}_{N-M+1} = rank\,\overline{D}_{N-M+1} \tag{17}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы многообразие Ω в неоднородной задаче $\overline{E}$: (1), (2) имело инвариантное ядро $\widetilde{\Omega}$ вида

$$\widetilde{\omega} = \widetilde{D}x + \widetilde{d} = 0 \tag{18}$$

Здесь матрица $\widetilde{D}$ составлена из $\widetilde{M} = rank\,\overline{D}_{N-M+1}$ линейно независимых строк матрицы $\overline{D}_{N-M+1}$, а $\widetilde{d}$ из соответствующих им свободных членов матрицы $\overline{\overline{D}}_{N-M+1}$.

Таким образом, выполнение условия $rank\,\overline{D}_{N-M+1} = N$ наблюдаемости в неоднородной задаче необходимо, но недостаточно для существования целых траекторий на Ω, в отличие от однородной задачи E, где оно и достаточно. В $\overline{E}$ требуется дополнительное условие (17).

Инвариантность $\widetilde{\Omega}$ эквивалентна тому, что справедливы соотношения (6), (7). Поэтому изменение $\widetilde{\omega}(x)$ на траекториях системы (3) описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\widetilde{\omega}} = B\widetilde{\omega} \tag{19}$$

4. В задачах локально-оптимальной стабилизации программного движения (18) используется минимизация производной от некоторого локального критерия [1-3]. Управление входит в эту производную с коэффициентом $h = \widetilde{\omega}'\overline{L}$, где $\overline{L}$ - матрица $\widetilde{M} \times K, K \le M \le \widetilde{M}$. Для решения задачи требуется условие отсутствия целых траектории на особом многообразии $H = \{x : h(x) = 0\}$, где эта производная от управления не зависит. Рассмотрим этот вопрос на основе предыдущего анализа.

Из выражения для $h(\omega)$ видно, что $\widetilde{\Omega} \subset H$ и только при условиях $rank\ \overline{L} = K, K = M, (\widetilde{M} = M)$ эти многообразия совпадают: $\widetilde{\Omega} = H$. Так как в общем случае $\widetilde{\Omega} \subset H$ и $\widetilde{\Omega}$ инвариантно, то *H* содержит инвариантное подмножество по крайней мере размерности $N - M$ в виде $\widetilde{\Omega}$. Действительно, с учётом (19) $\dot{h}' = \overline{L'}B\widetilde{\omega}$, следовательно, производная $\dot{h}$ также обращается в нуль на *H*. Надо, чтобы *H* не содержало инвариантного подмножества $\widetilde{H}$, большего, чем $\widetilde{\Omega}$. Например, если $N = 3, \widetilde{M} = 2, K = 1,$ òî $\acute{I}$ - плоскость, содержащая прямую $\widetilde{\Omega}$. Здесь требуется чтобы вся *H* не была инвариантной.

В соответствии с теоремой 1 составим матрицу $\overline{D}$ для функции $h_0' = D_0 x + d_0, D_0 = \overline{L'}\widetilde{D}, d_0 = \overline{L'}\widetilde{d}$, но обозначим эту матрицу-аналог следующим образом:

$$D^*_{N\text{-}K+1} = \left| \begin{array}{c|c} D_0 & d_0 \\ \hline D_0 A & D_0 a \\ \hline D_0 A^2 & D_0 A a \\ \hline \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \hline D_0 A^{N-K} & D_0 A^{N-K-1} a \end{array} \right| \tag{20}$$

Ранг этой матрицы обозначим $\widetilde{K} = rank\ D^*_{N\text{-}K+1}$. Размерность $\widetilde{H}$ равна $N - \widetilde{K}$. Но в силу инвариантности $\widetilde{\Omega}$ она на меньше размерности $N - \widetilde{M}$ многообразия $\widetilde{\Omega}$, откуда $\widetilde{K} \le \widetilde{M}$ – число независимых строк $D^*_{N\text{-}K+1}$ не превышает $\widetilde{M}$. Требуется, чтобы размерность $\widetilde{H}$ была не больше, чем размерность $\widetilde{\Omega}$, то есть $\widetilde{K} \ge \widetilde{M}$. Получаем $\widetilde{K} = \widetilde{M}$.

Теорема 3. Для того, чтобы многообразие $\widetilde{H}$ не содержало целых траекторий системы (3), кроме $\widetilde{\Omega}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$rank\ D^*_{N\text{-}K+1} = \widetilde{M}\ . \tag{21}$$

Условие отсутствия целых траекторий на H, кроме $\widetilde{\Omega}$, можно сформулировать и непосредственно на основе уравнений (19). Но тогда оно будет записано не в исходных терминах задачи, потребуется значение матрицы B. Запишем это условие и сравним его с (21). Многообразие $H = \left\{ \widetilde{\omega} : h = \widetilde{\omega}'\overline{L} = 0 \right\}$ в пространстве переменных $\widetilde{\omega}_n, n = 1,2,...\widetilde{M}$, не содержит целых траекторий системы (19), кроме $\widetilde{\omega} = 0$, если пара $(\overline{L'}, B)$ наблюдаема, то есть выполняется условие

$$rank\ F_{\widetilde{M}} = \widetilde{M}, \quad F_{\widetilde{M}} = \left\{ \overline{L}, B'\overline{L}, (B')^2\overline{L},...(B')^{\widetilde{M}-1}\overline{L} \right\}. \tag{22}$$

Покажем эквивалентность этого условия и (21). Для этого сначала учтём, что при $rank\ \overline{L} = K$ по лемме 2, которая справедлива здесь, с учётом иных обозначений, матрица $F_{\widetilde{M}}$ эквивалентна $F_{\widetilde{M}-K+1}$. С последней и будем сравнивать $D^*_{N\text{-}K+1}$. Из (14) получим $\widetilde{D}A^n = B^n\widetilde{D}, \quad n = 1,2,...$

Подставив эту связь при $n = 1,2,...\widetilde{M} - K$ в матрицу $D^*_{N\text{-}K+1}$, приведём её к такому виду $D^*_{N\text{-}K+1} = F_{\widetilde{M}-K+1}\overline{\widetilde{D}},\ \overline{\widetilde{D}} = \left\{ \widetilde{D}, \widetilde{d} \right\}$. Здесь $rank\ \overline{\widetilde{D}} = \widetilde{M}$, поэтому если справедливо (22), и $F_{\widetilde{M}-K+1} \sim F_{\widetilde{M}}$, то $rank\ F_{\widetilde{M}-K+1}\overline{\widetilde{D}} \le \widetilde{M}$. Выделим из $F_{\widetilde{M}-K+1}$ невырожденную квадратную матрицу F^0 размера $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$, тогда $rank\ F^0\overline{\widetilde{D}} = \widetilde{M}$, значит $rank\ F_{\widetilde{M}-K+1}\overline{\widetilde{D}} \ge \widetilde{M}$. В итоге $rank\ D^*_{N\text{-}K+1} = \widetilde{M}$.

Пусть не выполняется условие (22), то есть $rank\ F_{\widetilde{M}-K+1} = M^0 < \widetilde{M}$. Тогда аналогичным образом получим $rank\ D^*_{N\text{-}K+1} = M^0$. Таким образом, получаем $D^*_{N\text{-}K+1} \sim F_{\widetilde{M}-K+1}$. Теорема доказана также алгебраическим путём.

Выводы. В статье исследованы необходимые и достаточные условия инвариантности линейных многообразий, которые возникают при локально-оптимальной стабилизации программного движения на траекториях системы дифференциальных уравнений. Эти результаты для нескольких задач сформулированы в виде лемм и теорем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нещерет В.И. Стабилизация неинвариантного многообразия в скользящем режиме при использовании локально-оптимального управления // Вісник Одесского национального морского университета. – Вып. 18. – Одесса, 2005. – С. 198-206.*
2. *Нещерет В.И. Область притяжения в задаче локально-оптимальной стабилизации программного движения // Нові інформаційні технології навчання в навчальних закладах України (технічні та економічні науки). – Одеса: Друк, 2001. – С. 29-32.*
3. *Нещерет В.И. Локально-оптимальная стабилизация углового движения летательного аппарата // Проблеми техніки: Науково-виробничий журнал. – Одеса, 2012. – № 3. – С. 36-41.*

Стаття надійшла до редакції 12.02.2013

Рецензент – кандидат технічних наук, професор кафедри «Технічна кібернетика» Одеського національного морського університету **В.М. Челабчі**