

УДК 69.05:658.-62:728.1

В.А. Гришин, А.В. Гришин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СКЛОНОВ (1)

Рассматривается применение математического моделирования к проблеме нелинейного деформирования склонов.

Ключевые слова: математическое моделирование, напряженно-деформированное состояние, склоны, пластичность, оползни, устойчивость.

Розглядається застосування математичного моделювання до проблеми нелінійного деформування схилів.

Ключові слова: математичне моделювання, напружено-деформований стан, схили, пластичність, зсуви, стійкість

Application of mathematical modelling to a problem of nonlinear deformation of slopes is considered.

Keywords: mathematical modelling, stressed-strain state, slopes, plasticity, landslips, stability

*Под моделью (от лат. *modulus* – мера, образец, норма) понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. Процесс построения и использования модели называется моделированием.*

П.В. Трусов и др. Введение в математическое моделирование

Профессор Д. Петли из университета Дарема составил базу данных происшедших оползней (не учитывались оползни от землетрясений) и карту смертности (рисунок 1) за период с 2004 по 2010 годы. За указанное время от 2 620 оползней, показанных на карте смертности белыми кружочками, погибло 32 322 человека.

Даже те неполные данные, приведенные на карте рисунка 1, показывают, какие огромные территории земли подвержены оползневому процессам. В настоящее и будущее время прогнозируется увеличение человечеством количества вновь осваиваемых земель, на которых могут возникать подвижки грунтовых массивов. Опасность для возводимых и существующих наземных и подземных сооружений могут представлять не

только склоны, на которых могут происходить разрушающие оползни, например, как показано на рисунке 2, но и территории земли, подверженные во времени медленным неравномерным смещениям. Совместный расчет по определению напряженного и деформированного состояний взаимодействующих между собой таких структур как сооружение, грунтовой массив, подземные и надземные воды, которые будем в дальнейшем называть реальной системой или материальным объектом (или просто объектом), играет очень важную роль при обосновании его надежной эксплуатации.



Рис. 1. Карта смертности



Рис. 2. Оползень в горной местности

Грунты и многие распространенные строительные материалы даже под незначительной нагрузкой работают в упруговязкопластическом состоянии, в котором возникающие напряжения и деформации существенно зависят от времени и последовательности их нагружения. Вообще, грунты, из которых формируются склоны, представляют собой очень сложные многофазные среды, свойства которых изменяются в процессе строительства и во время эксплуатации возведенных на них сооружений [1, 2]. Поэтому желательно, чтобы из бесконечного числа факторов, характеризующих реальную сложную систему, были учтены в расчетной системе только конечное их число, отражающих важнейшие ее свойства. При этом эти свойства должны быть реально определяемыми из опытных данных и допускающим в дальнейшем численную реализацию расчетной системы с применением ЭВМ. Следовательно, выбираемая нами расчетная система, которую называем моделью, не будет точно совпадать с реальной системой, но должна отражать ее основные свойства. Как выразились Артуро Розенблют и Норберт Винер: “наилучшей моделью кота является другой кот, а еще лучше – тот же самый кот”. Хотя модель “беднее” и неоднозначна материальному объекту, но, как правило, она доступнее, информативнее и удобнее для пользователя. Она также позволяет лучше понять основные свойства исследуемого объекта, прогнозировать последствия при изменении его свойств и различных на него воздействий.

В настоящее время наблюдается бурное развитие методов математического моделирования, которое привело к появлению огромного количества моделей самого разного типа [3, 4, 5]. Наиболее подробное их описание и классификация изложена в указанной выше ссылке на литературу. Следует отметить, что такой подход в научных исследованиях является сейчас наиболее применяемым и результативным. Как показано в [4], постановку вопроса о математическом моделировании можно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа. Кратко рассмотрим эти этапы и применительно к склонам.

На первом этапе математического моделирования объекта в виде склона должно предшествовать мысленное создание идеального его образа в виде компактного и наиболее простого представления, которое называется когнитивной моделью. Она в свою очередь состоит из трех последовательных моделей. Первая из них, оформленная в словесной форме в виде технического задания на проектирование модели склона, называется содержательной моделью. В этом словесно-смысловом описании объекта содержатся цели исследования и некоторые упрощения. Затем, на основании такой технической постановки проблемы, разрабатывается на новом уровне знаний вторая модель, в которой отбрасываются все несущественные факторы и она формулируется в терминах математики, механики грунтов, механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и называется концептуальной моделью. На следующем уровне эта модель реализуется в виде математических формул, которые получены на основании фундаментальных законов природы, и представляют третью математическую модель склона, которая в дальнейшем исследуется теоретическими методами. Здесь остановимся подробнее на создании только математической модели склонов.

Модель грунта представляет собой среду, называемую материальным континуумом, которая состоит из скелета и связанного пористого пространства, непрерывно ее заполняющие. Ее поры обычно содержат текучую фильтрующую газожидкостную смесь. Скелет состоит из твердых частиц, которые включают закрытую пористость, возможно заполненную насыщаемой жидкостью, но через которую отсутствует ее фильтрация. Возможно, что газожидкостная смесь содержит только несжимаемую жидкость. Бесконечно малый элемент такой непрерывной гетерогенной среды, который также называется материальной частицей, изображен на рисунке 3. Он представляет собой суперпозицию двух континуумов: скелета и жидкости, заполняющей связанное пористое пространство. При этом перемещения твердых частиц скелета относительно друг друга игнорируются.

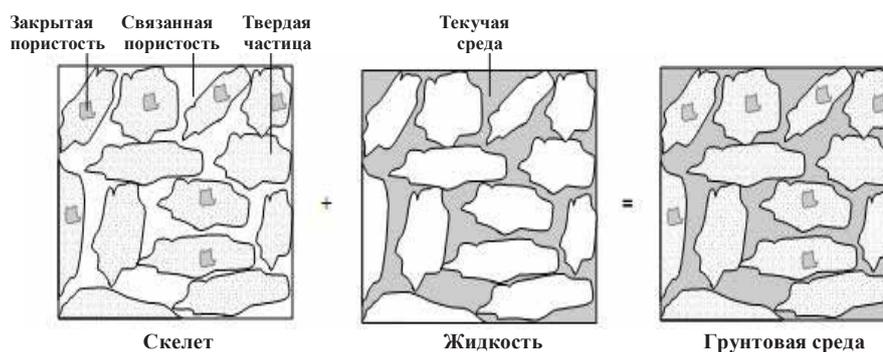


Рис. 3. Модель грунтовой среды

Еще раз подчеркнем, что такая грунтовая среда представлена не в дискретном виде, а как модель сплошной деформируемой среды. При этом ее элементарный объем во много раз превышает размер частиц скелета грунта. Но образец грунта, используемый для определения его механических свойств, и сам массив грунтовой среды, напряженно-деформируемое состояние которого определяется, должны быть значительно больше размера элементарного объема.

Мерой количественной оценки напряженно-деформированного состояния деформируемого массива являются осредненные в таком бесконечно малом элементе перемещения, деформации и напряжения, возникающие в нем от действия внешних и внутренних сил и принимаемые как истинные. Теория их определения базируется на аксиомах, которые приводят к теоретическим результатам, находящимися в согласии с наблюдаемыми экспериментальными фактами. Так их характеризующие тензоры первого и второго порядка считаются непрерывно дифференцируемыми достаточное число раз по координатам и по времени, следовательно, они ограничены вместе с их производными в области грунтовой среды. Для их определения необходимо обычно решать краевую задачу, содержащую систему геометрических, статических и физических уравнений при начальных и граничных условиях. Вначале без вывода приведем первые два типа этих уравнений. Они имеют место для любых сплошных деформируемых сред.

Геометрические уравнения. Под действием внешних сил элемент скелета непрерывной грунтовой среды, содержащей несжимаемую жидкость, перемещается и деформируется, как показано на рисунке 4.

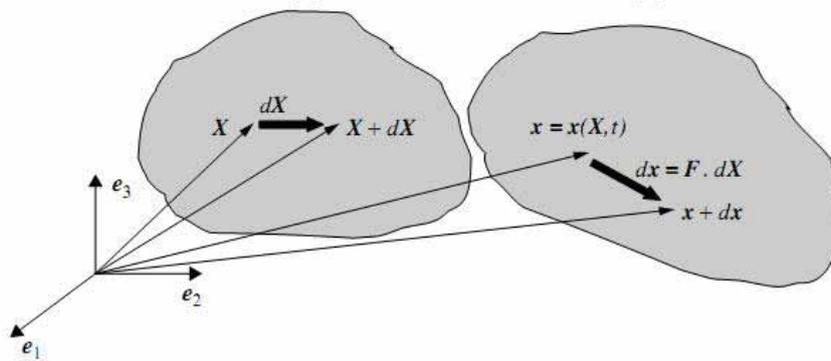


Рис. 4. Перемещение грунтовой среды

Для определения перемещений частиц скелета, в трехмерном евклидовом пространстве введена произвольная неподвижная прямоугольная система координат с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, которая не оказывает влияние на протекание физических явлений в грунтовой среде, и время t . В момент времени $t = 0$ положение такой частицы в исходной конфигурации грунтовой среды определяется вектором \mathbf{X} , а при $t > 0$ в текущей конфигурации она фиксируется вектором \mathbf{x} . Для сокращения записи используется индексное обозначение. Поэтому эти два вектора определяются в виде

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i ; \quad \mathbf{x} = x_i(X_j, t) \mathbf{e}_i , \quad (1)$$

где индексы i и j принимают значения 1, 2, 3. Индексы, повторяющиеся дважды в одном элементе выражения, означают суммирование по ним от 1 до 3. Индексы, повторяющиеся во всех элементах выражения, указывают на количество этих выражений.

В окрестности частицы \mathbf{X} исходной конфигурации, которая также принадлежит скелету, определяется бесконечно малый вектор приращения $d\mathbf{X}$, присоединенный к частице. В текущей конфигурации он становится вектором $d\mathbf{x}$, который определяется через вектор $d\mathbf{X}$ как

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \mathbf{e}_i, \quad (2 \text{ а})$$

что эквивалентно записи

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad (2 \text{ в})$$

где \mathbf{F} называют градиентом деформации.

Вектор dX определяется через вектор dx и, наоборот, по формулам

$$dX = F^{-1} \cdot dx; \quad dx = dX \cdot F'. \quad (3)$$

Обозначаем через $u(X, t)$ вектор перемещения частицы из исходной конфигурации X в текущую конфигурацию x . Тогда тензор конечной деформации Грина-Лагранжа находится как [1, 2]

$$\Delta = \frac{1}{2} (\nabla_X u + \nabla_X^t u + \nabla_X^t u \cdot \nabla_X u) \quad (4 \text{ а})$$

или в компонентной форме, которая удобна для вычислений, в виде

$$\Delta_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (4 \text{ в})$$

При решении многих задач механики грунтов достаточно считать деформации малыми. В этом случае вместо тензора деформации Грина-Лагранжа применяется линеаризованный тензор деформации [1, 2], который вычисляется по недеформируемой схеме склона и имеет следующий вид

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla^t u); \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5)$$

Введем обозначение $(\)_{,k} = \frac{\partial (\)}{\partial x_k}$. В этом случае вторую формулу из (5) можно записать более компактно как

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (5 \text{ а})$$

Полученные уравнения часто называют соотношениями Коши. Тензор деформаций записывается в компонентной форме в виде

$$T_\varepsilon = \varepsilon_{ij} e_i e_j, \quad [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ при $i \neq j$, т. е. этот тензор симметричный.

Вводится шестимерное пространство T_ε , в котором координаты точки равны компонентам тензора T_ε . Три компоненты ε_{ij} при $i \neq j$ в связи с симметрией $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ исключаются. Каждому тензору T_ε в

пространстве Π_{ε} можно сопоставить вектор $\mathbf{\varepsilon}$, компоненты которого образуют матрицу столбец

$$\mathbf{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{23} \ \varepsilon_{32}]^T. \quad (7)$$

Тензор деформаций представляется в виде суммы девиатора деформации $\mathbf{T}_{\varepsilon^*}$ и шарового тензора $\mathbf{T}_{\varepsilon_0}$. Его компоненты определяются как

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* + \varepsilon_0 \delta_{ij}, \quad (8)$$

где δ_{ks} – символ Кронекера, ε_{ij}^* – компоненты девиатора деформации,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Базисные инварианты тензора деформаций и девиатора деформаций записываются в виде

$$I_1(\mathbf{T}_{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii}, \quad I_2(\mathbf{T}_{\varepsilon}) = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}, \quad I_3(\mathbf{T}_{\varepsilon}) = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}; \quad (10)$$

$$I_1(\mathbf{T}_{\varepsilon^*}) = 0, \quad I_2(\mathbf{T}_{\varepsilon^*}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ji}^*, \quad I_3(\mathbf{T}_{\varepsilon^*}) = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{jk}^* \varepsilon_{ki}^*; \quad (11)$$

Комбинируя базисные инварианты, можно получить новую систему из трех независимых инвариантов, которые будут часто использоваться в последующем изложении:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} I_1(\mathbf{T}_{\varepsilon}), \quad \varepsilon_i = \sqrt{I_2(\mathbf{T}_{\varepsilon})},$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \arcsin\left(-\frac{3\sqrt{I_3(\mathbf{T}_{\varepsilon})}}{2(I_2(\mathbf{T}_{\varepsilon}))^{3/2}}\right), \quad -\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}. \quad (12)$$

Главные деформации определяются через (12) при условии $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_i \sin\left(\varphi + \frac{2}{3}\pi\right) + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_i \sin\varphi + \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_i \sin\left(\varphi + \frac{4}{3}\pi\right) + \varepsilon_0. \quad (13)$$

При приращении действующей нагрузки в грунтовой массе будут возникать приращения деформации $d\varepsilon_{ij}$ и приращения перемещения du_i . Соотношения Коши в приращениях будут определяться как

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i} \right). \quad (5 б)$$

Статические уравнения. Под действием внешних сил в каждой точке на гранях бесконечно малого элемента, вырезанного из грунтовой среды, возникают напряжения. Проекции их средних значений на оси координат с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ показаны на рисунке 5. На этом же рисунке изображен повернутый элементарный объем таким образом, что на его гранях действуют только главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Изменение напряжений в элементарном объеме называется процессом нагружения, а изменение его деформаций – процессом деформирования.

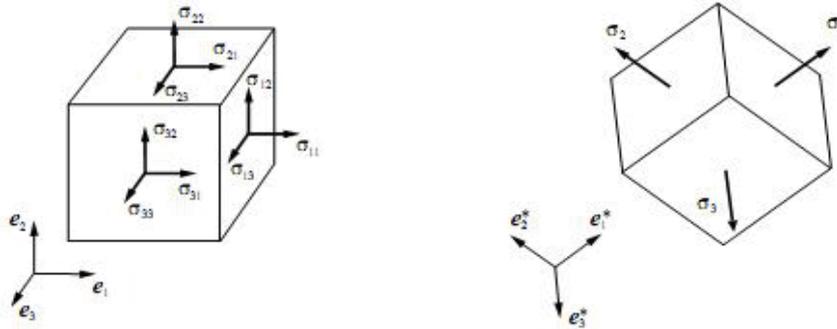


Рис. 5. Элементарный объем грунтовой среды

Тензор напряжений определяется в виде

$$\mathbf{T}_\sigma = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ при $i \neq j$, т. е. этот тензор также симметричный.

Тензору \mathbf{T}_σ можно сопоставить в шестимерном пространстве Π_σ следующий вектор напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{32}]. \quad (15)$$

Тензор напряжений \mathbf{T}_σ можно представить в виде суммы девиатора напряжений \mathbf{T}_s и шарового тензора \mathbf{T}_{σ_0} . В компонентной форме он определяется в виде

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}, \quad (16)$$

где δ_{ks} – символ Кронекера ($\delta_{ks} = 1$ при $k = s$ и $\delta_{ks} = 0$ при $k \neq s$), s_{ij} – компоненты девиатора напряжений

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Вводятся следующие базисные инварианты тензора напряжений и девиатора напряжений

$$J_1(\mathbf{T}_\sigma) = \sigma_{ii}, \quad J_2(\mathbf{T}_\sigma) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji}, \quad J_3(\mathbf{T}_\sigma) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}; \quad (18)$$

$$J_1(\mathbf{T}_s) = 0, \quad J_2(\mathbf{T}_s) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}, \quad J_3(\mathbf{T}_s) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{jk} s_{ki}. \quad (19)$$

Комбинируя базисные инварианты, можно получить новую систему из трех независимых инвариантов, которые будут часто использоваться в последующем изложении:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{3} J_1(\mathbf{T}_\sigma), \quad \sigma_i = \sqrt{J_2(\mathbf{T}_s)}, \\ \psi &= \left(-\frac{3\sqrt{3} J_3(\mathbf{T}_s)}{2(J_2(\mathbf{T}_s))^{3/2}} \right), \quad -\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{\pi}{6}. \end{aligned} \quad (20)$$

Эти инварианты имеют ясный физический смысл. Так, первый инвариант σ_0 характеризует среднее нормальное напряжение. Второй инвариант σ_i представляет интенсивность касательных напряжений, и он с точностью до постоянного множителя совпадает со средним касательным напряжением $\tau_i = 0,633\sigma_i$. Третий инвариант ψ определяет вид напряженного состояния.

Через инварианты (20) главные напряжения определяются при условии $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \sin\left(\psi + \frac{2}{3} \pi\right) + \sigma_0, & \sigma_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \sin \psi + \sigma_0, \\ \sigma_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \sin\left(\psi + \frac{2}{3} \pi\right) + \sigma_0.\end{aligned}\tag{21}$$

Рассматривая равновесие элементарного объема, и проектируя на оси координат все действующие на него силы, получаем три уравнения равновесия, которые в компактной форме имеют следующий вид [1, 2]:

$$\sigma_{ij,i} + Q_j = 0.\tag{22}$$

Здесь все индексы принимают значения от 1 до 3, но индекс j указывает на номер уравнения (их три), а по индексу i идет суммирование первого слагаемого из (22) (в каждом уравнении этих слагаемых тоже три).

Также из условий равновесия элементарного объема в виде тетраэдра получаем уравнения равновесия на поверхности S_q , на которой действует нагрузка q . Они имеют в компонентной форме следующий вид [1, 2]:

$$\sigma_{ij} n_i - q_j = 0,\tag{23}$$

где n_i проекции на оси координат нормали к поверхности S_q . Индексы i и j выполняют такое же назначение, что и в предыдущей формуле.

В приращениях напряжений $d\sigma_{ij}$ и приращениях нагрузок dQ_i , dq_i уравнения равновесия записываются как

$$d\sigma_{ij,i} + dQ_j = 0,\tag{22 a}$$

$$d\sigma_{ij} n_i - dq_j = 0.\tag{23 a}$$

Уравнения состояния. Эти уравнения устанавливают связь между напряжениями и деформациями или их приращениями и совместно со статическими и кинематическими уравнениями образуют замкнутую систему, решая которую можно определить напряженно-деформированное состояние в любой частице грунтового массива. При упругопластическом деформировании грунтов в них могут возникать как упругие, так и пластические деформации. Для них принимается, что результат деформирования не зависит от скорости процесса нагружения в данное напряженное состояние. Если деформации малы, то выполняется постулат суммирования [2], который позволяет общие деформации и их приращения разде-

лить на упругие и пластические составляющие. Его можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(p)}, \quad (24)$$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{(e)} + d\varepsilon_{ij}^{(p)}. \quad (25)$$

Здесь индекс (e) относится к упругим деформациям, а индекс (p) – к пластическим.

Упругие деформации или их приращения определяются по формулам

$$\varepsilon_{ij}^{(e)} = C_{ijks}^{(e)} \sigma_{ks}, \quad (26)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{(e)} = C_{ijks}^{(e)} d\sigma_{ks}. \quad (27)$$

Результат деформирования упругого тела полностью определяется результатом нагружения и не зависит от вида и скорости процесса нагружения. Так при любых траекториях нагружения, приводящих в одно и тоже напряженное состояние, результирующая деформация будет одинаковой. Для пластических тел это свойство не выполняется. Пластическое поведение грунтовых сред можно описать, если определены следующие три понятия. Первое – условие начала пластического течения. Второе – закон течения, связывающий приращение пластической деформации с напряжениями и их приращениями. Третье – закон упрочнения, устанавливающий изменение течения, начиная с некоторого пластического состояния.

Одним из основных положений теории течения упругопластических сред, вытекающих из этих условий, является существование в пространстве напряжений кусочно-гладкой поверхности, заданной уравнением [6, 7]

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{(p)}, \chi_m, d_m) = 0, \quad (28)$$

которая разделяет области упругости при $f < 0$ и пластичности при $f = 0$. Данная поверхность может меняться от точки к точке грунта. Если в соотношении (28) параметры упрочнения χ_m и пластические деформации $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ равны нулю, то это соотношение будет зависеть только от напряжений σ_{ij} и параметров d_m , характеризующих механические свойства

деформируемой среды. В этом случае $f_0(\sigma_{ij}, d_m)$ называется функцией текучести, а $f_0(\sigma_{ij}, d_m) = 0$ является условием начала пластического течения и называется поверхностью текучести. Такая модель грунта без упрочнения, называемая идеальной пластичностью, фиксирует только два его состояния: 1) допредельное, когда грунт деформируется только упруго и пластические деформации не возникают; 2) предельное, когда деформирование сопровождается безграничным накоплением пластических деформаций и грунт разрушается. В этом случае функция текучести и упругая область не зависят от истории нагружения элемента.

Для упрочняющихся материалов поверхность, представленная уравнением (28), может изменяться при изменении напряженного состояния. В этом случае она называется поверхностью нагружения, а f – функцией нагружения. Если в каждой точке этой поверхности функция нагружения дифференцируема по σ_{ij} , то она имеет в каждой из них единственную нормаль и называется регулярной. Для такой точки введем три понятия: разгрузка (пассивное нагружение), нейтральное нагружение и активное нагружение.

Пусть некоторое напряженное состояние соответствует точке нагружения, расположенной на регулярной поверхности (28). От действия последующего приращения нагрузки произошло изменение этого состояния, которое определяется одним из следующих условий:

$$1) \quad df < 0; \quad d'f < 0; \quad f = 0 \quad \text{или} \quad f < 0, \quad (29)$$

что соответствует разгрузке, когда $\chi_m = 0$, $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = 0$;

$$2) \quad df = 0, \quad d'f = 0, \quad f = 0, \quad (30)$$

что соответствует нейтральному нагружению, когда $\chi_m = 0$, $de_{ks}^{(p)} = 0$;

$$3) \quad df = 0, \quad d'f > 0, \quad f = 0, \quad (31)$$

этот случай соответствует процессу активного нагружения, когда $\chi_m \neq 0$, $d\varepsilon_{ij}^{(p)} \neq 0$, т. е. возникают необратимые деформации.

Сингулярные точки нагружения рассмотрены в [1, 7].

Закон течения основан на принципе максимума Мизеса или на постулате Драккера. В [2] показано, что постулат Драккера накладывает более жесткие ограничения на свойства материала, чем принцип максимума, который для гладкой функции нагружения можно представить как

$$\left(\sigma_{KS} - \sigma_{KS}^*\right) \varepsilon_{KS}^p \geq 0, \quad (32)$$

$$\left(\sigma_{KS} - \sigma_{KS}^*\right) d\varepsilon_{KS}^p \geq 0, \quad (33)$$

Из этих неравенств следует два положения: 1) поверхность нагружения для любого напряженного состояния σ не может быть вогнутой; 2) вектор приращения пластической деформации $d\varepsilon^p$ в регулярной точке поверхности нагружения должен быть направлен по ее внешней нормали n .

Материал, для которого выполняется следующее неравенство, называется устойчивым

$$d\sigma_{KS} d\varepsilon_{KS}^p \geq 0. \quad (34)$$

Приращения пластических деформаций на основании принципа максимума Мизеса [2] записываются в окрестности регулярной точки функции нагружения f в виде

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = d\lambda f_{,\sigma_{ij}} \quad (35)$$

где $d\lambda = const > 0$, $f_{,\sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$. Постоянная $d\lambda$ находится из условия непрерывного изменения поверхности нагружения, что соответствует уравнению $df = 0$

$$d\lambda = h^{-1} d'f, \quad (36)$$

где h — функция упрочнения, которая определяется как

$$h = - \frac{(f_{,\varepsilon_{nm}^p} f_{,\sigma_{nm}}) f_{,\sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{f_{,\sigma_{KS}} d\sigma_{KS} + f_{,\chi_K} d\chi_K}. \quad (37)$$

Подставляя (36) в (35), после преобразований находим

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = C_{ijmn}^{(p)} d\sigma_{mn}, \quad (38)$$

$$C_{ijmn}^{(p)} = h^{-1} f_{,\sigma_{ij}} f_{,\sigma_{mn}}. \quad (39)$$

В монографии [8] на конкретных примерах показано, что теория пластического течения без упрочнения для грунтов не подтверждается результатами экспериментальных исследований, поэтому не рекомендуется ее использовать в расчетах по следующим двум основным причинам:

1. Она неверно прогнозирует объемные деформации, что в некоторых случаях приводит к отрицательным поровым давлениям.

2. В допредельном по прочности состоянии она учитывает только упругие деформации и не в состоянии учесть накопление существенных пластических деформаций.

Среди множества рассмотренных к настоящему времени законов упрочнения можно выделить два основных типа: изотропное и анизотропное упрочнение. В случае изотропного упрочнения грунтовая среда должна сохранять свойство изотропии в течение всего процесса пластического деформирования, а функции нагружения остаются инвариантными относительно преобразования системы координат. При активном нагружении происходит расширение поверхности нагружения. В [2] доказано, что модель изотропного упрочнения принадлежит к неустойчивым процессам пластического деформирования и для материалов, обладающих таким свойством, не выполняется основное неравенство устойчивости грунта (34). Также при изотропном упрочнении не учитывается эффект анизотропии, возникающий при пластическом течении, и эффект Баушингера, который проявляется при циклическом и динамическом нагружении. По теории течения с изотропным упрочнением получаются удовлетворительные результаты решения только при путях нагружения близких к простым.

Простейший вариант теории анизотропного упрочнения – кинематическое упрочнение, предложенное В. Прагером [9], В.В. Новожиловым и Ю.И. Кадашевичем [10], устанавливает, что при пластическом деформировании поверхность нагружения перемещается в пространстве напряжений, как абсолютно твердое тело, сохраняя размеры, форму и ориентацию первоначальной поверхности текучести. Если перемещение центра поверхности текучести обозначить через вектор ρ (компоненты ρ_{ks}), то функцию нагружения можно представить в следующем виде:

$$f(\sigma_{ks} - \rho_{ks}) = 0, \quad (40)$$

где ρ_{ks} называется также тензором остаточных микронапряжений, а

$$\sigma_{ks}^{\circ} = \sigma_{ks} - \rho_{ks} \quad (41)$$

тензором активных напряжений.

Тензор ρ_{ks} равен нулю до момента появления первых пластических деформаций, остается постоянным при нейтральном нагружении и изменяется при активном нагружении. Его можно представить как

$$\rho_{ks} = a_{ksnm} \varepsilon_{nm}^p, \quad (42)$$

$$\rho_{ks} = a \varepsilon_{ks}^p, \quad (43)$$

где a – постоянная величина, определяемая из эксперимента.

В работе [10] предложено принимать вместо тензора a_{ksnm} функцию инвариантов ρ_{ks} . В этом случае поверхность нагружения не только перемещается в пространстве напряжений, но и расширяется, сохраняя свою форму. Это позволяет получать результаты, хорошо согласующие с экспериментальными данными.

Обращая формулы (27) и (34), получим уравнения состояния в виде

$$d\sigma_{ij} = D_{ijnm}^{(ep)} d\varepsilon_{nm} \quad \text{если } f = 0, df' > 0;$$

$$d\sigma_{ij} = D_{ijnm}^{(e)} d\varepsilon_{nm} \quad \text{если } f = 0, df' \leq 0 \text{ или } f < 0, \quad (44)$$

где $D_{ijnm}^{(ep)}$ определено при изотропном упрочнении как [1]

$$D_{ijnm}^{(ep)} = D_{ijnm}^{(e)} - \frac{f_{,\sigma_{ij}} D_{ijnm}^{(e)} f_{,\sigma_{nm}} D_{ijnm}^{(e)}}{f_{,\sigma_{ij}} D_{ijnm}^{(e)} f_{,\sigma_{nm}} - f_{,\chi} \sigma_{ks} f_{,\sigma_{ks}}}. \quad (45)$$

При кинематическом упрочнении уравнения состояния имеют также вид (44), но в уравнении (45) вместо подчеркнутого выражения необходимо поставить $f_{,\rho_{nm}} \rho_{nm} \underset{\varepsilon_{ks}}{f_{,\sigma_{ks}}}$ [1].

При идеальной пластичности, когда $f_0(\sigma_{ij}, d_m) = 0$ и $d'f \leq 0$, пластические деформации возникают только при нейтральном нагружении или при неподвижном векторе напряжений, который касается поверхности текучести. В этом случае из неравенства (32) можно определить или только ограничить направление вектора приращения пластических деформаций. Его величина, как следует из (36) и (37), оказывается неопределенной. Поэтому в идеальной пластичности удобнее работать не с приращениями деформаций, а со скоростями.

Идеально пластические тела способны пластически деформироваться при постоянных напряжениях. Но для них задание процесса нагружения не может определять процесс деформирования. Поэтому представляет интерес определения идеально пластических тел на основе задания функции деформирования [2].

Рассмотрим в качестве функции нагружения условие Кулона-Мора, которое широко используется для грунтовых сред. В главных напряжениях оно имеет следующий вид:

$$\sigma_1 - \chi \sigma_2 - \sigma_p = 0, \quad (46)$$

где $\chi = \sigma_p / \sigma_c$; σ_p , σ_c – предельное состояние материала при растяжении и сжатии.

По этому условию пластическое состояние наступает либо при достижении касательными напряжениями некоторой критической величины, зависящей от нормальных напряжений, действующих по тем же плоскостям скольжения, либо при достижении наибольшими нормальными напряжениями предельного значения. Если воспользоваться преобразованиями от σ_p, σ_c к φ, c , которые приведены в [11] и имеют вид

$$\sigma_p = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \sigma_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \chi = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad (47)$$

где φ – угол внутреннего трения, c – сцепление, то используя формулу (21), после преобразований из (46) получаем соотношение

$$\left(\sigma_o - \frac{\bar{\sigma} \sin \psi}{\sqrt{3}} \right) \sin \varphi + \bar{\sigma} \cos \psi - c \cos \varphi = 0, \quad (48)$$

которое часто используется в механике грунтов.

При выполнении равенства $\sigma_T = \sigma_p = \sigma_c$, из (46) находим

$$\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_T = 0, \quad (49)$$

а из (48) соответственно получаем

$$2 \bar{\sigma} \cos \psi - \sigma_T = 0. \quad (50)$$

Это соотношение определяет условие Треска-Сен-Венана, которое часто применяется к металлам, сплавам и связанным грунтам, например, глинам.

Соотношения (46) и (48) представляют функции текучести грунтов, которые фиксируют их начальную текучесть и применимы для неупрочняющихся (идеальнопластичных) их представителей. В этом случае величина напряжений σ_p и σ_c не изменяются. Если некоторые грунты при определенных условиях их нагружения удовлетворяют закону изотропного упрочнения, то при неоднократном нагружении и разгрузке величины σ_p и σ_c должны изменяться, или считая их постоянными, необходимо добавить к левым частям уравнений некоторую функцию, учитывающую упрочнение грунтов в процессе их упругопластического деформирования. Полученная таким образом новая функция и будет называться функцией нагружения. В этом простейшем случае функцию упрочнения можно представить в виде

$$h(\chi_i) = H' d\varepsilon^p, \quad (51)$$

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{E_T}{1 - E_T/E}, \quad (52)$$

$$d\varepsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_{ks}^p \varepsilon_{ks}^p. \quad (53)$$

При кинематическом упрощении необходимо в уравнении (48) вместо инвариантов $\sigma_{\circ}, \bar{\sigma}, \psi$ подставить инварианты $\sigma_{\circ}^{\circ}, \bar{\sigma}^{\circ}, \psi^{\circ}$, которые определяются по формулам (41) при замене напряжений σ_{KS} на напряжения σ_{KS}° .

Определим производные от функции нагружения, которые входят в уравнения состояния. Первая производная $f_{,\sigma_{KS}}$ находится по правилу дифференцирования сложной функции как

$$f_{,\sigma_{KS}} = f_{,\sigma_{\circ}} \sigma_{\circ,\sigma_{KS}} + f_{,\bar{\sigma}} \bar{\sigma}_{,\sigma_{KS}} + f_{,\psi} \psi_{,\sigma_{KS}}. \quad (54)$$

После трудоемких преобразований получаем

$$\begin{aligned} f_{,\sigma_{\circ}} &= \sin \varphi, \\ f_{,\bar{\sigma}} &= \left[(1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} 3\psi) - \frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} (\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} 3\psi) \right] \cos \psi, \\ f_{,\psi} &= \frac{\sqrt{3} \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi}{2 \sigma^2 \cos \psi}. \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\circ,\sigma_{KS}} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, & \bar{\sigma}_{,\sigma_{KS}} &= \frac{1}{2\sigma} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{\circ} \\ \sigma_{22} - \sigma_{\circ} \\ \sigma_{33} - \sigma_{\circ} \\ 2\sigma_{12} \\ 2\sigma_{23} \\ 2\sigma_{13} \end{Bmatrix}, \\ \psi_{,\sigma_{KS}} &= -3 \begin{Bmatrix} (\sigma_{22} - \sigma_{\circ})(\sigma_{33} - \sigma_{\circ}) - \sigma_{23}^2 \\ (\sigma_{11} - \sigma_{\circ})(\sigma_{33} - \sigma_{\circ}) - \sigma_{13}^2 \\ (\sigma_{11} - \sigma_{\circ})(\sigma_{22} - \sigma_{\circ}) - \sigma_{12}^2 \\ 2[\sigma_{13}\sigma_{23} - (\sigma_{33} - \sigma_{\circ})\sigma_{12}] \\ 2[\sigma_{12}\sigma_{13} - (\sigma_{11} - \sigma_{\circ})\sigma_{23}] \\ 2[\sigma_{12}\sigma_{23} - (\sigma_{22} - \sigma_{\circ})\sigma_{13}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sigma^2}. \end{aligned} \quad (56)$$

В этой формуле производные от инвариантов тензора напряжений будут для всех функций текучести и нагружения равны. Меняются только производные от этих функций по инвариантам тензора напряжений.

При кинематическом упрочнении производную от функции нагружения по переменным σ_{KS} можно записать в виде

$$f_{,\sigma_{KS}} = f_{,\sigma_{KS}^{\circ}} \sigma_{KS,\sigma_{KS}}^{\circ}. \quad (57)$$

Применяя формулы (41) и (43), находим

$$f_{,\sigma_{KS}} = f_{,\sigma_{KS}^{\circ}}. \quad (58)$$

Следовательно, если записать приведенные выше инварианты через σ_{KS}° , то в формулах для производных, которые определяют $f_{,\sigma_{KS}}$, необходимо произвести замену σ_{KS} на σ_{KS}° , и преобразованные таким образом эти формулы будут определять $f_{,\sigma_{KS}^{\circ}}$, а на основании (58) и $f_{,\sigma_{KS}}$.

Для вязкопластических материалов при кинематическом упрочнении можно в качестве компонент тензора ρ_{KS} использовать следующее соотношение:

$$\rho_{KS} = a \exp(-t/c) \varepsilon_{KS}^p, \quad (59)$$

где t – время; $c = \eta/a$ – время релаксации; η – коэффициент вязкости.

Грунты и некоторые другие среды обладают при пластическом деформировании сжимаемостью не только от формоизменения, но и от всестороннего сжатия. В этом случае можно допустить, что в пластическом состоянии определена дополнительная связь между первыми инвариантами тензора напряжений σ и тензора пластической деформации ε^p в виде

$$\varepsilon_{\circ}^p = f_{\circ}(\sigma_{\circ}). \quad (60)$$

Дифференциал этого соотношения равен

$$d\varepsilon_{\circ}^p = f_{\circ,\sigma_{\circ}} d\sigma_{\circ}. \quad (61)$$

Определенный таким образом новый закон пластического течения от всестороннего сжатия является независимым от закона (28). Его можно рассматривать как ассоциированный с функцией нагружения

$$f_l = f_{\circ} - \varepsilon_{\circ}^p = 0. \quad (62)$$

Соотношение (62) геометрически представляет собой поверхность в виде крышечки, ограничивающей неограниченную область, представ-

ляемую условием (48). Поверхности $f = 0$ и $f_l = 0$ будут ограничивать область упругого состояния среды, как представлено на рисунке 6, и в каждой, лежащей на одной из них точке, включая области пересечения, имеет место соотношение

$$d\varepsilon_{\circ}^p = f_{,\sigma_{\circ}} \sigma_{\circ,\sigma_{\circ}} + f_{,\sigma_{\circ}} d\sigma_{\circ}. \quad (63)$$

Некоторые из функций $f_{\circ}(\sigma_{\circ})$ приведены в [12]. Например, С.С. Григорян для грунтов предложил следующее соотношение:

$$e^p = \varepsilon_s [1 - \exp(-v\sigma_{\circ})], \quad (64)$$

из которого можно определить

$$d\varepsilon_{\circ}^p = v\varepsilon_s \exp(-v\sigma_{\circ}) d\sigma_{\circ}. \quad (65)$$

Для дробно-линейной зависимости

$$\varepsilon_{\circ}^p = \frac{\sigma_{\circ} \varepsilon_s}{\sigma_{\circ} + K_{\circ} \varepsilon_s} \quad (66)$$

получаем

$$d\varepsilon_{\circ}^p = \frac{K_{\circ} \varepsilon_s^2}{(\sigma_{\circ} + K_{\circ} \varepsilon_s)^2} d\sigma_{\circ}. \quad (67)$$

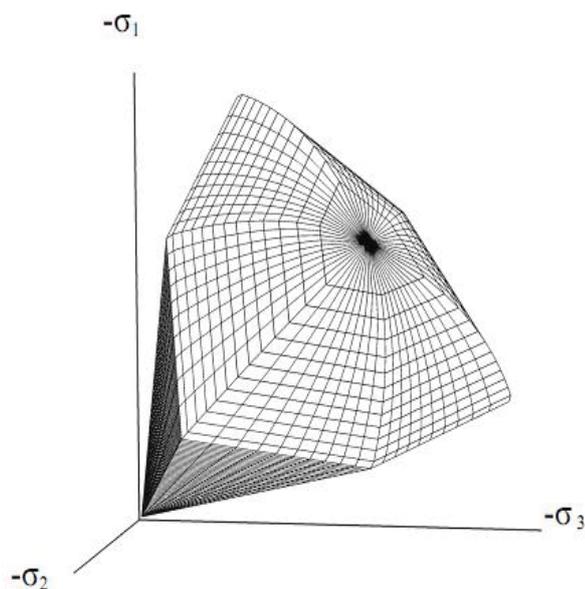


Рис. 6. Графическое изображение условия Кулона-Мора с учетом всестороннего сжатия при $c = 0$

Здесь ε_s – предельное значение объемной деформации при $\sigma_0 \rightarrow \infty$, т.е., когда материал приобретает предельную плотность;

K_0 – модуль объемного деформирования.

Пусть для некоторой материальной частицы среды определено напряжено-деформированное состояние, которое соответствует некоторой точке A на поверхности нагружения $f = 0$. В этом случае происходит разрыхление среды, при котором давление σ_0 , определяемое функцией $f_0(\sigma_0)$, уменьшается. В связи с этим, поверхность нагружения $f_i = 0$ начинает перемещаться в направлении точки A . При ее достижении следует определять пластическое деформирование с учетом всестороннего сжатия и формоизменения. В этом состоянии дальнейшее разрыхление материала происходить не может, так как оно привело бы к снижению сопротивления среды объемному давлению, что невозможно, так как для точки A $\sigma_0 = const$. Поэтому приращение пластической объемной деформации в данном положении функций нагружения f и f_i , будет равно нулю и, следовательно, $\varepsilon_0^p = const$. При нагружении происходит следующая дилатансионная зависимость между ε_0 и $\bar{\varepsilon}$. С увеличением $\bar{\varepsilon}$ увеличивается ε_0 до значения пока f и f_i не пересекутся в точке A . При дальнейшем увеличении $\bar{\varepsilon}$, величина ε_0 остается постоянной. В момент пересечения f и f_i , в точке A вектор приращения пластической деформации не ортогонален поверхности нагружения $f = 0$.

В настоящее время в общей постановке отсутствуют доказательства существования и единственности решения упругопластических задач. Некоторые частные теоремы единственности решения и экстремальные принципы в теории пластического течения приведены в [6, 7]. Например, для идеально пластического грунта распределение скоростей деформации не обязательно единственно. Напряженное состояние грунта единственно, если задана вся история его нагружения, начиная от естественного состояния и кончая конечными значениями действующей нагрузки и перемещений, или при заданном распределении в грунте пластических деформаций.

Итак, для склонов из трех этапов математического моделирования был рассмотрен только первый: модель. Остальные два этапа: алгоритм и программа будут исследованы в следующей статье.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гришин В.А., Дорофеев В.С. *Некоторые модели грунтовой среды*. – Одесса: Внешрекламсервис, 2007. – 310 с.
2. Болдырев Г.Г. *Методы определения механических свойств грунтов. Состояние вопроса*. – Пенза: ПГУАС, 2008. – 696 с.

3. *Введение в математическое моделирование: Учебн. пособие / Под ред. П.В.Трусова. – М.: Логос, 2005. – 440 с.*
4. *Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.*
5. *Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.*
6. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М.: Наука, 1971. – 232 с.*
7. *Койтер В. Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. – М.: Изд. иностр. лит., 1981. – 80 с.*
8. *Зарецкий Ю. К. Лекции по современной механике грунтов. – Ростов: Изд. Ростовского университета, 1989. – 608 с.*
9. *Прагер В. Проблемы теории пластичности. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 136 с.*
10. *Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 223 с.*
11. *Флорин В.А. Основы механики грунтов. –Т. 1. – Л.-М.: Стройиздат, 1959. – 357 с.*
12. *Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. – М.: Высшая школа, 1978. – 311 с.*

Стаття надійшла до редакції 12.11.2013

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор, генеральний директор
Морського інженерного бюро **Г.В. Єгоров**

доктор технічних наук, професор, науковий консультант
Морського інженерного бюро **В.В. Козляков**