

УДК 69.05:658.-62:728.1

В.А. Гришин, А.В. Гришин

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СКЛОНОВ (2)

*Рассматривается применение математического моделирования к проблеме нелинейного деформирования склонов.*

**Ключевые слова:** математическое моделирование, напряжения, деформации, склоны, пластичность, оползни, алгоритм, программа.

*Розглядається застосування математичного моделювання до проблеми нелінійного деформування схилів.*

**Ключові слова:** математичне моделювання, напруги, деформації, схили, пластичність, зсуви, алгоритм, програма.

*Application of mathematical modelling to a problem of nonlinear deformation of slopes is considered.*

**Keywords:** mathematical modelling, pressure, deformations, slopes, plastic properties, landslips, algorithm, the program

*Современные электронные вычислительные машины дали в руки исследователей эффективное средство для математического моделирования сложных задач науки и техники. Именно поэтому количественные методы исследования в настоящее время проникают практически во все сферы человеческой деятельности, а математические модели становятся средством познания.*

**Г.И. Марчук <<Методы вычислительной математики>>**



Данная статья является продолжением работы [1], в которой исследован первый этап математического моделирования склонов: модель и приведены основные уравнения. Здесь будут разработаны оставшиеся два этапа: алгоритм – программа и введено понятие обобщенного решения. Одним из основных его преимуществ является понижение порядка производных, входящих в исходные уравнения, что позволяет расширить класс функций, в котором определяется решение. Это вызвано, например, реальным представлением действующей нагрузки и механических параметров грунтов склона в виде разрывных функций.

При решении упругопластических задач численными методами необходимо реализовать две проблемы: 1) дискретизацию области, занимаемой склоном, и исходных уравнений; 2) построение итерационного процесса для определения искомым функций, характеризующих напряженно-деформированное состояние склона, с наперед заданной точностью.

Решение первой проблемы позволяет представить рассматриваемую задачу в алгебраической форме, т.е. перейти от бесконечного числа степеней свободы склона к конечному числу. Ее можно реализовать, используя различные проекционные методы, например, методом взвешенных невязок. Решение второй проблемы дает возможность произвести линеаризацию исходных нелинейных уравнений. При этом, операцию по корректировке их коэффициентов можно выполнять на каждой итерации решения (метод переменных параметров упругости, метод касательной жидкости) или только на первой итерации, или через их заданное количество (модификации метода Ньютона-Канторовича, к которым относится метод упругих решений и метод начальных напряжений). Обзоры по этим методам решения содержатся в многих работах, например, [2, 3, 4, 5, 6].

Для дискретизации уравнений и области склона здесь будет использоваться метод конечных элементов (МКЭ). Его достоинства и недостатки подробно изложены в многочисленных работах [2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Одно из основных преимуществ этого метода состоит в том, что он позволяет использовать функции, аппроксимирующие обобщенное решение, с областью определения в пределах каждого конечного элемента, а также дает возможность получать матрицу жесткости симметричной и ленточной, что делает метод очень эффективным с точки зрения затрат времени счета. Таким преимуществом не обладают в классической постановке методы Бубнова-Галеркина и вариационные. Далее, метод конечных элементов позволяет также сравнительно просто аппроксимировать граничные условия, что вызывает серьезные затруднения в конечно-разностных и вариационно-разностных методах. К другим преимуществам МКЭ относятся его простота, универсальность и ясность физической интерпретации.

Ограничиваем склон конечной областью, на границе которой принимаем перемещения равными нулю. В этой области, например, при плоской деформации ее аппроксимация выполнялась изопараметрическими

четырёхугольниками с 4-мя, 8-ю и 9-ю узлами. Они показаны на рис. 1. При такой дискретизации искомые величины определяются в узлах элементов. Их значения в других точках области склона вычисляются с использованием функций формы, вид которых зависит от типа элементов. Функции формы в локальной системе координат  $\eta_i$ , в которой выполняется неравенство  $-1 \leq \eta_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ , для восьмиузловых элементов имеют следующий вид:

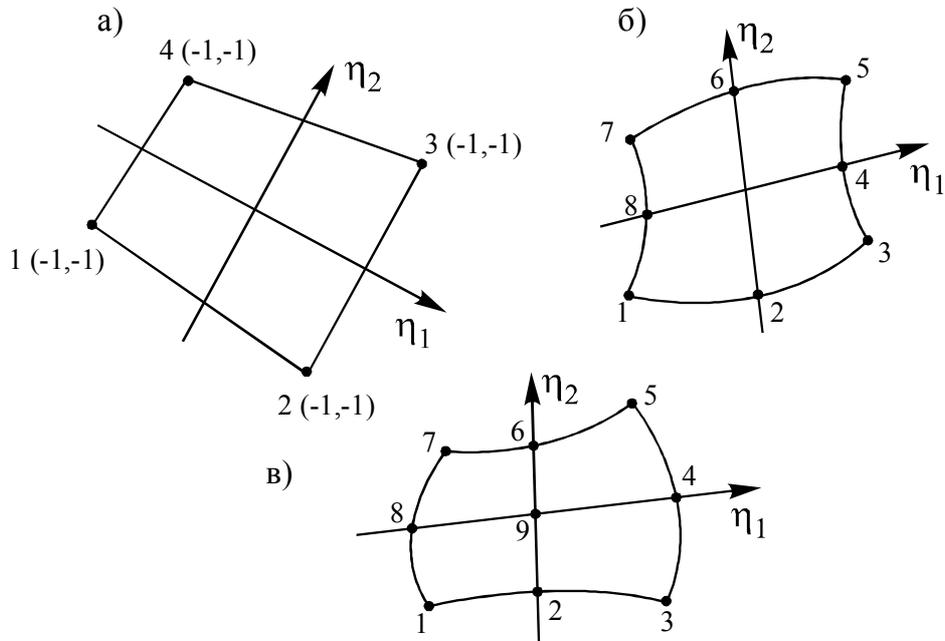


Рис. 1. Плоские конечные элементы

$$N_{(e)}^m(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \eta_1 \eta_1^m)(1 + \eta_2 \eta_2^m)(\eta_1 \eta_1^m + \eta_2 \eta_2^m - 1), \quad m = 1, 3, 5, 7;$$

$$N_{(e)}^m(\eta) = \frac{1}{2}(\eta_1^m)^2(1 + \eta_1 \eta_1^m)(1 - \eta_2^2) - \frac{1}{2}(\eta_2^m)^2(1 + \eta_2 \eta_2^m) \cdot (1 - \eta_1^2), \quad m = 2, 4, 6, 8. \quad (1)$$

Каждой совокупности локальных координат  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2$  в соотношениях (1) сопоставляется одна и только одна совокупность глобальных координат его узлов по формуле

$$x_{\kappa(e)} = x_{\kappa(e)}^m N_{(e)}^m(\eta), \quad \kappa = 1, 2; \quad m = 1, 2, \dots, m_e, \quad (2)$$

где  $x_{\kappa(e)}$  – глобальные координаты узлов элемента  $r_{(e)}$ .

Используя правило дифференцирования сложных функций, можно установить связь между производными от функции формы по координатам  $x_\kappa$  и производными от  $x_\kappa$  по координатам  $\eta_s$  в виде

$$N_{(e),\eta_\kappa}^m = N_{(e),x_s}^m x_{s,\eta_\kappa}, \quad \kappa, s = 1, 2. \quad (3)$$

Матрица Якоби и обратная ей матрица определяются по формулам

$$\mathbf{J}_{(e)} = \begin{bmatrix} x_{s,\eta_\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{(e)}^m & x_{s,\eta_\kappa}^m \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$$[\mathbf{J}_{(e)}]^{-1} = [\eta_{s,x_\kappa}] \quad (5)$$

где обозначено

$$x_{s,\eta_\kappa} = \frac{\partial x_s}{\partial \eta_\kappa}, \quad \eta_{s,x_\kappa} = \frac{\partial \eta_s}{\partial x_\kappa}, \quad (6)$$

$$N_{(e),\eta_\kappa}^m = \frac{\partial N_{(e)}^m}{\partial \eta_\kappa}, \quad N_{(e),x_\kappa}^m = \frac{\partial N_{(e)}^m}{\partial x_\kappa}.$$

Производные от функции формы  $N_{(e)}^m(\eta)$  по глобальным координатам  $x_\kappa$  вычисляются как

$$N_{(e),x_\kappa}^m = N_{(e),\eta_s}^m \eta_{s,x_\kappa} = N_{(e),\eta_s}^m [\mathbf{J}_{(e)}]^{-1}. \quad (7)$$

В области склона, которую необходимо представить в виде связанных конечных элементов, фиксируем некоторое конечное число точек, равное  $M$ . Их обозначаем как  $x^\Delta$  ( $\Delta=1, 2, \dots, M$ ) и называем глобальными узлами. Затем, по этим узлам строим конечные элементы, количество которых будет равно  $M_e$ . В каждый элемент входит  $m_e$  глобальных узлов, которые обозначим как  $x_{(e)}^\kappa$ ,  $\kappa=1, 2, \dots, m_e$  и называем локальными узлами элемента. Вводим отображение

$$x^\Delta = \bigwedge_{\Delta}^{(e)} x_{(e)}^\kappa, \quad \kappa=1, 2, \dots, m_e, \quad (8)$$

которое вкладывает некоторый конечный элемент в область, занимаемую склоном.

При этом,  $\Lambda_{\Delta}^{(e)\kappa} = 1$ , если глобальный узел тела совпадает с локальным узлом  $\kappa$  элемента  $r_{(e)}$ , и  $\Lambda_{\Delta}^{(e)\kappa} = 0$  в противном случае. Совокупность отображений  $\Lambda = \left\{ \Lambda_{\Delta}^{(1)}, \Lambda_{\Delta}^{(2)}, \dots, \Lambda_{\Delta}^{(M_e)} \right\}$  связывает  $M_e$  элементов в дискретную модель тела, которую обозначаем через  $\overset{\circ}{V}_e$ . Необходимым и достаточным условием существования совокупности отображений  $\Lambda_{\Delta}^{(e)m}$ , которые обеспечивают возможность подгонять элементы друг к другу таким образом, чтобы они образовали область  $\overset{\circ}{V}_e$ , является условия совместности, приведенное в работах [6, 8].

Обратная совокупность отображений  $\Omega = \left\{ \Omega_{\Delta}^{(1)}, \Omega_{\Delta}^{(2)}, \dots, \Omega_{\Delta}^{(M_e)} \right\}$  осуществляет разбиение области  $\overset{\circ}{V}_e$  на конечные элементы. Для элемента  $r_{(e)}$

$$\mathbf{x} = \Omega_{\Delta}^{(e)\kappa} \mathbf{x}^{\Delta}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, m_e, \quad (9)$$

где  $\Omega_{\Delta}^{(e)\kappa} = 1$ , если узел  $\kappa$  элемента  $r_{(e)}$  совпадает с узлом  $\Delta$  области  $\overset{\circ}{V}_e$  и  $\Omega_{\Delta}^{(e)\kappa} = 0$  – в противном случае.

Вектор-функция приращения перемещения  $du(\mathbf{x})$  в глобальном узле  $\mathbf{x}^{\Delta}$  обозначим через  $du^{\Delta} = du(\mathbf{x}^{\Delta})$ . Величину  $du^{\Delta}$  называем глобальными значениями  $du(\mathbf{x})$  в узлах области  $\overset{\circ}{V}_e$ .

Каждый конечный элемент  $r_{(e)}$  считается областью определения некоторой локальной вектор-функции  $du_{(e)}$  того же класса, что и  $du$ . Значения  $du_{(e)}$  в локальном узле  $\mathbf{x}_{(e)}^{\kappa}$  элемента  $r_{(e)}$  обозначаем через  $d\delta_{(e)}^{\kappa}$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots, m_e$  и называем локальным значением функции  $du_{(e)}$  в элементе  $r_{(e)}$ .

Аппроксимируем  $du_{(e)}$  на элементе  $r_{(e)}$  непрерывными функциями, линейно зависящими от  $d\delta_{(e)}^k$ , в виде

$$du_{(e)} = N_{(e)}^k d\delta_{(e)}^k, \quad du_{(e)} = (du_1, du_2)^T, \quad (10)$$

где функции формы  $N_e$  в узлах элемента  $x_{(e)}^k$  удовлетворяют условию

$$N_{(e)}^n(x_{(e)}^k) = \delta_{kn}, \quad n, k = 1, 2, \dots, m_e. \quad (11)$$

где  $\delta_{kn}$  – символ Кронекера.

Конечно-элементная модель вектор-функции  $du(x)$  определяется путем связывания всех узлов конечных элементов соотношениями (8), отображающими множество локальных значений  $d\delta_{(e)}^k$  в множество глобальных значений  $d\delta^\Delta$

$$d\delta^\Delta = \Lambda_{\Delta}^{(e)k} d\delta_{(e)}^k, \quad k = 1, 2, \dots, m_e. \quad (12)$$

Дискретная модель вектор-функции  $du(x)$  определяется в виде соотношения

$$du(x) = \sum_{e=1}^{M_e} du_{(e)} = \sum_{e=1}^{M_e} N_{(e)}^k \Omega_{\Delta}^{(e)k} d\delta^\Delta = N^\Delta d\delta^\Delta, \quad (13)$$

где после второго знака равенства производится суммирование по  $\Delta$  от 1 до  $M$ .

В этом случае получаем

$$u = N^\Delta \delta^\Delta. \quad (14)$$

Здесь  $\delta^\Delta$ ,  $\Delta = 1, 2, \dots, M$  глобальное значение  $u$  в узле  $\Delta$ .  
Таким же образом находим

$$\varepsilon = B^\Delta \delta^\Delta, \quad d\varepsilon = B^\Delta d\delta^\Delta, \quad (15)$$

где матрица  $B^\Delta$  для плоских задач имеет вид

$$\mathbf{B}^\Delta = \begin{bmatrix} N_{,x_1}^\Delta & 0 \\ 0 & N_{,x_2}^\Delta \\ N_{,x_2}^\Delta & N_{,x_1}^\Delta \end{bmatrix}, \quad N_{,x_\kappa}^\Delta = \frac{\partial N^\Delta}{\partial x_\kappa}; \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}]^T, \quad d\boldsymbol{\varepsilon} = [d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{12}]^T, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T.$$

Здесь  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e$  для упругих областей,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{ep}$  для упругопластических областей и  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{vp}$  для упруговязкопластических областей склона.

Уравнения виртуальной работы в полных напряжениях записываются в матричной форме как

$$[\mathbf{d}\delta^\Delta]^T \left\{ \int_{\overset{\circ}{V}} [\mathbf{B}^\Delta]^T \boldsymbol{\sigma} d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} [\mathbf{N}^\Delta]^T \overset{\circ}{F} d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{S}_i} [\mathbf{N}^\Delta]^T \mathbf{q} d\overset{\circ}{S} \right\} = 0. \quad (18)$$

В дальнейшем приведенные ниже операции выполняются на уровне одного элемента, а затем производится суммирование результатов по элементам всей области тела. Первое слагаемое в фигурных скобках

(18) применительно к конечному элементу  $V_{(e)}$  преобразуется к виду

$$\sigma_{(e)}^{ks} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_{(e)}^\kappa]^T D_{(e)} B_{(e)}^s \mathbf{h}_{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\eta_1 d\eta_2 =$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma_{(e)}^{ks} d\eta_1 d\eta_2, \quad \kappa, s = 1, 2, \dots, m_e. \quad (19)$$

Второе слагаемое принимает следующий вид:

$$\mathbf{F}_{(e)}^\kappa = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}_{(e)}^\kappa]^T \overset{\circ}{F}_{(e)} \mathbf{h}_{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\eta_1 d\eta_2 =$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{f}_{(e)}^\kappa d\eta_1 d\eta_2, \quad \kappa = 1, 2, \dots, m_e. \quad (20)$$

Обычно в качестве  $\overset{\circ}{F}$  в расчетах принимается собственный вес тела. В этом случае (20) можно записать как

$$\overset{\circ}{F}_{x_1(e)}^\kappa = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{(e)}^\kappa]^m \rho_{(e)} \mathbf{g} \sin \Theta \det \mathbf{J}_{(e)} d\eta_1 d\eta_2,$$

$$\overset{\circ}{F}_{x_2(e)}^\kappa = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{(e)}^\kappa]^m \rho_{(e)} \mathbf{g} \cos \Theta \det \mathbf{J}_{(e)} d\eta_1 d\eta_2, \quad (21)$$

где  $\rho_{(e)}$  – плотность массы материала элемента;  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тя-  
жести;  $\Theta$  – угол между осью  $x_1$  и направлением гравитационной силы.

Если конечный элемент в процессе деформирования тела переходит в упругопластическое состояние, то матрица  $\mathbf{D}_{(e)}$  заменяется на  $\mathbf{D}^{ep}$ . В упруговязкопластическое состояние производится замена  $\mathbf{D}_{(e)}$  на  $\mathbf{D}^{vp}$ . В упругом состоянии эта матрица равна  $\mathbf{D}^e$ .

Точное вычисление полученных выше сложных интегралов удается выполнить очень редко, поэтому эти операции производятся численными методами обычно по Гауссу [6] как

$$\begin{aligned}\sigma_{(e)}^{KS} &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \sigma_{(e)}^{KS}(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) H_m H_l, \\ F_{(e)}^K &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n f_{(e)}^K(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) H_m H_l,\end{aligned}\tag{22}$$

где  $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$  – координаты точек интегрирования, их количество на элементе  $V_{(e)}$  равно  $n$ ;

$H_m, H_l$  – весовые коэффициенты. Эти значения берутся из таблиц [6].

Формулы численного интегрирования (21) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{F}_{x_1(e)} &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \rho_{(e)} \mathbf{g} h_{(e)} \sin \Theta N_{(e)}^K(\bar{\eta}_1^m, \bar{\eta}_2^m) \det \mathbf{J} H_m H_l, \\ \dot{F}_{x_2(e)} &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \rho_{(e)} \mathbf{g} h_{(e)} \cos \Theta N_{(e)}^K(\bar{\eta}_1^m, \bar{\eta}_2^m) \det \mathbf{J} H_m H_l.\end{aligned}\tag{23}$$

Рассмотрим третье слагаемое в фигурных скобках (18), которое содержит поверхностные усилия  $\mathbf{q} = [q_n, q_t]^T$ . Здесь  $q_n$  – нормальная составляющая к поверхности  $S_1$  усилия  $\mathbf{q}$ , а  $q_t$  – его касательная составляющая. Они определяются по формулам

$$\begin{aligned}\dot{q}_{x_1(e)}^K &= \int_{S_1(e)} N_{(e)}^K (q_t x_{1,\eta_1} - q_n x_{2,\eta_2}) d\eta_1, \\ \dot{q}_{x_2(e)}^K &= \int_{S_1(e)} N_{(e)}^K (q_n x_{1,\eta_1} + q_t x_{2,\eta_2}) d\eta_1.\end{aligned}\tag{24}$$

Из (18) следует, что в процессе деформирования выражение, стоящее в фигурных скобках, равно нулю, так как возможные узловые пере-

мещения  $d\delta^\Delta$  принимаются отличным от нуля. При численном приближенном решении и при вычислениях на ЭВМ с определенной точностью равенства нулю этого выражения не получается, т.е.

$$\omega = \int_{\dot{V}} [B^\Delta]^\top \sigma d\dot{V} - \int_{\dot{V}} [N^\Delta]^\top \dot{F} d\dot{V} - \int_{s_1} [N^\Delta]^\top q d\dot{S} \neq 0, \quad (25)$$

где  $\omega$  – вектор остаточной (ресидуальной) силы.

Если задача решается в приращениях, то на каждом шаге приращения также возникает остаточная сила, равная

$$\Delta\omega = \int_{\dot{V}} [B^\Delta]^\top \Delta\sigma d\dot{V} - \int_{\dot{V}} [N^\Delta]^\top \Delta\dot{F} d\dot{V} - \int_{s_1} [N^\Delta]^\top \Delta q d\dot{S} \neq 0. \quad (26)$$

Поэтому в процессе численного решения задач предусматривается процедура для уменьшения  $\omega$  до наперед заданной малой величины.

При приближенном методе решения задачи вследствие накопления различных ошибок возможен выход вектора напряжений  $\sigma$  за пределы поверхности, определенной функцией нагружения, т.е.  $f > 0$ . Такая ситуация недопустима в теории пластического течения. В процессе решения предусмотрена процедура возвращения вектора на поверхность нагружения или внутрь области, ограниченной этой поверхностью. Она выполняется по следующему алгоритму.

1. Определяется на  $i$ -й итерации вектор приращения узловых перемещений  $d\delta^i$ , затем по формуле (14) находится вектор  $du^i$  и по формуле (15) вектор  $d\varepsilon^i$  от действия остаточной силы  $\omega^{i-1}$ , полученной на  $i-1$  итерации.

2. Вычисляются

$$d\sigma^{ei} = Dd\varepsilon^i, \quad \sigma^i = \sigma^{i-1} + d\sigma^{ei}. \quad (27)$$

3. Делается проверка: выходит ли вектор  $\sigma^{ei}$  за область, ограниченную поверхностью нагружения. Обозначим эту область через  $G$ , а ее границу через  $\partial G$ . Возможны два случая:

а) до  $i$ -й итерации конец вектора  $\sigma^{i-1}$  находился на поверхности  $\partial G$ ;

в) до  $i$ -й итерации конец вектора  $\sigma^{i-1}$  находился внутри области  $G$ .

Исследуем случай А. Здесь возможны три варианта:

1) выполняется процесс разгрузки, следовательно, никакой корректировки напряжений  $\sigma^{ei}$  делать не надо;

2) выполняется процесс нейтрального нагружения, следовательно, и здесь также не надо корректировать вектор напряжений  $\sigma^{ei}$ ;

3) функция нагружения  $f > 0$  и конец вектора напряжений  $\sigma^{ei}$  выходит за область  $G \cup \partial G$ . Такая ситуация изображена на рис. 2. Требуется корректировка вектора  $\sigma^{ei}$ .

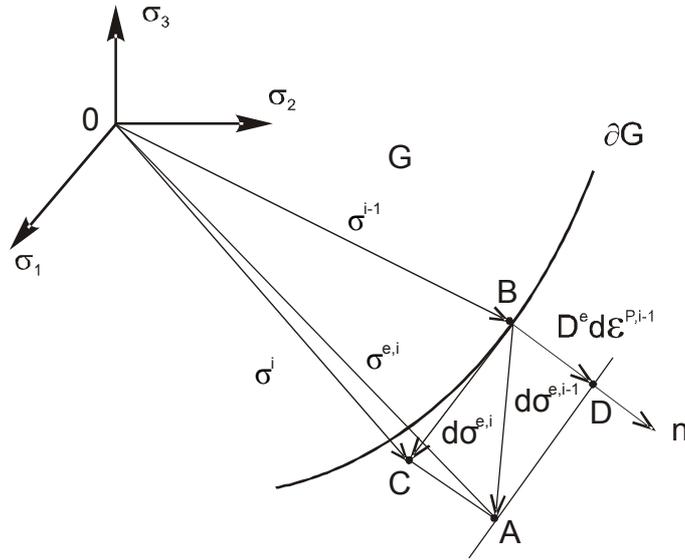


Рис. 2. Возвращение вектора  $\sigma^{ei}$  при условиях:  
 $f > 0$ , конец вектора  $\sigma^{i-1}$  лежит на поверхности  $\partial G$

Из точки В проводим нормаль  $n$  к поверхности нагружения  $\partial G$ , на которой лежит вектор приращений пластической деформации  $d\epsilon^{i-1}$ . На основании постулата суммирования деформации определяем

$$d\epsilon^{i-1} = d\epsilon^{e,i-1} + d\epsilon^{p,i-1} = (D^e)^{-1} d\sigma^{i-1} + d\epsilon^{p,i-1}, \quad (28)$$

где  $D^e$  – матрица модулей упругости.

Умножая левую и правую части соотношения (28) на  $D^e$ , получаем

$$D^e d\epsilon^{i-1} = d\sigma^{i-1} + D^e d\epsilon^{p,i-1}. \quad (29)$$

Следовательно, для преобразования вектора напряжений  $\sigma^{e,i}$  в вектор  $\sigma^i$  необходимо определить  $D^e d\varepsilon^{p,i-1}$  и вычесть это выражение из  $\sigma^{e,i}$ . При численной реализации на ЭВМ все эти операции выполняются в компонентной форме.

Исследуем случай В. На  $i$ -й итерации возможны два варианта:

1) функция нагружения  $f > 0$  и конец вектора напряжений  $\sigma^{e,i}$  находится внутри области  $G$ , что соответствует упругому состоянию материала. Коррекция вектора  $\sigma^{e,i}$  не производится.

2) функция нагружения  $f > 0$  и конец вектора напряжений  $\sigma^{e,i}$  выходит за область  $G \cup \partial G$ . Эта ситуация изображена на рис. 3.

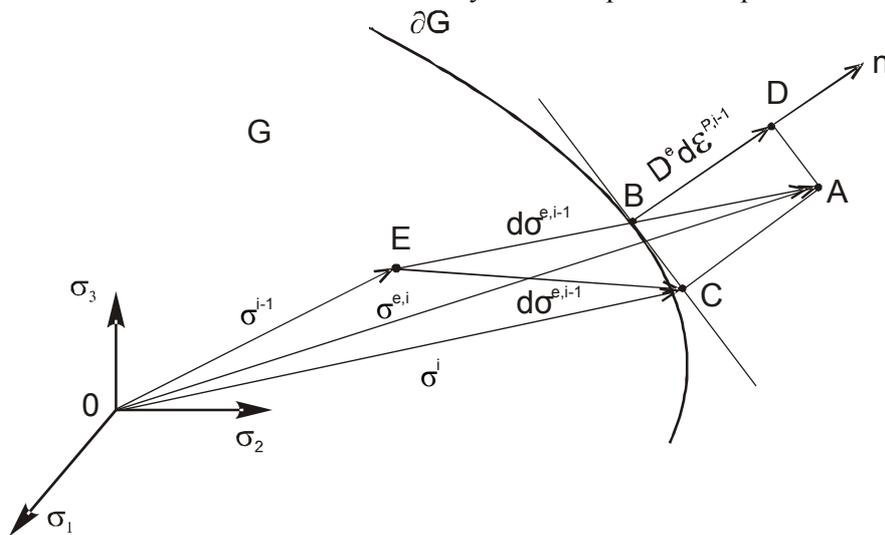


Рис. 3. Возвращение вектора  $\sigma^i$  при условиях:  
 $f > 0$ , конец вектора  $\sigma^{i-1}$  лежит внутри  $G$

Аналогично предыдущему случаю, находим

$$d\sigma^{e,i-1} = D^e d\varepsilon^{i-1} - D^e d\varepsilon^{p,i-1}. \quad (30)$$

Из рис. 3 следует, что для преобразования вектора напряжений  $\sigma^{e,i}$  в вектор  $\sigma^i$ , который будет удовлетворять условию  $f = 0$ , необходимо определить на  $i$ -й итерации вектор  $D^e d\varepsilon^{p,i-1}$  и вычесть его из вектора  $\sigma^{e,i}$ , т.е.

$$\sigma^i = \sigma^{e,i} - D^e d\varepsilon^{p,i-1}. \quad (31)$$

Приведенный выше анализ показывает для случая А (варианты 1 и 2) и для случая В (вариант 1) корректировку вектора  $d\sigma^{e,i-1}$  на  $i$ -й итерации производить не требуется. Напряжения должны определяться по формуле

$$\sigma^i = \sigma^{i-1} - d\sigma^{e,i-1}. \quad (32)$$

Для случая А (вариант 3) и для случая В (вариант 2) необходима корректировка  $d\sigma^{e,i-1}$ . Напряжение  $\sigma^i$  должно определяться по формуле (30). При корректировке вектора  $d\sigma^{e,i-1}$  формула (31), которая определяет вектор напряжений  $\sigma^i$ , преобразуется к виду

$$\sigma^i = \sigma^{i-1} + d\sigma^{e,i-1} - D^e d\varepsilon^{p,i-1}. \quad (33)$$

4. В зависимости от приведенных выше условий, необходимо определять  $\sigma^i$  по формуле (32) или (33). Найденное значение  $\sigma^i$  используется для вычисления вектора остаточной силы  $\omega$ .

Применяя отображение  $\Lambda$  к (18), (19) или (21) и обозначая через  $\mathbf{Q}$  объединение подматриц массовых и поверхностных сил в глобальную матрицу узловых нагрузок, получаем следующее уравнение:

$$\mathbf{K}(\delta)\delta - \mathbf{Q} = 0. \quad (34)$$

Оно является аналогом выражения в фигурных скобках (2.25), приравненного нулю. В (34)  $\mathbf{K}(\delta)$  называется матрицей жесткости системы, которая зависит через матрицу  $\mathbf{D}$  от вектора глобальных узловых перемещений  $\delta$ .

Как уже отмечалось выше, численное решение рассматриваемых упругопластических задач находится в приращениях. Для этого действующая нагрузка  $\mathbf{Q}$  разбивается на  $N$  малых интервалов  $\Delta\mathbf{Q}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  и затем определяется вектор узловых приращений перемещений  $\Delta\delta_i$  из уравнения

$$\mathbf{K}(\delta_i)\Delta\delta_i - \Delta\mathbf{Q}_i = 0. \quad (35)$$

Далее по приведенным выше формулам находится  $\Delta\varepsilon_i$  и  $\Delta\sigma_i$ .

Разберем процесс решения подробнее. На первом приближении от действующей нагрузки  $\Delta Q_1$  из решения уравнения (35) получены  $\delta_1 = \Delta\delta_1$ ,  $\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_1$ ,  $\sigma_1 = \Delta\sigma_1$ . Соответственно, после  $i$ -го приближения определены

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_{i-1} + \Delta Q_{i-1}, \quad \delta_i = \delta_{i-1} + \Delta\delta_{i-1}, \\ \varepsilon_i &= \varepsilon_{i-1} + \Delta\varepsilon_{i-1}, \quad \sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta\sigma_{i-1}. \end{aligned}$$

Вследствие приближенного решения уравнения (35) и приближенных вычислений образовалась невязка в виде остаточной силы

$$K(\delta_{i-1})\Delta\delta_{i-1} - \Delta Q_{i-1} = \omega(\delta_{i-1}). \quad (36)$$

Следовательно, она также фигурирует и в уравнении (34)

$$\omega(\delta_{i-1}) = K(\delta_{i-1})\delta_{i-1} - Q_{i-1}. \quad (37)$$

Подставляя (36) в (37), после преобразований находим соотношение

$$K(\delta_{i-1})\delta_i - Q_i = 0 \quad (= \omega(\delta_{i-1})), \quad (38)$$

в котором также вследствие приближенных вычислений в правой части вместо нуля получаем невязку  $\omega(\delta_{i-1})$ .

Видим, что на каждом шаге приближения в уравнении равновесия (34) вследствие приближенного решения (35) и приближенных вычислений образуется невязка, которая также связана с возвращением вектора напряжений внутрь или на границу области, ограниченной поверхностью нагружения. Поэтому в процессе численного решения разработана процедура по уменьшению невязки до наперед заданной малой величины.

Следующая трудность заключается в решении уравнения (35) на каждом этапе приращения нагрузки  $\Delta Q_i$ . Различные одношаговые и многошаговые методы решения таких уравнений изложены в [5]. Уравнение (35), опуская индекс  $i$ , можно записать как

$$K(\delta)\Delta\delta = 0. \quad (39)$$

Итерационный процесс решения уравнения (39) по методу Ньютона-Канторовича можно представить следующим образом:

$$\Delta\delta^j = \Delta\delta^{j-1} - [K(\delta^{j-1})]^{-1} K(\delta^{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (40)$$

Сложность решения уравнения (40) состоит в определении производной от матрицы жесткости системы алгебраических уравнений и затем в ее обращении. Быстрота сходимости зависит от удачного выбора начального приближения. Для упрощения решения применяются различные модификации итерационного процесса (40) [5, 13]. Нами в программный комплекс заложен метод касательных жесткостей и его модификации, когда матрица жесткости при ее обращении вычисляется через заданное количество итераций. Линейная система алгебраических уравнений на каждой итерации решается фронтальным методом [14, 15, 16]. Итерационный процесс заканчивается, если выполняется неравенство

$$\frac{\|\Delta \delta^j - \Delta \delta^{j-1}\|}{\|\delta^j\|} \leq \varepsilon_0, \quad (41)$$

где  $\varepsilon_0$  – наперед заданная малая величина.

Алгоритм решения ориентирован на использование ЭВМ и включает следующие этапы, соответствующие блок схеме программы.

Объявляются глобальные динамические массивы. Затем, вводится с проверкой исходные данные.

1. Объявляются глобальные динамические массивы. Затем, вводится с проверкой исходные данные.

2. Производится автоматизированное с помощью ЭВМ разбиение области, занимаемой системой, на конечные элементы. Далее, определяются границы динамических массивов и объявляются необходимые файлы.

3. Производится разбиение действующей нагрузки и заданных перемещений в области системы на приращения. Выводится на дисплей схема конечных элементов с указанием нумераций ее узлов и элементов. Организуется цикл по этим приращениям.

4. Строится итерационный процесс, который включает в себя операции по уменьшению невязки в уравнении равновесия системы и по возвращению вектора напряжений в область, ограниченную функцией нагружения. На каждой итерации выполняются следующие операции:

а. Определяется количество итераций, через которое корректируется матрица жесткости. Если это требуется на данной итерации, то заново вычисляются элементы матрицы жесткости  $\mathbf{K}(\delta)$ . Для этого вначале определяется вспомогательные матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$ . До вычисления элементов матрицы  $\mathbf{D}$  делается проверка по конечным элементам о их возможной работе в упругопластической стадии. Если это подтверждается, то вместо матрицы  $\mathbf{D}$  определяется матрица  $\mathbf{D}^{ep}$ . В противном случае вычисляется матрица  $\mathbf{D}^e$ . Производится запись элементов матрицы  $\mathbf{K}(\delta)$  в вспомогательный файл.

б. Из вспомогательного файла вводятся по сегментам элементы матрицы жесткости  $\mathbf{K}(\delta)$  и выполняется решение фронтальным методом.

Определяются  $\Delta\delta$  и  $\delta$ .

с. Вычисляется невязка, вызванная приближенным решением и возвращением вектора напряжений в область, ограниченную функцией нагружения. Производится ее уменьшение до заданной малой величины. Корректируется вектор напряжений с учетом перераспределения пластических зон в теле.

д. Делается проверка неравенства (41). Если оно не выполняется, то процесс решения возвращается на пункт а.

5. Заканчивается цикл по приращениям нагрузки и заданным перемещениям.

б. Производится вывод на дисплей общей схемы перемещения тела, схемы образования в нем пластических зон, а также эпюр перемещений и напряжений по сечениям, интересующим пользователя.

Рассмотрим решение упруговязкопластических задач. В момент времени  $t_n$  уравнение виртуальной работы после дискретизации будет иметь вид (18). При решении задачи в приращениях оно записывается в такой же форме, но полные напряжения и нагрузки заменяются их приращениями. Например, учитывая, что  $[d\delta]^T \neq 0$ , получаем

$$\int_{\dot{V}} [B_n^\Delta]^T \Delta \sigma_n d\dot{V} - \int_{\dot{V}} [N_n^\Delta]^T \Delta F_n d\dot{V} - \int_{s_1} [N_n^\Delta]^T \Delta q_n d\dot{S} = 0, \quad (42)$$

где индекс  $n$  указывает, что уравнение (42) записано для момента времени  $t_n$ .

Учитывая, что в уравнении (42)  $\Delta \varepsilon_n = \mathbf{B} \Delta \delta_n$ , после его преобразований получаем

$$\Delta \delta_n = [K_n]^{-1} dW_n, \quad (43)$$

$$dW_n = \int_{\dot{V}} [B_n]^m D_n^{vp} \varepsilon_n^{vp} \Delta t_n d\dot{V} - \Delta Q_n.$$

Приращения вязкопластических деформаций определяется как

$$\Delta \varepsilon_n^{vp} = B_n \Delta \delta_n - [D_n^{vp}]^{-1} \Delta \sigma_n. \quad (44)$$

Для упруговязкопластических задач допускается  $f > 0$ , поэтому невязка в уравнении равновесия в момент времени  $t_n$  будет вызвана погрешностями вычислений и погрешностями приближенного метода решения задачи, т.е.

$$\omega_n = \int_{\dot{V}} [B_n^\Delta]^T \sigma_n d\dot{V} - \int_{\dot{V}} [N_n^\Delta]^T F_n^\circ d\dot{V} - \int_{s_1} [N_n^\Delta]^T q_n^\circ dS. \quad (45)$$

Второе соотношение (43) принимает вид

$$dW_n = \int_{\dot{V}} [B_n]^\top D_n^{vp} \varepsilon_n^{vp} \Delta t_n d\dot{V} + \Delta Q_n + \omega_n. \quad (46)$$

Рассмотрим алгоритм решения. Первые три пункта предыдущего алгоритма повторяются без изменения и для решения упруговязкопластических задач. Поэтому начинаем со следующего пункта.

4. Организуется итерационный процесс по времени. На каждом временном шаге выполняются следующие вычисления:

а. Определяется количество итераций, через которые корректируется матрица жесткости. Если необходимо это выполнить на текущей итерации, то заново вычисляются ее элементы и записываются в вспомогательный файл.

б. Из вспомогательного файла вводятся по сегментам элементы матрицы жесткости и выполняется решение фронтальным методом.

Определяется  $\Delta\delta$  и  $\delta$ .

с. Вычисляются

$$\Delta\sigma_n, \sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma_n, \varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \dot{\varepsilon}_n^{vp} \Delta t_n, \Delta t_{n+1}.$$

Определяется невязка  $\omega_n$  по (45) и  $dW_{n+1}$  по (46). При вычислении этих величин учитывается перераспределение пластических зон в теле.

д. Выполняется проверка неравенства

$$\frac{\Delta t_{n+1} \sum \dot{\varepsilon}_{n+1}^{vp}}{\Delta t_l \sum \dot{\varepsilon}_l^{vp}} \leq \varepsilon_0, \quad (47)$$

где суммирование производится по всем точкам Гаусса системы, которые назначаются при численном интегрировании;  $\varepsilon_0$  – заданная малая величина. Если оно не выполняется, то производится возврат на пункт а.

e. Заканчивается итерационный процесс.  
f. Производится запись в выходной файл результатов решения для каждого приращения времени.

5. Заканчивается цикл по приращениям нагрузки и заданным перемещениям.

6. Производится вывод на дисплей такой же информации, что и в предыдущем алгоритме. Дополнительно выводятся эпюры развития деформации во времени в заданных пользователем точках тела и время их стабилизации.

Данные алгоритмы для шести различных функций нагружения были реализованы для ЭВМ в системе Delphi и показали высокую эффективность при решении упругих, упругопластических и упруговязкопластических задач. Научная рефлексия полученных результатов по данной работе и конкретные примеры расчета будут приведены в следующей статье. С некоторыми задачами расчета склонов и их анализом можно ознакомиться в работах [17, 18, 19].

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гришин В.А, Гришин А.В. Математическое моделирование склонов. Ч.2 // Вісник ОНМУ. – № 38. 2013. – С.41.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
4. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах механики. – Запорожье, 2009. – 400 с.
5. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
6. Zienkiewicz O. C. *The finite element method*. – Mcgraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1986. – 787 p.
7. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л.: Судостроение, 1979. – 263 с.
8. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
10. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 350 с.
11. Фадеев А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
12. Owen D.R.J., Hinton E. *Finite elements in plasticity: theory and practice* – Pineridge Press Limited Swensea, U.K., 1980. – 594 p.

13. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 751 с.
14. Джордж А., Лю Дж. *Численное решение больших разреженных систем.* – М.: Мир, 1988. – 333 с.
15. Писсанецки С. *Технология разреженных матриц.* – М.: Мир, 1988. – 411 с.
16. Irons B. M. *A frontal solution program for finite element analysis // Int. J. Numerical Methods Eng.* – Vol. 2. – 1970. – 5-32 p.
17. Гришин В.А., Дорофеев В.С. *Некоторые нелинейные модели грунтовой среды.* – Одесса: Внешрекламсервис, 2007. – 310 с.
18. Гришин В.А., Снисаренко В.И. *Одесские склоны и оползни.* – К.: МП Леся, 2008. – 300 с.
19. Гришин В.А, Гришин А.В. и др. *Определение напряженно-деформированного состояния склонов и откосов в системе PLAXIS.* – К.: НДЦ ПЦЗЕМСПЕЦБУД, 2012. – 218 с.

*Стаття надійшла до редакції 12.11.2013*

**Рецензенти:**

доктор технічних наук, професор, генеральний директор  
Морського інженерного бюро **Г.В. Єгоров**

доктор технічних наук, професор, науковий консультант  
Морського інженерного бюро **В.В. Козляков**