

УДК 517.9

Р.В. Меркт, В.М. Челабчі, В.В. Челабчі, І.А. Кукішев

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ. ДИНАМІКА СИСТЕМ

Розглянуто створення методичного й програмного забезпечення для проведення обчислювального експерименту в області судового устаткування. Об'єкт дослідження – динаміка судових установок і систем. Розробки орієнтовані на дослідження систем із зосередженими параметрами. Описуються ефективні методи рішення наступних задач: згладжування експериментальних залежностей, керована ідентифікація моделей динаміки судових систем, керований проекційно-сітковий метод рішення диференціальних рівнянь, що описують динамічні процеси у судовому устаткуванні.

Ключові слова: судова установка, система, динаміка, методичне забезпечення, обчислювальний експеримент.

Рассмотрено создание методического обеспечения для проведения вычислительного эксперимента в области судового оборудования. Описываются эффективные методы решения задач: сглаживание экспериментальных зависимостей, управляемая идентификация моделей динамических систем, управляемый проекционно-сеточный метод решения дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: динамика, судовые установки, методическое обеспечение, вычислительный эксперимент.

Creation of the methodical providing of computing experiment is considered. An object is the dynamic ship systems. The effective methods of decision of tasks are described: smoothing out of experimental dependences, authentication of models of the dynamic ship systems, projection-net method of decision of differential equalizations.

Keywords: system, ship, computing experiment, methodical providing.

Для оптимізації конструкції й режимів роботи судового устаткування важливим є надійне прогнозування динамічних процесів у діючих і проєктованих судових установках і системах. Для досягнення застережених цілей потрібні методи й засоби одержання достовірної інформації про процеси в елементах судових установок при їх функціонуванні в різних умовах.

Як правило, натурний експеримент з судовим устаткуванням вимагає значних матеріальних і фінансових витрат, а часто практично неможливий. Фізичне моделювання не завжди дозволяє одержати достовірну інформацію про процеси в достатньому обсязі.

Обчислювальний експеримент на основі математичного моделювання дозволяє провести дослідження швидше й дешевше. Особливо важливо забезпечити достатню вірогідність одержуваних в експерименті результатів при мінімізації витрат [1].

Вірогідність інформації, отриманої в обчислювальному експерименті при дослідженні динаміки суднових систем із зосередженими параметрами, в першу чергу залежить від того, наскільки докладно й адекватно використовувані математичні моделі описують процеси в системі. Подібні моделі найчастіше формуються на основі феноменологічного підходу. Однак, коли дослідженню підлягають уже існуючі суднові системи, що перебувають в експлуатації, використовуються методи ідентифікації на основі обробки експериментальних даних.

Як правило, експериментальні дані зашумлені. Для одержання ясної картини досліджуваного процесу потрібно знизити вплив шуму.

Не менш важливим представляється розробка ефективних чисельних методів для імітації процесів у системі. Використовувані чисельні методи повинні мати абсолютну стійкість або, у всякому разі, стійкість в максимально широкому діапазоні параметрів моделі. Необхідно також забезпечувати максимально низьку методичну погрішність чисельного методу.

Ціль роботи. Метою роботи є розробка загальних підходів і алгоритмів до рішення наступних задач:

- кероване згладжування зашумлених експериментальних залежностей;
- керована ідентифікація моделей елементів динамічних систем;
- кероване рішення звичайних диференціальних рівнянь і систем проекційно-сітковим методом.

Згладжування експериментальних залежностей. У практиці обробки експериментальних даних апроксимація зашумлених даних не завжди проводиться успішно. Особливо, коли необхідна достовірна інформація про значення першої й особливо другої похідної. Складність підбора виду апроксимуючої функції вимагає досить високої кваліфікації.

При апроксимації рядів експериментальних даних сплайнами так само існують певні сумніви у вірогідності визначення похідних.

Можливий інший шлях, коли в процесі згладжування розраховуються значення не тільки згладженої функції, але і її похідних [2].

У цьому випадку доречно використовувати згладжування зашумлених експериментальних даних $Y_e(\tau)$ використовуючи апроксимацію на ковзних відрізках. Схема розташування вузлів (моментів часу) приводиться на рис. 1.

На кожному виділеному відрізку часу використовується локальна в межах кожного відрізка незалежна змінна t .



Рис. 1. Схеми розбивки області визначення функції на відрізки апроксимації методом ковзних відрізків, де τ – глобальний час, t – локальний час

Обраний спосіб обробки експериментальних залежностей відрізняється тим, що він не вимагає рівномірного розташування моментів часу на осі τ .

Іншою перевагою прийнятого способу є можливість істотного перекриття відрізків часу при апроксимації, що помітно підвищує вірогідність результатів особливо при сильно зашумлених даних.

Залежність $Y_e(t)$ у межах кожного відрізка апроксимується підходящою функцією (наприклад, поліномом невисокого ступеня). Апроксимація функції Y на відрізках здійснюється методом найменших квадратів. Обчислюються значення апроксимуючої функції Y_a і її похідних для кожного значення аргументу відрізка (1)

$$Y_a(t) = \sum_{k=0}^{K_{pol}} a_k \cdot t^k, \quad Y_a'(t) = \sum_{k=1}^{K_{pol}} k \cdot a_k \cdot t^{k-1}, \quad Y_a''(t) = \sum_{k=2}^{K_{pol}} (k-1) \cdot k \cdot a_k \cdot t^{k-2}, \quad (1)$$

де K_{pol} – порядок апроксимуючого полінома.

Таким чином, значення Y , Y' , Y'' для кожного i -го значення аргументу обробляються багаторазово. Згладжені значення Y_v , Y_v' , Y_v'' для кожного значення τ_i розраховуються по формулах (2)

$$Y_v = \frac{1}{km} \cdot \sum_{k=1}^{km} Y a_k, \quad Y_v' = \frac{1}{km} \cdot \sum_{k=1}^{km} Y a'_k, \quad Y_v'' = \frac{1}{km} \cdot \sum_{k=1}^{km} Y a''_k, \quad (2)$$

де km – кількість обробок значень Y_a .

Початкова й кінцева частини області визначення функції $Y_e(\tau)$ у цьому випадку обробляються недостатньо, що веде до зниження якості згладжування в цих районах. Тому обробка зазначених областей проводиться додатково багаторазово (рис. 2).

Управляти згладжуванням можна кількістю значень аргументу t на ковзному відрізку (J_m) і ступенем апроксимуючого полінома (K_{pol}).



Рис. 2. Схема обробки даних при згладжуванні

Для вибору оптимальних умов згладжування проводиться варіювання значень J_m і K_{pol} . Оптимальними вважаються значення J_m і K_{pol} , для яких оцінка R^2 максимально близька одиниці

$$R^2 = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{J_m} (Y_{sh_i} - Y_{v_i})^2}{\sum_{i=1}^{J_m} Y_{sh_i}^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{J_m} Y_{sh_i}}{J_m} \right)^2} \right), \quad (3)$$

де Y_{sh} , Y_v – відповідно, зашумлене й відновлене безрозмірні значення Y ;
 J_m – кількість моментів часу на осі τ .

Для підвищення якості згладжування можна проводити повторне згладжування, коли в якості вихідних даних використовуються результати попереднього згладжування. Для оперативного керування ітераційним процесом згладжування поряд з оцінкою (3) використовується середньоквадратична оцінка різниці рішень на двох сусідніх ітераціях (4)

$$\sigma_{it} = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{J_m} (Y_{v_i}|_{Iter} - Y_{v_i}|_{Iter-1})^2}{J_m} \right)}, \quad (4)$$

де Y_v – значення функції отримане шляхом ітераційного згладжування;
 $Iter$ – номер ітерації.

Алгоритм керованого згладжування представлений на рис. 3.

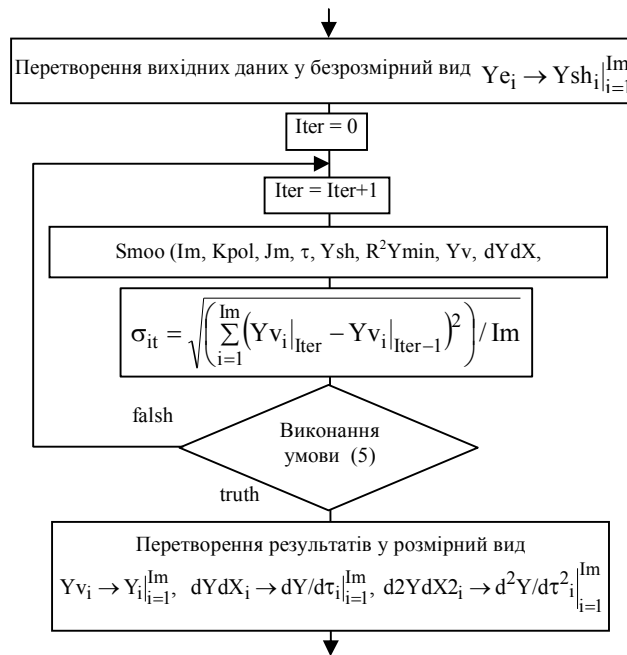


Рис. 3. Схема алгоритму керованого згладжування експериментальних залежностей

Завершення ітераційного процесу здійснюється за умовою (5)

$$1 \geq R^2 > R^2_{\min} \quad \text{та} \quad \sigma_{it} < \sigma_{\text{sig}}, \quad (5)$$

де R^2_{\min} , σ_{sig} – параметри керування;

R^2 , σ_{it} – поточне значення параметрів.

Для розширення діапазону значень величин і підвищення якості згладжування експериментальних залежностей використовується безрозмірне подання даних.

Використовується процедура безпосереднього згладжування Smoo. При виконанні процедури Smoo обробляється вся область представлення Y_{sh} і додатково ділянки на початку і кінці області. При цьому для кожного відрізка апроксимації визначається оцінка узгодження значень апроксимаційних і заданих змінних (R^2Y). Мінімальне значення оцінки по всіх оброблюваних відрізках R^2Y_{\min} служить додатковим показником спроможності процедури згладжування.

При необхідності додається алгоритм розрахунку значень Y , $dY/d\tau$, $d^2Y/d\tau^2$ для нового заданого набору значень τ .

Описаний алгоритм використовувався для згладжування часових рядів і для згладжування експериментальних залежностей вигляду $Y = f(X)$. Призначення параметрів, що управляють (K_{pol} і J_m), можна формалізувати, але неможливо врахувати всі виникаючі ситуації. Тому вибір параметрів керування надається дослідникові.

Таблиця 1

Керуючі параметри й змінні

| Вид | Ім'я | Назва |
|---------------------------|--|--|
| Параметри керування | Kpol | Ступінь апроксимуючого полінома на відрізьку |
| | Jm | Кількість вузлів на відрізьку апроксимації |
| | R ² min | Мінімальне припустиме значення оцінки R ² |
| | sigm | Мінімальне припустиме значення середньоквадратичної оцінки різниці рішень на двох сусідніх ітераціях |
| Вихідні дані й результати | Im | Кількість моментів часу на осі τ |
| | τ | Значення моменту часу |
| | Ye | Вихідне (експериментальне) значення Y |
| | Ysh | Безрозмірне Ye |
| | Yv | Безрозмірне відновлене значення Y |
| | dYdX | Відновлене безрозмірне значення першої похідної |
| | D2YdX2 | Відновлене безрозмірне значення другої похідної |
| | Y | Відновлене (згладжене) значення Y |
| | dY/d τ | Відновлене значення першої похідної |
| | d ² Y/d τ ² | Відновлене значення другої похідної |

Керована ідентифікація моделей динамічних систем. При дослідженні перехідних процесів у детермінованих динамічних системах із зосередженими параметрами використовуються математичні моделі у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), одержуваних на основі феноменологічного підходу або шляхом ідентифікації елементів діючих систем на базі експериментальних даних.

Звичайно, вид рівняння математичної моделі, що описує динаміку об'єкта, більш-менш відомий, і в цьому випадку вирішується задача параметричної ідентифікації [3]. У протилежному випадку доводиться проводити параметричну ідентифікацію при варіюванні виду математичної моделі й вибирати модель із умови найкращої відповідності відновленого по отриманій моделі рішення результатам експерименту.

Як правило, експериментальні дані (вплив на об'єкт X_e і реакція об'єкта Y_e) зашумлені. Для одержання ясної картини досліджуваного процесу потрібно знизити вплив шуму. У цьому випадку доречно використовувати згладжування зашумлених експериментальних даних з апроксимацією на ковзних відрізках.

Для рішення задачі ідентифікації використовується простий і надійний метод найменших квадратів [3], [4], що включає наступні етапи.

– Вся область зміни величин $X_e(\tau)$, $Y_e(\tau)$ розбивається на відрізьки часу τ , що перекривають один одного. Використовується метод ковзних відрізьків (рис.1). На кожному виділеному відрізьку використовується локальна в межах кожного відрізька незалежна змінна t .

– Проводиться апроксимація залежностей $X_e = f(t)$ і $Y_e = f(t)$ на відрізках осі часу гладкими нерозривними функціями. На вибір виду апроксимуючих функцій істотних обмежень немає. Автори використовують апроксимацію поліномом порядку k_{pol} .

– Значення функцій і похідних підставляються в рівняння, що ідентифікується, й визначається сума квадратів нев'язань лівої й правої частин рівняння (функціонал δ) для всіх розглянутих моментів часу.

– Значення коефіцієнтів рівняння, що ідентифікується, визначаються шляхом мінімізації функціонала δ . Можна використовувати методи спуска, але при поліноміальній апроксимації отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь зручно вирішувати одним із прямих методів.

Якість результатів ідентифікації математичної моделі об'єкта оцінюється порівнянням значень Y_e і відновлених значень Y_p , отриманих шляхом рішення ідентифікованого рівняння керованим проєкційним методом.

Загальний алгоритм керованої параметричної ідентифікації звичайних диференціальних рівнянь показаний на блок-схемі рис. 4.

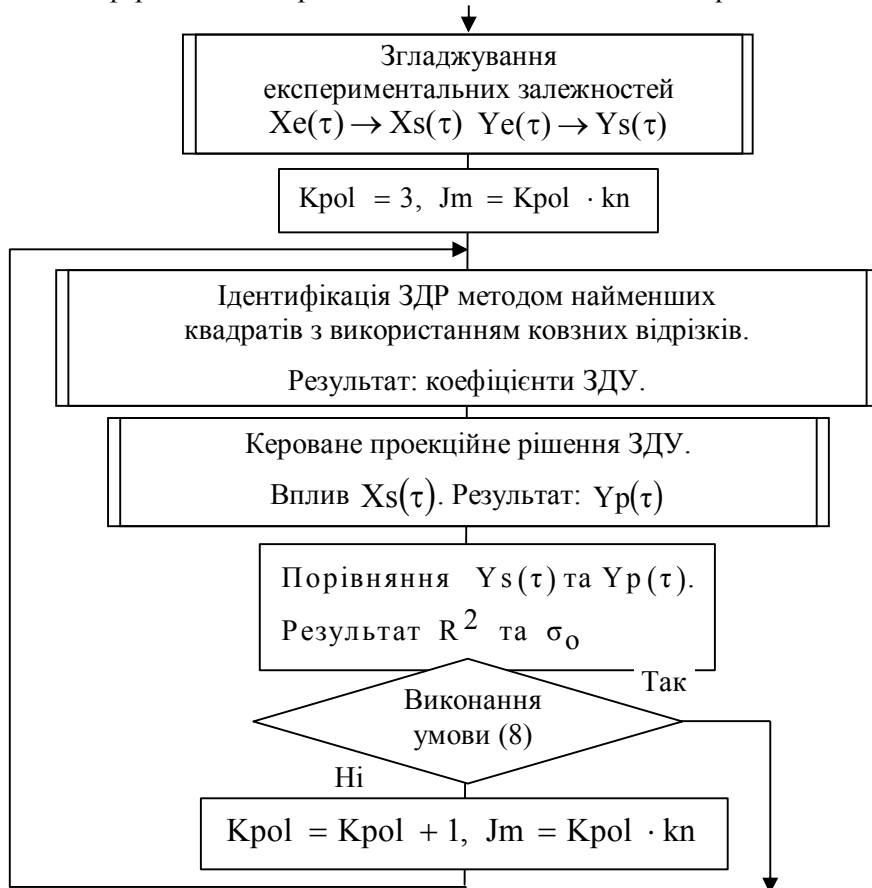


Рис. 4. Схема алгоритму керованої ідентифікації ЗДР

Якість результатів ідентифікації математичної моделі об'єкта оцінюється порівнянням значень Y_s і відновлених значень Y_p , отриманих шляхом рішення ідентифікованого рівняння керованим проекційним методом. При цьому використовуються оцінки (6) або (7).

$$R^2 = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{Im} (Y_{s_i} - Y_{p_i})^2}{\sum_{i=1}^{Im} Y_{s_i}^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{Im} Y_{s_i}}{Im} \right)^2} \right), \quad (6)$$

$$\sigma_o = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{Im} ((Y_{s_i} - Y_{p_i}) / (\max Y_{s_i} - \min Y_{s_i}))^2}{Im} \right)}, \quad (7)$$

де Y_s, Y_p – відповідно, згладжене й відновлене значення функцій;

Im – кількість значень моментів часу.

Сам процес керованої ідентифікації виконується ітераційно при варіації порядку апроксимуючого полінома K_{pol} і кількості моментів часу вхідних у відрізок J_m .

Закінчення ітераційного процесу ідентифікації здійснюється [4] при виконанні умови (8)

$$1 \geq R^2 > R^2_{min} \quad \text{є} \quad \sigma_o < \sigma_o_{max}. \quad (8)$$

Результати досліджень дозволяють рекомендувати

$$0,05 < \sigma_{o,max} < 0,08, \quad 3 < kn < 7.$$

Керований проекційно-сітковий метод рішення звичайних диференціальних рівнянь і систем. Основна ідея методу полягає в тім, що на відрізках z осі незалежної змінної τ (рис. 5), як рішення Y , приймається функція певного типу, але з невідомими поки параметрами (коефіцієнтами). Апроксимуюча функція і її похідні не повинні мати розривів.

Вираження для функції і її похідних підставляються в розв'язуване рівняння. Записується вираження для функціонала S , що являє собою суму квадратів нев'язань (різниць значень правої й лівої частин рівняння) для ряду значень незалежної змінної. Коефіцієнти апроксимуючої функції знаходять із умов мінімізації функціонала S . Можна використовувати або методи безумовної оптимізації, або прямі методи.

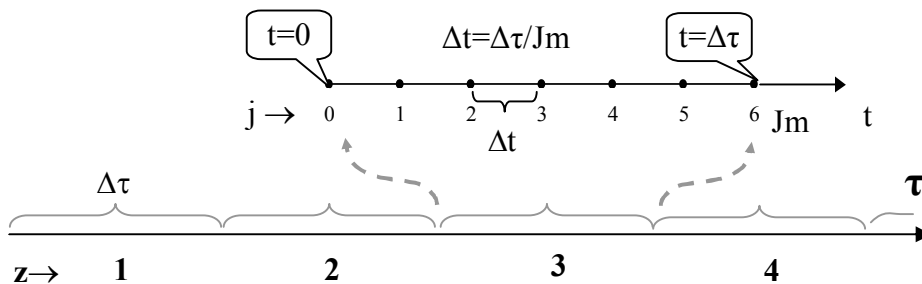


Рис. 5. Схема індексації вузлів сітки при проекційному рішенні

У межах кожного відрізка $\Delta\tau$ використовується локальна незалежна змінна t . Таким чином, створюється послідовність відрізків z , кожний з яких включає достатню кількість внутрішніх вузлів j .

Основи методики розглядаються на прикладі рішення звичайного диференціального рівняння 1-го порядку (9)

$$A \cdot \frac{dY}{d\tau} + Y = D \cdot X \quad \tau = 0, \quad Y = Y_0, \quad (9)$$

де A, D – задані коефіцієнти рівняння;

X – вплив.

У якості функції апроксимації рішення Y на кожному відрізку інтегрування зручно прийняти поліном ступеня K_{pol} (10)

$$Y = \sum_{k=0}^{K_{pol}} a_k \cdot t^k. \quad (10)$$

Відповідно вираз для першої похідної має вигляд (11)

$$Y' = \sum_{k=1}^{K_{pol}} k \cdot a_k \cdot t^{k-1}, \quad (11)$$

де a_1 - a_{kn} – коефіцієнти полінома, що підлягають визначенню.

Значення коефіцієнта a_0 визначається із задоволення початкової умови або рішення, отриманому на попередньому відрізку інтегрування.

$$a_0 = Y_0. \quad (12)$$

Підставляючи вираження для Y, Y' у рівняння (9), одержимо (13)

$$\sum_{k=1}^{kn} \left[a_k \cdot \left(A \cdot k \cdot t^{k-1} + t^k \right) \right] = D \cdot X - a_0. \quad (13)$$

Сума квадратів нев'язок (різниць значень правої й лівої частин рівняння) по всіх вузлах розглянутого відрізка інтегрування має вигляд (14)

$$S = \sum_{j=0}^m \left\{ \sum_{k=1}^{kn} \left[a_k \cdot \left(A \cdot k \cdot t_j^{k-1} + t_j^k \right) \right] - D \cdot X_j + a_0 \right\}^2. \quad (14)$$

Значення функціонала S буде мінімальним при виконанні умов (15)

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial a_{kn}} = 0. \quad (15)$$

Задовольняючи кожен наведену умову, можна записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Коефіцієнти матриці (МА) і елементи вектора правої частини (МВ) визначаються по залежностях (16)

$$MA_{L,C} = \sum_{j=0}^m (A \cdot C \cdot t_j^{C-1} + t_j^C) \cdot (A \cdot L \cdot t_j^{L-1} + t_j^L), \quad (16)$$

$$MB_L = \sum_{j=0}^m (D \cdot X_j - a_0) \cdot (A \cdot L \cdot t_j^{L-1} + t_j^L).$$

де L – індекс рядка матриці (line);
C – індекс стовпця (column).

Якщо вплив X задається не аналітичним вираженням (а, наприклад, експериментальними даними в табличному виді), проводиться попередня апроксимація експериментальних значень X підходящою функцією. При цьому рекомендується використовувати процедуру згладжування.

Алгоритм керованого проекційно-сіткового рішення звичайного диференціального рівняння представлений на рис. 6.

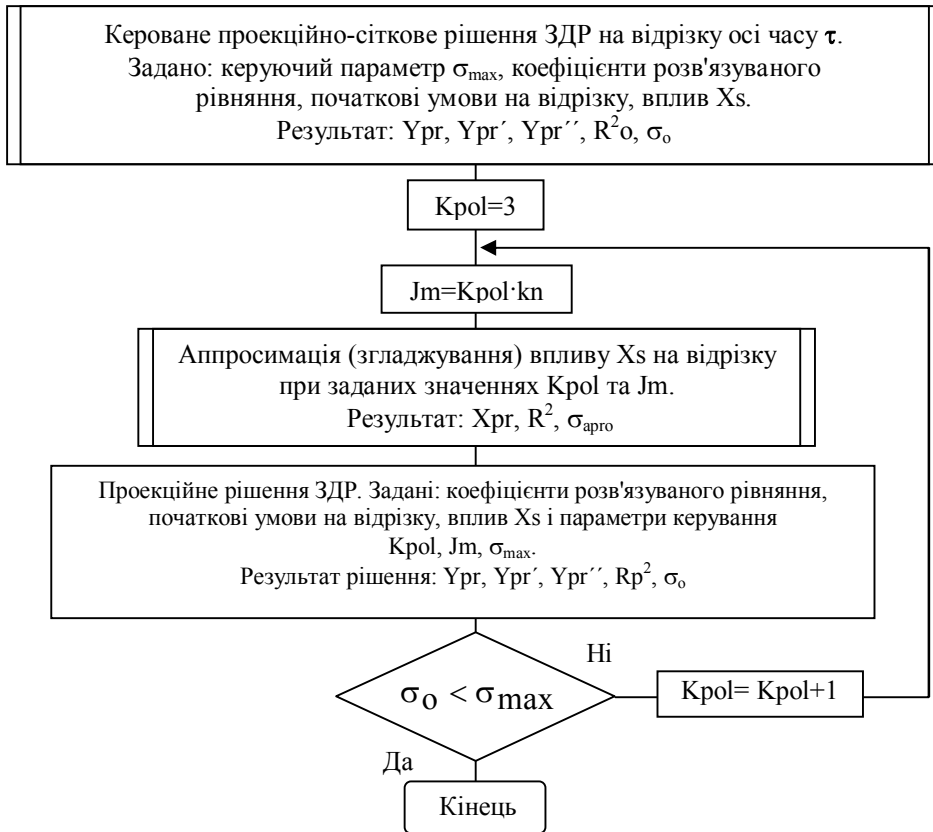


Рис. 6. Алгоритм керованого проекційно-сіткового рішення ЗДР

Якість рішення можна оцінювати згідно [5] за значенням Rp^2 (17)

$$Rp^2 = 1 - \frac{\sum_{j=0}^m (Y_j - K \cdot X_j + A \cdot Y'_j)^2}{\left(\sum_{j=0}^m Y_i^2 - \left(\sum_{j=0}^m Y_i \right)^2 / (m+1) \right)}, \quad (17)$$

де Y_i – значення функції (отримане рішення);

J_m – кількість вузлів на відрізку інтегрування (допоміжна вісь t).

При настроюванні рішення на кожному відрізку Δt здійснюється керований підбір значень K_{pol} , J_m з метою забезпечення бажаного рівня погрішності рішення.

Автори [6] пропонують для оцінки ефективності проєкційного рішення використовувати середньоквадратичне значення відносного нев'язання σ_o (18).

$$\sigma_o = \sqrt{\sum_{j=0}^m \left(\frac{A \cdot Y'_j + Y_j - K \cdot X_j}{G_j} \right)^2} / (m+1), \quad (18)$$

де $G_j = \max(|A \cdot Y'_j|, |Y_j|, |K \cdot X_j|)$.

Для виявлення кореляції між максимальними (δY_{max}) і середніми (δY_{sr}) значеннями відносної погрішності рішення й оцінкою σ_o проводилося проєкційно-сіткове чисельне рішення рівняння (1) при різних видах впливу й при варіації параметрів настроювання Δt , K_{pol} , J_m . Чисельне рішення порівнювалося з точним аналітичним рішенням. Відносна по-грішність нормувалася по максимальній зміні значення Y у межах усього перехідного процесу.

Результати досліджень представлені на рис. 7.

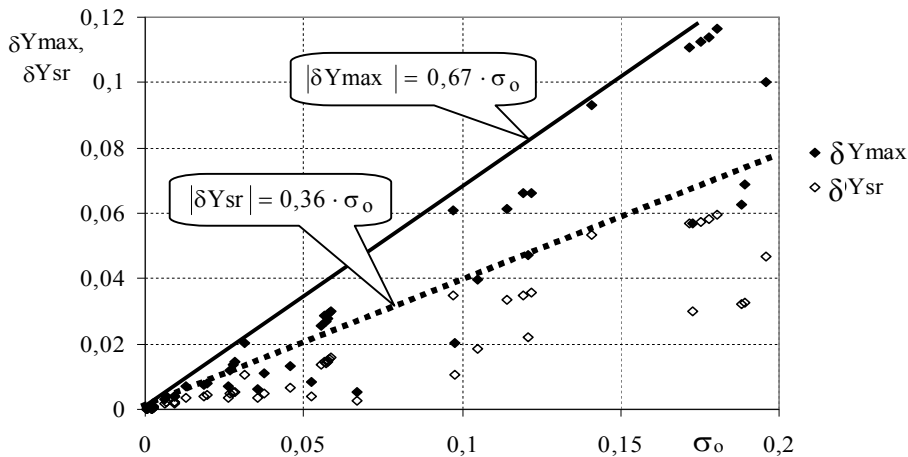


Рис. 7. Залежність рівня відносних погрішностей рішення від σ_o

На рис. 7 суцільними лініями виділені області, у яких забезпечується заданий рівень відносної погрішності проекційно-сіткового рішення.

При настроюванні вибирається бажаний рівень відносної погрішності рішення δY_{\max} або δY_{sr} .

Для забезпечення заданого рівня відносної погрішності рішення необхідне виконання умов (19)

$$\sigma_o \leq 2,78 \cdot \delta Y_{\text{sr}} \quad \text{или} \quad \sigma_o \leq 1,49 \cdot \delta Y_{\max}. \quad (19)$$

Для виконання умов (19) ітераційним шляхом підбираються значення K_{pol} і J_m .

У першому наближенні приймаються мінімальні значення, наприклад, $K_{\text{pol}} = 3$ і $J_m = a \cdot K_{\text{pol}}$. Рекомендується $a = 5 - 7$. Ітераційне збільшення значень K_{pol} і J_m припиняється при виконанні (19).

Пропонована методика настроювання проекційно-сіткового рішення розроблена й застосовувалася для чисельного рішення лінійних і нелінійних звичайних диференціальних рівнянь і систем.

Організація розподілених обчислень при дослідженні динаміки суднових систем. Моделювання проекційно-сітковим методом динаміки суднових систем, що складаються з одного об'єкта не представляє особливих складностей. Якщо система складається з великої кількості взаємодіючих об'єктів, моделювання процесів у системі досягається шляхом ітераційного узгодження (зшивки) рішень для окремих об'єктів. Спрощена блок-схема такого лінійного алгоритму моделювання системи, що складається з безлічі об'єктів, наведена на рис. 8.

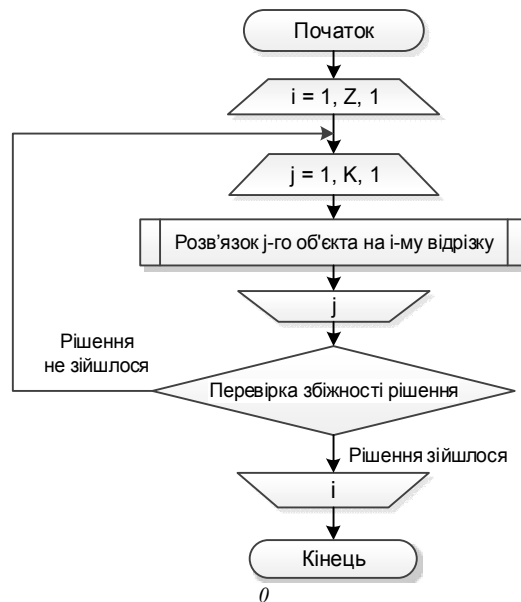


Рис. 8. Лінійний алгоритм,
де Z – число відрізків інтегрування; K – кількість об'єктів системи

Дослідження динаміки складної системи, що включає велику кількість елементів (об'єктів), вимагає багато часу й більших обчислювальних ресурсів. Один зі шляхів рішення проблеми полягає в розподілі обчислень із використанням графічних обчислювальних пристроїв (GPGPU), тому що обчислювальна потужність цих пристроїв у багато разів перевершує потужності центральних процесорів. Приріст продуктивності на GPGPU здійснюється за рахунок величезних масивів обчислювальних ядер, що розміщуються на одному кристалі графічного процесора (близько 1500).

Для моделювання процесів у складних системах необхідно модифікувати алгоритм таким чином, щоб рішення можна було виконувати паралельно в декількох потоках [7]. При цьому проводиться декомпозиція системи на ряд об'єктів, кожний з яких включає обмежене (але досить велике) число елементів системи.

У даному алгоритмі прискорення процесу розрахунку можна здійснити, розподіляючи обчислення кожного об'єкта системи по різних ядрах графічного процесора (див. рис. 9).

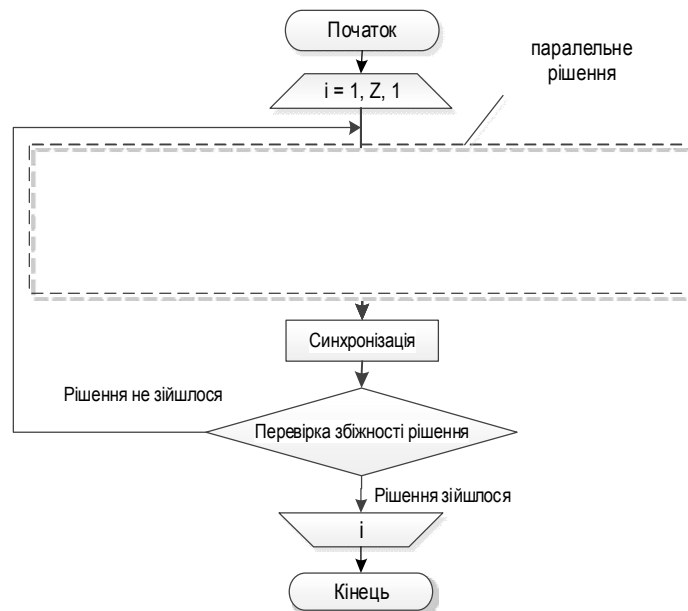


Рис. 9. Паралельний алгоритм рішення задачі

Використовуючи гетерогенні обчислення з GPGPU для скорочення тимчасових витрат на розрахунок моделі, що складається з безлічі підсистем проєкційно-сітковим методом, можна одержати істотне скорочення часу рішення.

Висновки. Розроблені методики орієнтовані на виконання обчислювального експерименту при дослідженні динамічних процесів в еле-

ментах суднового устаткування. Методики дозволяють надійно оцінювати вірогідність отриманого рішення. Алгоритми проекційно-сіткового методу дозволяють у процесі рішення проводити настроювання обчислювального процесу для забезпечення заданого рівня погрешності.

Описані розробки дозволять проводити імітацію роботи суднового устаткування з більшою вірогідністю одержуваної інформації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. – М.: ИММ РАН, 2000. – 409 с.
2. Меркт Р.В., Челабчи В.В., Челабчи В.Н. Особенности сглаживания экспериментальных зависимостей методом скользящих отрезков // Сб. научн. трудов «Современные направления теоретических и прикладных исследований '2011». Т. 8. Физика и математика. – Одесса: Черноморье, 2011. – С.18-22.
3. Челабчи В.В., Челабчи В.Н. К вопросу идентификации динамических объектов // Сб. научных работ «Спецпроект: анализ научных исследований». Т. 3. – Днепропетровск: НАЦ "ЕРА", 2005. – С. 52-55.
4. Челабчи В.В., Челабчи В.Н. Управляемая идентификация моделей динамических систем // Materiały IX Międzynarodowej naukowo-praktycznej konferencji «Perspektywiczne opracowania są nauką i technikami – 2013», Volume 33. Matematyka – Przemysł: Nauka i studia, 2013 – С. 47-51.
5. Челабчи В.В. Оперативное управление проекционно-сеточным методом при решении обыкновенных дифференциальных уравнений // Сб. научн. трудов SWorld. – Вып. 4. –Т. 3. – Одесса: КУПРИЕНКО, 2012. – С.49-53.
6. Меркт Р.В., Челабчи В.Н., Челабчи В.В. Организация управления решением обыкновенных дифференциальных уравнений проекционно-сеточным методом // Матеріали ІХ Міжнародної науково-практичної конференції «Наука в інформаційному просторі. – Т.7. – Дніпропетровськ: Біла К.О., 2013. – С. 86-90.
7. Кукишев И.А. Использование проекционно-сеточного метода при распределенных вычислениях // Сб. научн. трудов SWord. – Вып. 2. –Т. 6. – Одесса: КУПРИЕНКО, 2013. – С. 24-28.

Стаття надійшла до редакції 17.02.2014

Рецензент – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Інформаційні технології» Одеського національного морського університету **В.В. Вичужанін**