

УДК 69.05:658.-62:728.1

В.А. Гришин, А.В. Гришин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СКЛОНОВ  
(Часть 3)

*Рассматривается применение математического моделирования к проблеме нелинейного деформирования склонов.*

**Ключевые слова:** математическое моделирование, напряжения, деформации, склоны, пластичность, оползни, алгоритм, программа.

*Розглядається застосування математичного моделювання до проблеми нелінійного деформування схилів.*

**Ключові слова:** математичне моделювання, напруга, деформації, склоны, пластичность, оползни, алгоритм, программа.

*Application of mathematical modelling to a problem of nonlinear deformation of slopes is considered.*

**Keywords.** Mathematical modelling, voltages, strains, slopes, plasticity, landslips, algorithm, the program.

*Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа. На первом этапе выбирается (или строится) «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д. Второй этап – выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. На третьем этапе создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютер.*

**Самарский А.А., Михайлов А.П. <<Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры>>**

В статьях [1, 2] рассматривалось математическое моделирование склонов при действии на них статических нагрузок. В данной статье будут исследоваться те же задачи, но при больших деформациях и пере-

мещения склонов и действию на них динамической нагрузки. Под ней понимается переменная нагрузка, изменяющаяся во времени быстрее, чем рассеиваются вызванные ею в грунте склона напряжения. Практически все динамические нагрузки являются циклическими (однократными или многократными) и представляют собой колебания – чередование во времени (периодическое и непериодическое) возрастания и убывания напряжений [3]. По особенностям воздействия на грунты весь спектр природных и техногенных динамических нагрузок можно разделить на две группы – вибрационные и импульсные. Все практически значимые для инженерной деятельности нагрузки, как показано на рисунке 1, находятся до частот 100 Гц.

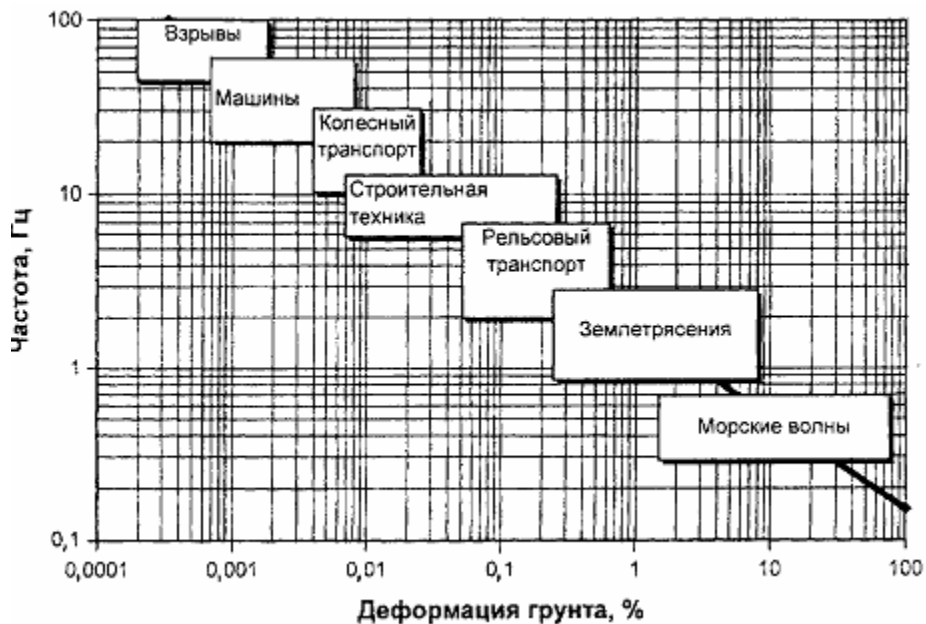


Рис. 1. Обобщенная характеристика динамических нагрузок разного происхождения

Как показано в [4], постановку задачи о математическом моделировании можно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа. Кратко рассмотрим эти этапы применительно к склонам, которые находятся под воздействием собственного веса и приложенных ранее статических, а затем динамических нагрузок. Как отмечено выше, только статическое нагружение склонов исследовалось ранее, поэтому, учитывая эти результаты, сразу перейдем к их динамическому нагружению. Но под действием статических и динамических нагрузок в склонах могут возникать большие деформации и перемещения, которые также должны быть учтены в модели склона и определены из расчетов. В этом случае, используя лагранжев подход, где переменными являются материальные

координаты  $x_k$  и  $t$ , вектор перемещения  $\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k$  определяется для материальной частицы склона в момент времени  $t$  как

$$\mathbf{u}(x_k, t) = \mathbf{X}(x_k, t) - \mathbf{x}(x_k, t_0),$$

а связь между тензором деформации Коши-Грина  $\mathbf{C}$  и вектором перемещений  $\mathbf{u}$  находится в виде [5]

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} (\dot{\nabla} \mathbf{u} + \dot{\nabla} \mathbf{u}^T + \dot{\nabla} \mathbf{u} \cdot \dot{\nabla} \mathbf{u}^T), \quad \gamma_{ks} = \frac{1}{2} (u_{k,s} + u_{s,k} + u_{t,k} u_{t,s}). \quad (1)$$

Это соотношение, записанное в приращениях и в линеаризованной по  $\Delta u_i$  форме, можно представить как

$$\Delta \gamma_{ks}^{\wedge} = \frac{1}{2} [(\delta_{ms} + u_{m,s}) \Delta u_{m,k} + (\delta_{mk} + u_{m,k}) \Delta u_{m,s}] \quad (2)$$

При решении нелинейных задач возникают сложности, связанные с отсутствием информации об актуальной конфигурации  $V_t$ , в которой определяется тензор напряжений Коши  $\sigma$ . Поэтому при решении нелинейных задач удобнее находить напряженное состояние с применением отсчетной конфигурации  $V_0$ , которая описывается исходными данными. В связи с этим, приходится оперировать с возникающими тензорами напряжений, определенными в этой конфигурации. Из них здесь будет использоваться только симметричный тензор напряжений Кирхгофа  $\mathbf{K}$ , который определяется через тензор напряжений Коши следующим образом

$$\mathbf{K} = \sqrt{D} \nabla \mathbf{x}^T \cdot \sigma \cdot \nabla \mathbf{x}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{D}} \dot{\nabla} \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \dot{\nabla} \mathbf{X}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор материальной частицы грунта относительно системы отсчета, а  $\mathbf{X}(x_k, t)$  – радиус-вектор, определяющий положение материальной частицы в актуальной конфигурации также относительно системы отсчета.

На первом этапе строится модель рассматриваемой сложной системы, которая в математической форме отображает важнейшие ее свойства, формулируемые в виде фундаментальных законов природы. В работе [5] показано, что грунты склонов даже под действием собственного веса находятся в упругопластическом состоянии, поэтому их модель должна учитывать этот фактор. Грунты склонов обычно подвержены сложным нагружениям, следовательно, деформационные теории пластичности не применимы. Поэтому должна использоваться более сложная теория пластического течения с упрочнением. Элементарная работа внешних сил, отнесенных к единице объема отсчетной конфигурации, определяется через тензор напряжений Кирхгофа как [5]

$$\delta a = \mathbf{K} : \delta \mathbf{C}.$$

Здесь символ «:» обозначает дойное скалярное умножение. Тензоры, разделенные этим символом, называются сопряженной парой тензоров. Для этого случая уравнение состояния в приращениях можно записать в следующем виде [5]:

$$\Delta \kappa_{ij} = \bar{D}_{ijnm} \Delta \gamma_{nm}^A, \quad (4)$$

где

$$\bar{D}_{ijnm} = D^{(N)} D_{\alpha\beta\xi\eta} x_{i,\alpha} x_{j,\beta} x_{n,\xi} x_{m,\eta}, \quad \sqrt{D} = |X_{\kappa,s}|.$$

Физико-механические параметры грунтов, характеризующие их свойства, которые необходимы для этой теории, могут быть определены по методике, приведенной, например, в работе [6].

Уравнение движения, равновесия и статические граничные условия с применением тензора Кирхгофа  $\mathbf{K}$  являются нелинейными, они зависят от деформированного состояния сплошной среды. Так соотношения принципа виртуальной работы, определенные в полных напряжениях и в приращениях, которые выполняются независимо от того являются ли грунты склона твердыми, жидкими, упругими или пластичными, приведены в компонентной форме в следующем виде:

$$\int_{\dot{V}} \left[ \kappa_{sm} \delta \gamma_{sm} + \left( \rho \ddot{\mathbf{u}}_m + \mathbf{c}_m \dot{\mathbf{u}}_m - \dot{\mathbf{F}}_m \right) \delta \mathbf{u}_m \right] d\dot{V} - \int_{\dot{S}_i} \dot{\mathbf{q}}_m \delta \mathbf{u}_m d\dot{S} - \int_{\dot{S}_p} \dot{\mathbf{p}}_m \delta \mathbf{u}_m d\dot{S} = 0, \quad t \in (0, \infty),$$

$$\int_{\dot{V}} \left\{ \begin{aligned} & \Delta \kappa_{sm} \delta \Delta \gamma_{sm}^A + \left( \rho \Delta \ddot{u}_s + c_s \Delta \dot{u}_s \right) \delta u_s + \\ & + \frac{1}{2} \kappa_{sm} \delta \left( \Delta u_{n,s} \Delta u_{n,m} \right) - \Delta \dot{F}_s \delta \Delta u_s + \\ & \left[ \kappa_{sm} \delta \Delta \gamma_{sm}^A + \left( \rho \ddot{u}_s + c_s \dot{u}_s - \dot{F}_s \right) \delta \Delta u_s \right] \end{aligned} \right\} d\dot{V} - \int_{\dot{S}_i} \left( \Delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \right) \delta \Delta u_s d\dot{S} - \int_{\dot{S}_p} \left( \Delta \dot{p}_s + \dot{p}_s \right) \delta \Delta u_s d\dot{S} = 0, \quad (5)$$

$$t \in (0, \infty).$$

Интегралы в (5) вычисляются в отсчетной конфигурации, т.е. их пределы интегрирования известны заранее по исходным данным и не зависят от определяемых неизвестных величин, которыми являются перемещения.

При исследовании задач с малыми удлинениями и сдвигами принимается, что актуальные конфигурации склона  $V_t$  совпадают с его отсчетной конфигурацией  $V_0$ . Это существенно облегчает решение. Но

при деформировании с более 10 % градиентами перемещений такой подход может привести к качественно и количественно неверным результатам. Поэтому процесс решения задач с большими деформациями порождает дополнительные трудности, связанные, во-первых, с геометрической нелинейностью исходных уравнений и, во-вторых, с отсутствием информации об актуальных конфигурациях тела  $V_t$ .

Первая проблема приводит к введению различных тензоров напряжений и деформаций и к двум основным подходам в исследовании задач механики: Лагранжа и Эйлера. Здесь при решении рассматриваемой задачи используем уравнения в формулировке Лагранжа. Основным преимуществом такого подхода является постоянство области изменения пространственных переменных. Хотя информация об актуальных конфигурациях в процессе расчета необходима, но применение методов инкрементального типа вносит существенные упрощения в реализацию проблемы решения. Вторая проблема порождает широко используемые методы решения задач инкрементального (скоростного) типа. Такой подход позволяет одно полное нагружение заменить на эквивалентный ряд малых последовательных шагов и определять конфигурацию тела, а также напряжения и деформации, на последующем шаге из предыдущего, на котором они известны. В этом случае в качестве отсчетной конфигурации последующего нагружения принимается актуальная конфигурация предыдущего. Это дает возможность процесс определения результатов для каждого нагружения записывать в виде однотипных операций, используя алгоритм решения геометрически линейных задач, которые рассмотрены в [2].

Поставленная задача решается в два этапа. На первом этапе рассматривается статическая задача определения напряженно-деформированного состояния склона от действия собственного веса грунтового массива и ранее приложенных к нему статических нагрузок. На втором этапе решается динамическая задача от действия, например, сейсмических сил. На этих этапах необходимо реализовать две проблемы:

- 1) дискретизацию области, занимаемой склоном, и дискретизацию исходных уравнений;
- 2) построение итерационного процесса для определения искомых функций, характеризующих напряженно-деформированное состояние тела с наперед заданной прочностью.

Решение первой проблемы позволяет представить рассматриваемую задачу в алгебраической форме, т.е. перейти от бесконечного числа степеней свободы склона к конечному числу. Ее можно реализовать, используя различные проекционные методы. Здесь применен метод конечных элементов. Решение этой проблемы и статические методы расчета подробно изложены в [2]. Решение второй проблемы дает возможность произвести линеаризацию исходных нелинейных уравнений. При этом операцию по корректировке их коэффициентов можно выполнять на каждой итерации решения или через их заданное число.

Перейдем к решению динамических задач. В матричной форме в момент времени  $t_n$  уравнение движения тела преобразуется к следующему виду

$$\left( M + \frac{I}{\rho} [h]^T [H]^{-1} h \right) \ddot{\delta}_n + C \dot{\delta}_n + K(\delta_n) \delta_n = Q_n. \quad (6)$$

Здесь первое слагаемое в круглых скобках есть матрица масс, которая для каждого конечного элемента равна

$$M_{(e)}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{(e)}^i]^m \rho_{(e)} [N_{(e)}^j] h_{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\eta_1 d\eta_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 m_{(e)}^{ij} d\eta_1 d\eta_2.$$

Второе слагаемое в скобках (6) называется матрицей присоединенных масс, она учитывает влияние водной среды на склон при его колебаниях [5]. Обозначим сумму в скобках через  $\overline{M}$  и назовем ее приведенной массой.

Второе слагаемое в (6) есть матрица демпфирования, которая для каждого конечного элемента равна

$$C_{(e)}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N_{(e)}^i]^m c_{(e)} [N_{(e)}^j] h_{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\eta_1 d\eta_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 c_{(e)}^{ij} d\eta_1 d\eta_2.$$

Свойства матрицы  $C$  зависят не только от диссипативной энергии материалов склонов, но и от их конструктивных особенностей. Поэтому часто для определения матрицы  $C$  используют гипотезу Релея, согласно которой эта матрица определяется как линейная суперпозиция матриц масс и жесткости

$$C = \alpha M + \beta K.$$

Константы  $\alpha$  и  $\beta$  определяются с использованием коэффициентов затухания  $\zeta_i$  для двух независимых частот колебаний или другими способами. Достоинство этого метода заключается в том, что матрица  $C$  становится ленточной как и матрицы  $M$  и  $K$ , что очень важно при численной реализации решения рассматриваемых задач, так как нет необходимости отдельно от матриц  $M$  и  $K$  вычислять матрицу  $C$ .

$K(\delta)$  в (6) называется матрицей жесткости системы, которая зависит через матрицу  $D$  от вектора глобальных узловых перемещений  $\delta$ . Она подробно рассмотрена в [2].  $Q$  – действующая на склон динамическая нагрузка.

Заданный по условию задачи отрезок времени от 0 до  $T$ , на котором определяются из решения искомые величины  $\delta$ ,  $\dot{\delta}$  и  $\ddot{\delta}$ , делится на  $N$  временных интервалов  $\Delta t_i$  которые могут иметь разные значения.

Решение определяется в дискретных точках  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , расположенных на расстоянии  $\Delta t_i$  друг от друга. Изменение перемещений, скоростей и ускорений внутри каждого временного интервала  $\Delta t_i$  будет влиять на точность, устойчивость и продолжительность процесса решения. Алгоритмы шаговых методов, которые будут здесь реализованы, предполагают, что для определения решения в момент времени  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$  все значения  $\delta_n, \dot{\delta}_n, \ddot{\delta}_n$  для момента времени  $t_n$  известны. Следовательно, чтобы начать стартовую процедуру решения, должны быть заданы или определены заранее при  $t_0 = 0$  начальные значения  $\delta_0, \dot{\delta}_0$  и  $\ddot{\delta}_0$ . Для вычисления перемещения  $\delta_{n+1}$  необходимо использовать уравнение (6) в момент времени  $t_n$  или  $t_{n+1}$ . В зависимости от этого методы решения подразделяются на методы явного или неявного интегрирования. Классические алгоритмы этих методов использовались в основном для решения линейных задач, например, в работе [7]. Для рассматриваемых здесь упругопластических задач эти методы могут быть использованы только после существенной модификации.

Для решения уравнения (6) использовались как методы явного, так и неявного интегрирования. Решения показали, что для рассматриваемых задач наиболее приемлемыми являются методы второго типа. Основным недостатком явных методов решения является их условная устойчивость. Это свойство заключается в том, что шаг интегрирования  $\Delta t$  должен быть меньше критического значения  $\Delta t_{cr}$ , которое определяется из следующего соотношения [7]:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi},$$

где  $T_n$  – наименьший период собственных колебаний склона.

Уменьшение временного шага  $\Delta t$  на заданном отрезке времени  $[0, T]$  вызывает отрицательное последствие, связанное с увеличением времени счета на ЭВМ. Примеры, приведенные в [8] показали, что для устойчивого счета необходимо было принимать  $\Delta t < 0,00001$ с. Например, на отрезке заданного времени равным 10с требовалось выполнить 100000 обходов расчетной области склона (по всем узлам конечных элементов расчетной схемы склона), что занимает много времени ЭВМ.

Поэтому здесь остановимся на методе Ньюмарка и его возможных модификациях, которые относятся к методам неявного интегрирования.

Для определения перемещения  $\delta_{n+1}$  в момент времени  $t_{n+1}$  получено следующее уравнение:

$$\bar{\mathbf{K}}\delta_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}, \\ \mathbf{R}_{n+1} &= \mathbf{Q}_{n+1} + \bar{\mathbf{M}} \left[ \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \delta_n + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\delta}_n + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\delta}_n \right] + \\ &+ \mathbf{C} \left[ \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \delta_n + \frac{1}{\alpha} (\alpha - \beta) \dot{\delta}_n + \frac{\Delta t}{2\alpha} (\beta - 2\alpha) \ddot{\delta}_n \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Начальными условиями для метода Ньюмарка являются

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \bar{\delta}, \quad \dot{\delta}_0 = \bar{\dot{\delta}}, \\ \ddot{\delta}_{n+1} &= \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} (\delta_{n+1} - \delta_n) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\delta}_n + \frac{1}{2\alpha} (1 - 2\alpha) \ddot{\delta}_n, \\ \dot{\delta}_{n+1} &= \frac{\beta}{\alpha \Delta t} (\delta_{n+1} - \delta_n) - \frac{1}{\alpha} (\alpha - \beta) \dot{\delta}_n + \frac{\Delta t}{2\alpha} (2\alpha - \beta) \ddot{\delta}_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\bar{\delta}$ ,  $\bar{\dot{\delta}}$  – заданные значения вектора перемещений и вектора скорости при  $t_0 = 0$ .

Алгоритм решения упругопластических задач будет существенно отличаться от алгоритма решения линейных задач [7] по следующим причинам:

1. Пластические деформации определяются в приращениях, поэтому уравнение (7) будут содержать в левой части не  $\delta_{n+1}$ , а вектор приращения для узловых перемещений  $\Delta\delta_{n+1}$ .

2. При численном решении уравнения (7) в приращениях в каждый момент времени происходит накопление различных ошибок округления, поэтому в правой части этого уравнения будет вместо вектора  $\mathbf{R}_{n+1}$  входить вектор невязки, который имеет следующий вид:

$$\Delta\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{Q}_{n+1} - \bar{\mathbf{M}}\dot{\delta}_{n+1} - \mathbf{C}\dot{\delta}_{n+1} - \mathbf{K}(\delta)\delta_{n+1}. \quad (10)$$

Поэтому необходимо строить дополнительный итерационный процесс для уменьшения этой невязки до наперед заданной малой величины.

3. При приближенном решении полный вектор напряжений  $\kappa_n$  может выходить за пределы области ограниченной поверхностью нагружения, что в упругопластических задачах недопустимо. Поэтому необходимо строить процедуру возвращения вектора  $\kappa_n$  в указанную область.



В момент времени  $t_{n+1}$  на  $i$ -й итерации уравнение (7), записанное в приращениях, принимает следующий вид:

$$\bar{\mathbf{K}}(\delta_{n+1}^i) \Delta \delta_{n+1}^i = \Delta \mathbf{R}_{n+1}(\delta_{n+1}^i). \quad (11)$$

Для итерации  $i+1$  вектор узловых перемещений определяется как

$$\delta_{n+1}^{i+1} = \delta_{n+1}^i + \Delta \delta_{n+1}^i.$$

Итерационный процесс на  $i$ -й итерации заканчивается, если выполняется условие

$$\frac{\|\Delta \delta_{n+1}^i\|}{\|\delta_{n+1}^i + \Delta \delta_{n+1}^i\|} \leq \varepsilon_0, \quad (12)$$

где  $\varepsilon_0$  – наперед заданная точность решения.

Если в момент времени  $t_{n+1}$  выполняется условие (12), то решение принимается равным  $\delta_{n+1} = \delta_{n+1}^{i+1}$ .

На каждой итерации необходимо заново вычислять вектор невязки  $\Delta \mathbf{R}(\delta_{n+1}^i)$  и матрицу  $\bar{\mathbf{K}}(\delta_{n+1}^i)$ , в которую входит матрица  $\mathbf{K}(\delta_{n+1})$ , а последняя сложным образом выражается через векторы  $\kappa$ ,  $\gamma^p$ ,  $\chi$ , определяемые через производные от функции нагружения. При обращении матрица  $\bar{\mathbf{K}}(\delta_{n+1}^i)$  на каждой итерации можно строить решение по методу касательных жесткостей. В этом случае приходится при применении методов исключения по Гауссу выполнять для больших систем алгебраических уравнений трудоемкий прямой и обратный ход, что требует значительных затрат времени ЭВМ.

Можно корректировать матрицу  $\bar{\mathbf{K}}(\delta_{n+1}^i)$  не на каждой итерации, а через заданное их число. Такая процедура сокращает время решения системы алгебраических уравнений, но сходимость итерационного процесса замедляется. Например, итерационный процесс по методу касательных жесткостей записывается в виде

$$\Delta \delta_{n+1}^{i+1} = \Delta \delta_{n+1}^i - \bar{\mathbf{K}}^{-1}(\delta_{n+1}^i) \Delta \mathbf{R}(\delta_{n+1}^i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Часто вместо матрицы  $\bar{\mathbf{K}}(\delta_{n+1}^i)$  используют матрицу  $\bar{\mathbf{K}}_0(\delta_{n+1})$ , которая вычисляется на первой итерации. В этом случае процесс решения называется методом начальных жесткостей, в котором прямой ход при исключении по Гауссу выполняется один раз, а обратный ход, требующий во много раз меньше затрат времени ЭВМ, реализуется на каждой

итерации. Итерационный процесс по методу начальных жесткостей записывается как

$$\Delta \delta_{n+1}^{i+1} = \Delta \delta_{n+1}^i - \bar{\mathbf{K}}^{-1}(\delta_{\circ}) \Delta \mathbf{R}(\delta_{n+1}^i), \quad i = 0, 1, 2 \dots \quad (14)$$

При выполнении итерационного процесса (12) или (13) требуется использовать процедуру возвращения вектора напряжений  $\mathbf{k}$  в область, ограниченную функцией нагружения.

При реализации итерационного процесса приходится решать систему линейных алгебраических уравнений. Для этого использовался фронтальный метод [9]. В этом методе исключение неизвестных производится в порядке, определенном нумерацией элементов. Нумерация самих же неизвестных не играет никакой роли в решении. Поэтому исключение неизвестных выполняется одновременно с формированием уравнений, причем все это происходит в оперативной памяти ЭВМ.

Общий алгоритм решения по неявному методу выполняется в следующей последовательности.

1. Задаются исходные данные: геометрические параметры тела; тип решаемой задачи; механические характеристики материалов тела, т.е. грунтов; временные параметры; действующие нагрузки; начальные напряжения; приложенные сосредоточенные массы.

2. Формируется матрица сосредоточенных или распределенных масс, матрица присоединенных масс и матрица демпфирования.

Строится цикл по моментам времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Пусть определены все искомые данные для момента времени, начиная от  $t_1$  до  $t_n$ .

Необходимо произвести вычисления для времени  $t_{n+1}$ .

Организуется итерационный процесс по индексам  $i = 1, 2, \dots$

3. Определяются значения  $\delta_{n+1}^i, \dot{\delta}_{n+1}^i, \ddot{\delta}_{n+1}^i$  по формулам (9).

При равенстве  $i = t_1$  они находятся из начальных условий

$$\delta_1 = \bar{\delta}, \quad \dot{\delta}_1 = \bar{\dot{\delta}}, \quad \ddot{\delta} = 0. \quad (15)$$

4. Вычисляются элементы матрицы  $\bar{\mathbf{K}}(\delta_{n+1}^i)$ . Если используется метод касательных жесткостей, то эта матрица определяется при каждом значении  $i$ , иначе, в зависимости от модификации метода решения только для некоторых значений  $i$ .

5. По формуле (10) определяется вектор невязки (вектор эффективной нагрузки).

6. Выполняется процедура возвращения вектора напряжений в область, ограниченную поверхностью нагружения. Этот шаг реализуется только для упругопластических задач [2].

7. По первой формуле из (8) формируется матрица жесткости  $\bar{\mathbf{K}}$ , если используется метод касательных жесткостей, в противном случае она берется из предыдущей итерации.

8. Решается уравнение (11).

9. Определяются исправленные значения векторов перемещений, скоростей и ускорений по формулам:

$$\begin{aligned}\delta_{n+1}^{i+1} &= \delta_{n+1}^i + \Delta \delta_{n+1}^i, \\ \dot{\delta}_{n+1}^{i+1} &= (\delta_{n+1}^{i+1} - \delta_{n+1}^-) / [\beta (\Delta t)^2], \\ \ddot{\delta}_{n+1}^{i+1} &= \ddot{\delta}_{n+1}^i + \Delta t \beta \dot{\delta}_{n+1}^{i+1}.\end{aligned}$$

10. По формуле (12) делается проверка сходимости итерационного процесса. Если она не выполняется, то параметр  $i$  увеличивается на единицу и осуществляется возврат к шагу 3. При выполнении условия (12) определяются следующие значения:

$$\delta_{n+1} = \delta_{n+1}^{i+1}, \quad \dot{\delta}_{n+1} = \dot{\delta}_{n+1}^{i+1}, \quad \ddot{\delta}_{n+1} = \ddot{\delta}_{n+1}^{i+1}.$$

Цикл по  $i$  заканчивается, временная переменная увеличивается на единицу и процесс решения начинается с шага 3. Если  $t = t_N$ , то решение задачи заканчивается.

Метод Ньюмарка безусловно устойчив при выполнении неравенств  $\beta \geq 0,5$ ,  $\alpha \geq 0,25 (0,5 + \beta)^2$ . Если используется  $\beta \geq 0,5$ , то колебания с высшими частотами будут подавляться, а затухание в основных тонах будет проявляться значительно слабее. Для создания искусственного демпфирования можно принимать  $\alpha = 0,28$  и  $\beta = 0,55$ . В этом случае допускается исключать из уравнения (6) и всех последующих соотношениях матрицу демпфирования  $\mathbf{C}$  и таким образом экономить время вычисления. Наивысшая точность метода Ньюмарка достигается при  $\alpha = 0,25$  и  $\beta = 0,5$ .

Безусловная устойчивость метода Ньюмарка позволяет во много раз увеличить временной интервал  $\Delta t$  по сравнению с явными методами. Это особенно важно в задачах, когда требуется определить влияние колебательных процессов на сооружения, расположенные на некотором расстоянии от мест приложения динамических нагрузок.

Предложенная методика для неявного метода была реализована для вычислений на ЭВМ в системе Delphi и включена в программный комплекс решения нелинейных задач.

Рассмотрим пример склона, расчетная схема которого показана на рисунке 2. Другие различные примеры исследования склонов рассмотрены в работе [10]. Полагаем, что в его грунтах процесс консолидации закончился, т.е. они могут быть описаны моделью сплошной квазиоднофазной среды.

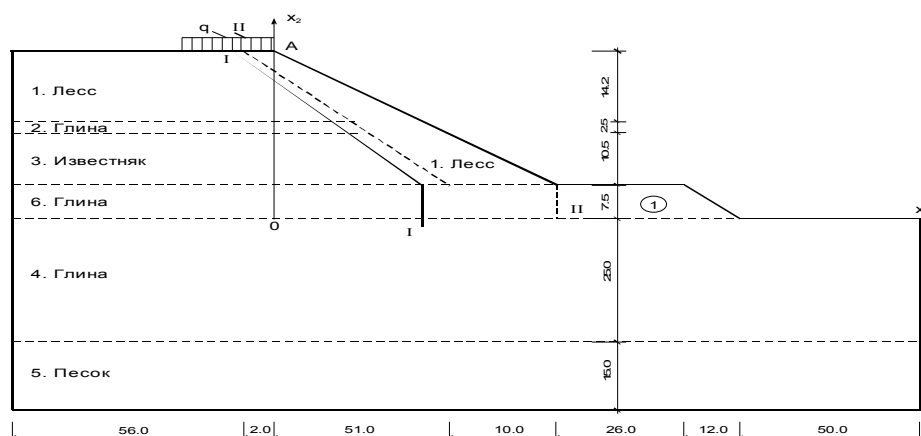


Рис. 2. Расчетная схема склона

Основные механические характеристики грунтов склона приведены в следующей таблице.

Номер	Грунт	Е МПа	$\mu$	$\rho$ кг/см <sup>3</sup>	с МПа	$\phi$ градусы
1.	Лесс	8,6	0,3	0,0016	0,023	24
2.	Глина	10,4	0,4	0,0016	0,024	15
3.	Известняк	9,0	0,2	0,0017	0,021	23
4.	Глина	16,0	0,4	0,002	0,02	18
5.	Глина	14,0	0,4	0,0016	0,01	14
6.	Песок	28,0	0,3	0,0016	0,005	26

Пусть грунты склона находятся под действием только собственного веса, нагрузка  $q$  отсутствует. Определение напряжений и деформаций, возникших в грунтах от такого, казалось бы, простого воздействия, является на самом деле очень сложной, а если быть точным, то неразрешимой задачей. Неизвестно, когда и как произошло образование грунтового массива, какие процессы за это время происходили в нем, и какое дополнительное нагружение они испытывали, т.е. начальное напряженно-деформированное состояние грунтов склона зависит от истории его формирования. Поэтому принимаем гипотезу, что в массиве грунта отсутствуют начальные напряжения и деформации до определения их напряженно-деформированного состояния от действия собственного веса и в расчете учитываются только их деформационные и прочностные параметры, вычисленные по экспериментальным данным.

Принимается, что в качестве функции нагружения используются условия Кулона-Мора и производится упругопластический расчет с применением предложенной выше модели, базирующейся на теории пластического течения с упрочнением.

На рисунке 3 показана эпюра касательных  $\sigma_{12}$  напряжений по сечению I-I, полученная из расчета.



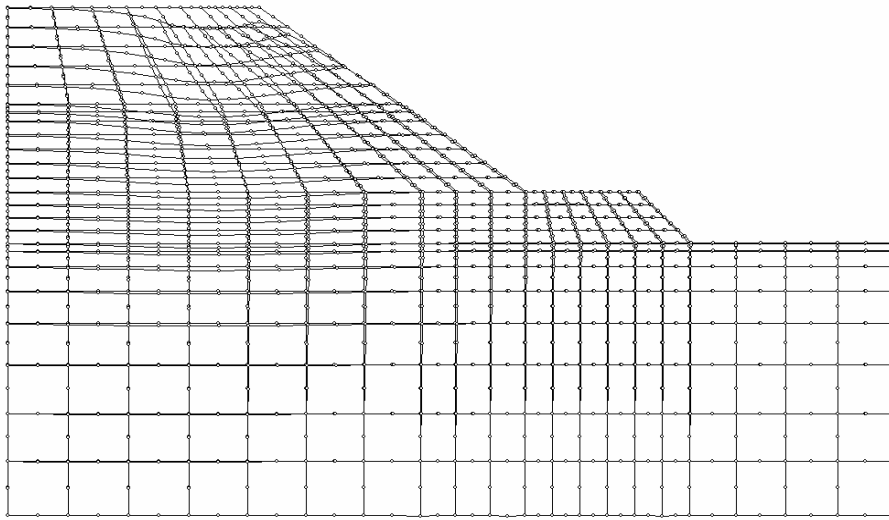
Рис. 3. Эпюра касательных напряжений  $\sigma_{12}$  по сечению I-I

Пусть на плато склона действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q = 0,1$  МПа. От действия этой нагрузки произойдет деформация склона, приведенная в увеличенном масштабе на схеме рисунке 4.

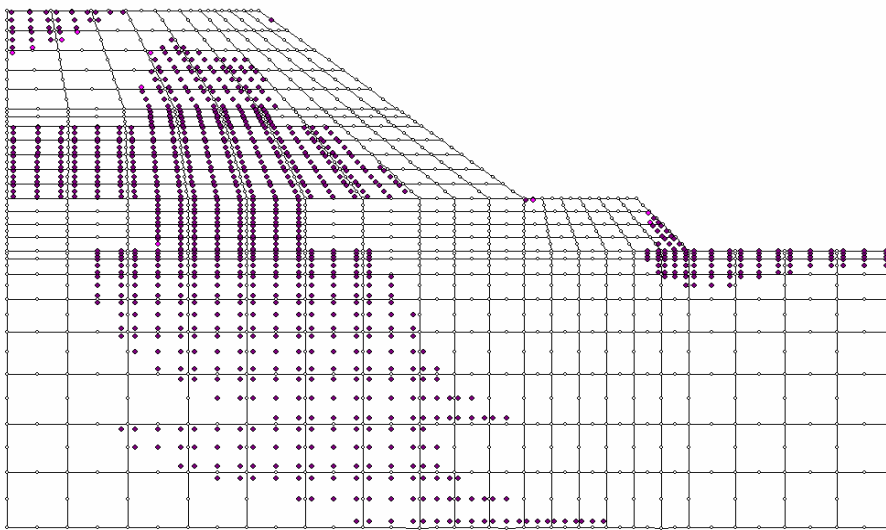
Расширятся зоны, в которых грунты перейдут в упругопластическое состояние. Они показаны на схеме рисунке 5.

Пусть грунт склона, расположенный на вертикальной плоскости с координатой  $x_1 = -60$  м получил вправо мгновенное горизонтальное смещение на 10 см. Такое смещение вызывает колебание склона. На границах, ограничивающих склон, волны колебаний не отражаются, а свободно пропускаются.

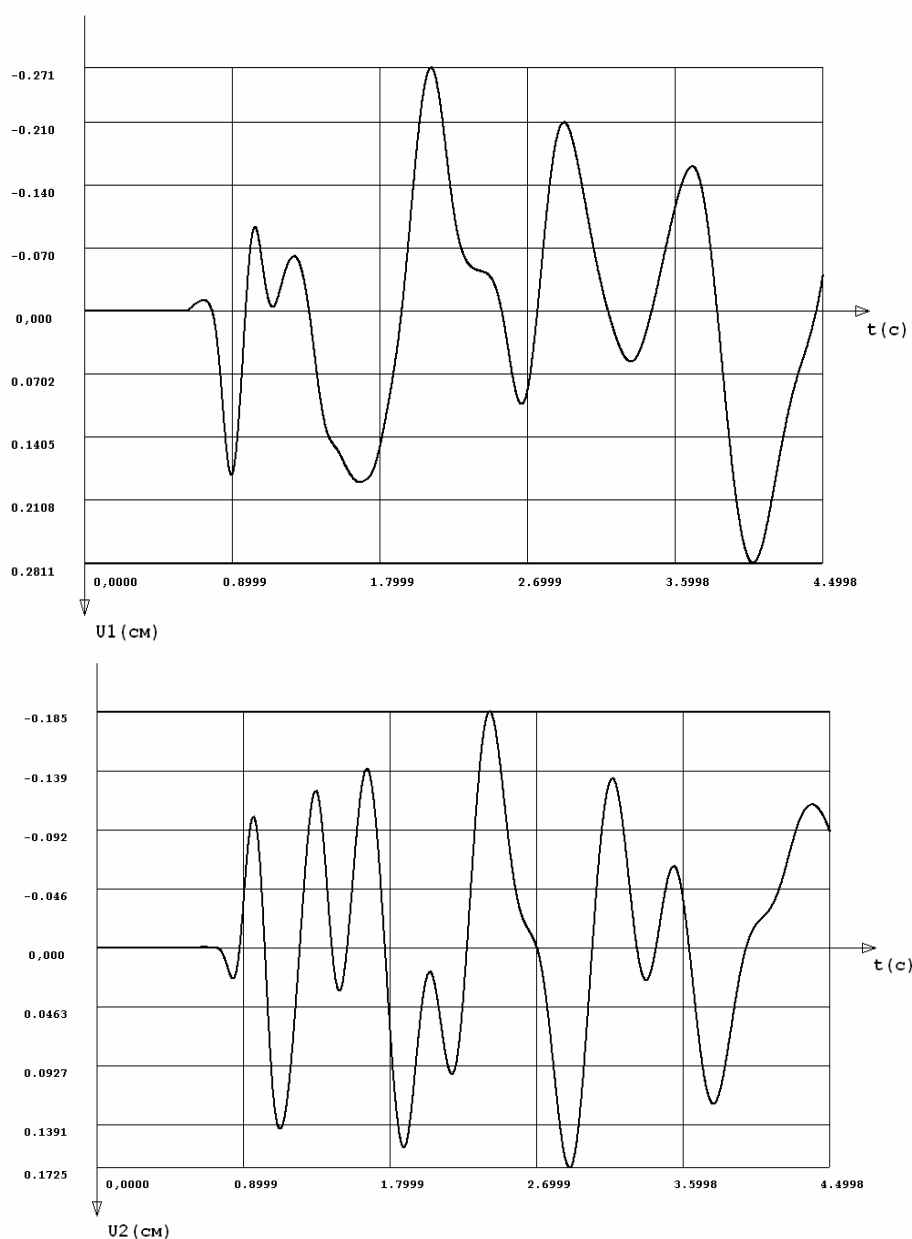
На рисунке 6 показаны эпюры горизонтальных и вертикальных колебаний перемещений в точке А от заданного смещения. Вследствие различных отражений волн и их наложения, эти колебания отличны от классических гармонических колебаний. Они начинаются не сразу после приложения заданных смещений, а через 0,7 с, но затухают приблизительно через 9,7 с.



*Рис. 4. Схема деформирования уположенного откоса от действия нагрузки  $q = 0,1$  МПа*

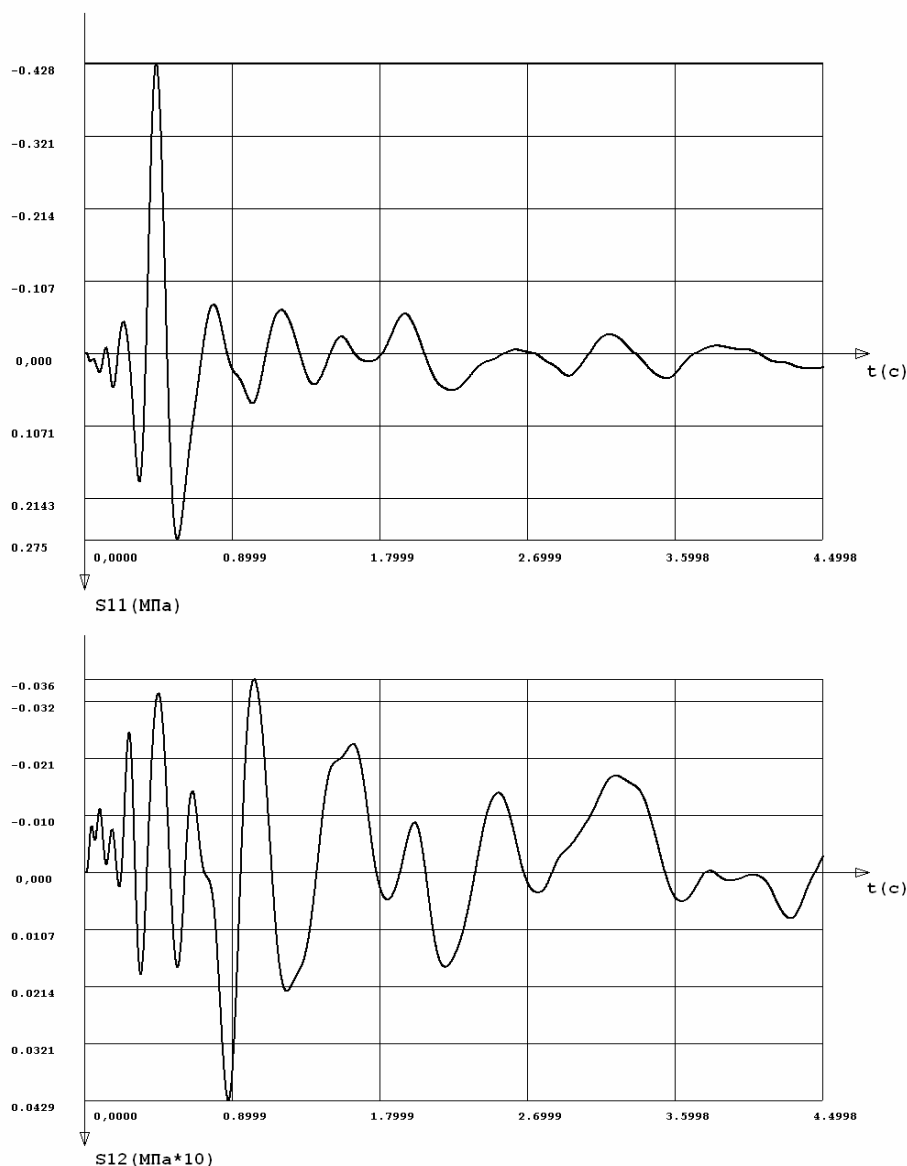


*Рис. 5. Схема образования упругопластических зон в уположенном склоне от действия нагрузки  $q$  и собственного веса*



*Рис. 6. Эпюры горизонтальных и вертикальных колебаний перемещений точки А от заданного смещения*

На рисунке 7 приведены эпюры колебаний нормальных и касательных напряжений в точке В, координаты которой равны  $(-1, +1)$  м, только от заданных смещений. Максимальные амплитуды колебаний возникают в интервале времени от 0,4 с до 1 с и затем начинают быстро затухать.



*Рис. 7. Эпюры нормальных и касательных колебаний напряжений точки В только от заданного смещения*

Возможности комплекса программ не исчерпываются только решением задач, связанных с сейсмичностью, от заданных мгновенных начальных смещений части грунта склона. Можно также выполнять решения от заданных начальных скоростей части грунта или сразу от обоих воздействий. Также можно вводить акселерограммы землетрясений и от них определять напряженно-деформированное состояние грунта склона.



### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гришин В.А., Гришин А.В. Математическое моделирование склонов (1) // Вісник ОНМУ. – № 38. – 2013. – С. 109-130.
2. Гришин В.А., Гришин А.В. Математическое моделирование склонов (2) // Вісник ОНМУ. – № 38. – 2013. – С. 131-148.
3. Вознесенский Е.А. Динамическая неустойчивость грунтов. – М.: УРСС Эдиториал, 1999. – 264 с.
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
5. Гришин В.А., Дорофеев В.С. Некоторые модели грунтовой среды. – Одесса: Внеширрекламсервис, 2007. – 310 с.
6. Болдырев Г.Г. Методы определения механических свойств грунтов. Состояние вопроса. – Пенза: ПГУАС, 2008. – 696 с.
7. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
8. Гришин А.В., Федорова Е.Ю. Нелинейная динамика ограждающих сооружений. – Одесса: ОНМУ, 2002. – 239 с.
9. Irons B.D. A frontal solution program for finite element analysis // Int. J. Numerical Method Eng. – Vol. 2. – 1970. – P. 5-32.
10. Гришин В.А., Снисаренко В.И. Одесские склоны и оползни. – К.: МП Леся, 2008. – 300 с.

Стаття надійшла до редакції 25.09.2014

#### Рецензенти:

кандидат технічних наук, доцент кафедри «Теоретична та прикладна механіка» Одеського національного морського університету  
**Е.П. Лукаш**

кандидат технічних наук, доцент кафедри «Теоретична та прикладна механіка» Одеського національного морського університету  
**В.В. Олейніков**