УДК 622.625.28-592.112(043.5)

А.Н. Коптовец

МЕТОДИКА АНАЛИЗА ФРИКЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТОРМОЗЕ МЕТОДОМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Выполнена адаптация методов корреляционного и спектрального анализа нелинейных колебаний для определения характеристик нормальных и тангенциальных фрикционных контактных колебаний. В результате вычислительных экспериментов выполнена верификация разработанных алгоритмов и программного обеспечения. Установлено возникновение фрикционных колебаний в упругодемпфирующей системе, в которой не вводится искусственная разница между статическим и динамическим коэффициентами трения.

***Ключевые слова**: сила трения, скорость скольжения, обратная реактивность, нелинейные колебания, адаптация, вычислительный алгоритм, моделирование, проектирование.*

Виконана адаптація методів кореляційного і спектрального аналізу нелінійних коливань для визначення характеристик нормальних і тангенціальних фрикційних контактних коливань. В результаті обчислювальних експериментів виконана верифікація розроблених алгоритмів і програмного забезпечення. Встановлено виникнення фрикційних коливань в пружньодемпфуючій системі, в якій не вводиться штучна різниця між статичним і динамічним коефіцієнтами тертя.

***Ключові слова**: сила тертя, швидкість ковзання, зворотна реактивність, нелінійні коливання, адаптація, обчислювальний алгоритм, моделювання, проектування.*

Adaptation of methods of correlation analysis and frequency analysis of nonlinear vibrations has been performed to determine characteristics of normal and tangential frictional contac tvibrations. Results of computational experiments makeit possible toveri fydeveloped algorithms as well as software. On setoffrictional vibration has been identified with in elastic damping system where manufactured difference between static frictional coefficient and dynamic one is not introduced.

***Keywords**: friction, sliding velocity, back reactance, nonlinear vibrations, adaptation, computational algorithm, simulation, engineering design.*

Введение. На всех видах транспорта в качестве зависимости коэффициента трения от скорости движения и тормозного нажатия принята эмпирическая формула, вид которой принят на основании феноменологических представлений, что является причиной неустойчивости решений в разных областях экспериментальных условий. При аппроксимации экспериментальных зависимостей характеристики тормоза, вид эксперимента, обработка и представление результатов его построены без определенных предпосылок [1].

Для повышения технического уровня подвижного состава всех видов транспорта ставится одна и та ж задача изменения силы (коэффициента) трения тормоза по величине и в функции скорости движения. Сила (коэффициент) трения тормоза обладает обратной реактивностью, то есть при увеличении скорости движения уменьшается. Особенно эффективным является решение этой задачи для скорости движения до 5 м/с, что характерно для шахтного подвижного состава. При этом тормоз не рассматривается как система, статистически задача решается в условиях структурной неопределенности и неидентифицируемости параметров [2]. Торможение рассматривается как задача в механике твердого тела в виде эмпирической науки о трении. Решения контактных задач с трением и контактных фрикционных колебаний, построение моделей трибомеханики в тормозостроении не применяются [3].

Тенденции мирового развития тормозной техники [4, 5, 6] свидетельствуют о том, что эмпирически, методом проб и ошибок осуществляется выбор материалов с фрикционными свойствами, которые бы позволили достичь требуемых показателей назначения тормоза и эффективности торможения. Выявленные по результатам патентных исследований тенденции развития тормозного оборудования свидетельствуют о том, что фрикционные тормоза колодочно-колесного типа являются основными для подвижного состава всех видов транспорта, но не имеют технических решений изобретений, которые бы реализовали создание шахтного подвижного состава высокого технического уровня по эффективности тяги и торможения с неизменным коэффициентом трения тормоза в диапазоне изменения эксплуатационной скорости движения.

Для определения потенциальных свойств тормоза нет решения задач: закономерности диссипации энергии торможения в тормозном механизме; методы прогнозирования фрикционных свойств при производстве трибологических материалов.

В структуре тормозной системы звенья привода, передачи и тормозного механизма обладают определенной податливостью при передаче тормозного нажатия и тормозной силы [7] и их нельзя рассматривать в механизмах с абсолютно жесткими звеньями.

Построение моделей трибомеханики, которые базируются на решении контактных задач теории упругости и пластичности, является переходом от эмпирической науки к фундаментальной, что позволяет управлять процессами трения [8, 9, 10]. Коэффициент трения не может быть отнесен к какой-либо одной детали, он зависит от всех деталей трибологической системы [3]. Математическая теория не рассматривает зависимость силы (коэффициента) трения от скорости скольжения.

Практическая реализация актуальных задач транспорта, машиностроения, энергетического оборудования требует научных результатов по теоретическим основам трения для разработки инженерных методов расчета и испытаний узлов трения, создания новых принципов их конструирования и изготовления. Использование методов моделирования с обобщением результатов и оценкой достоверности и точности позволяет выявить новые технические решения и ускорить их внедрение. Можно считать установленным, что между трением и колебаниями существует двухсторонняя связь: трение порождает колебания различных видов, а колебания в свою очередь влияют на трение [11].

Важным является представление о связанности колебаний в узлах трения, нормальные и тангенциальные колебания не могут проходить независимо. Обоснован один из источников возбуждения релаксационных автоколебаний, которым является переход от статического к кинетическому трению. Скачок обусловлен возрастанием истинной поверхности касания в отдельных контактах. До этого нормальные перемещения контакта при изучении зависимости силы трения от скорости скольжения и фрикционных автоколебаний игнорировались. Свобода нормальных перемещений ползуна является причиной как фрикционных автоколебаний, так и скоростной зависимости силы трения. При устранении собственных микроколебаний ползуна имеет место нейтральная скоростная характеристика трения, что впервые разработано в теории В.А. Кудинова [12].

Таким образом, актуальной является постановка **научной проблемы**, которая состоит в разработке теоретических основ управления силой трения в рабочем процессе тормоза по величине и в функции скорости скольжения на основе идентификации совместного возбуждения кинематически вынужденных колебаний за счет дискретности и конструктивных связей контакта трения с фрикционными колебаниями.

Цель работы − идентификация и исследование характеристик фрикционных колебательных процессов в тормозе.

Постановка задачи исследования − адаптация методов анализа нелинейных колебаний, которые обеспечивают получение оценки определяющих факторов вычислительным экспериментом, имеют программную и вычислительную реализацию и дают возможность создавать тормоза на стадии проектирования с наперед заданными триботехническими свойствами.

Результаты. На первом этапе вычислительного эксперимента производится численное решение рассматриваемой динамической задачи с трением с помощью вычислительного алгоритма. В результате вычисляются временные ряды перемещений колодки $\{x^n\}$, $\{y^n\}$.

На втором этапе вычислительного эксперимента производится исследование полученных временных рядов с использованием:

– автокорреляционных функций для определения периода колебаний;

– спектрального анализа перемещений, скоростей и ускорений;

– фазовых диаграмм в переменных «перемещение-скорость»;

– зависимостей амплитуд перемещений, скоростей и ускорений от изменения параметров рассматриваемой динамической системы, получаемых методом продолжения по параметру.

Применение вычислительного алгоритма для интегрирования уравнений движения рассматриваемой динамической системы позволяет получить временные ряды перемещений колодки $\{x^n\}$ и $\{y^n\}$, описывающие перемещения колодки в дискретные моменты времени t_n, которые, как правило, берутся через равные промежутки времени h, называемые периодом дискретизации.

Известно [13], что вещественный периодический временной ряд $\{X^n\}$ с периодом K имеет периодический дискретный спектр $\{Y^k\}$, обладающий свойством симметрии

$$Y^{k+K} = Y^{k}, \qquad \text{для любого } k; \tag{1}$$

$$Y^{K-k} = Y^{k}, 0 < k < K. \tag{2}$$

Поэтому при выборе шага интегрирования по времени можно использовать эвристический подход, основанный на теореме Котельникова [13], в соответствии с которой любой непрерывный сигнал $x(t)$, спектр которого не содержит составляющих с частотой выше частоты дискретизации ω_d, может быть без потери информации представлен своими дискретными значениями, взятыми с интервалом h, удовлетворяющим неравенству

$$h < \frac{\pi}{\omega_d}. \tag{3}$$

Рассматриваемая динамическая система является диссипативной, т.к. содержит упругодемпфирующие элементы. Поэтому с течением времени движение системы устанавливается и становится периодическим. Задача исследования установившихся режимов тормозного механизма состоит в нахождении решения исходной динамической задачи с трением, удовлетворяющего условиям периодичности

$$x(t) = x(t+T),\ \dot{x}(t) = \dot{x}(t+T); \tag{4}$$

$$y(t) = y(t+T),\ \dot{y}(t) = \dot{y}(t+T), \tag{5}$$

при этом период T движения рассматриваемой динамической системы заранее неизвестен.

В настоящей работе для определения периода колебаний рассматриваемой динамической системы на основе анализа периодичности временного ряда перемещений $\{x^n\}$ и $\{y^n\}$ колодки необходимо использовать аппарат автокорреляционных функций.

Пусть известны значения дискретного сигнала (временной ряд) $\{x^{n}\}$, $n=\overline{1,N+M}$. Тогда дискретная автокорреляционная функция сигнала $\{x^{n}\}$ вычисляется по формуле

$$\psi_{m}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_{n}\cdot x_{n+m}\,,\; m=\overline{0,M}\,, \tag{6}$$

где ψ_{m}, $m=\overline{0,M}$, – дискретная автокорреляционная функция;

N, M – целые положительные числа.

Автокорреляционная функция служит мерой степени сходства сигнала с самим собой в прошлом. Если временной ряд $\{x^{n}\}$ периодичен с периодом K, то его автокорреляционная функция также обладает периодичностью

$$\psi_{m}=\psi_{m+K}\,,\; m=\overline{0,M}\,. \tag{7}$$

При этом выполняется неравенство

$$\psi_{0}>\psi_{m}\,,\; 0<m<K\,. \tag{8}$$

При практических расчетах удобно использовать масштабированную автокорреляционную функцию

$$\widetilde{\psi}_{m}=\psi_{m}/\psi_{0}\,,\; m=\overline{0,M}\,. \tag{9}$$

Очевидно, что

$$\widetilde{\psi}_{0}=1\,. \tag{10}$$

Учитывая, что временные ряды перемещений $\{x^{n}\}$ и $\{y^{n}\}$ колодки являются приближенным решением исходной задачи, условия периодичности (4)–(5) даже для установившихся движений динамической системы выполняются приближенно. Поэтому для автокорреляционной функции условие периодичности (7) также будет выполняться приближенно. При использовании масштабированной автокорреляционной функции будем считать, что её период равен K, если

$$\widetilde{\psi}_{K}>1-\varepsilon\,; \tag{11}$$

$$\widetilde{\psi}_{m}<1-\varepsilon\,,\; 0<m<K\,, \tag{12}$$

где $\varepsilon>0$ – параметр, характеризующий точность выполнения условий периодичности.

На основе анализа результатов многочисленных вычислительных экспериментов при практических вычислениях параметр ε следует выбирать в диапазоне 0,01-0,1. Необходимо отметить, что с увеличением уровня демпфирования в динамической системе значение параметра ε можно уменьшить.

Если временной ряд $\{x^n\}$ является апериодическим, то его автокорреляционная функция должна иметь конечный носитель, т. е. обращаться в нуль вне конечного интервала времени. Для конечных отрезков временных рядов критерий апериодичности можно сформулировать следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon)$ такое, что

$$|\psi_m| \le \varepsilon, \text{ для любого } m > M(\varepsilon). \tag{13}$$

Таким образом, вычисление автокорреляционной функции для данного временного ряда позволяет не только установить является ли он периодическим, но и определить его период в этом случае.

Одним из наиболее распространенных способов исследования периодических движений динамических систем является спектральный анализ. С механической точки зрения, разложение исследуемого движения в ряд Фурье соответствует его представлению в виде совокупности простых гармонических движений.

Разложение в ряд Фурье применимо как к непрерывным функциям, так и к дискретным последовательностям. При этом они представляются в виде суммы гармонических функций либо комплексных экспонент с частотами, образующими арифметическую прогрессию [13].

Пусть временной ряд $\{x^n\}$ является периодическим с периодом K, т. е.

$$x_{\mathrm{n+K}} = x_{\mathrm{n}} \text{ для любого } n. \tag{14}$$

Такой временной ряд полностью описывается конечным набором чисел, в качестве которого можно взять произвольный фрагмент длиной K, например $\{x^n\}$, $n = \overline{0, K-1}$. Известно [13], что вещественный периодический дискретный сигнал (временной ряд) имеет периодический дискретный спектр $\{x^n\}$, обладающий свойством симметрии

$$X_{\mathrm{n+K}} = X_{\mathrm{n}} \text{ для любого } n, \tag{15}$$

$$X_{\mathrm{K-n}} = X_{\mathrm{n}}, \quad 0 < n < K. \tag{16}$$

В этом случае временной ряд $\{x^n\}$ можно представить виде конечного ряда Фурье в тригонометрической форме

$$x_{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{K/2}} A_{\mathrm{k}} \cos\frac{2\pi kn}{K} + \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{K/2}} B_k \sin\frac{2\pi kn}{K}, \tag{17}$$

где A_k, B_k – коэффициенты ряда Фурье, вычисляемые по формулам

$$A_{\mathrm{k}} = \frac{2}{N}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\mathrm{K-1}} x_{\mathrm{n}} \cos\frac{2\pi kn}{K}, \ k = 1, \ldots, \frac{K}{2} - 1; \tag{18}$$

$$A_{\mathrm{k}}=\frac{1}{N}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\mathrm{K-1}}x_n\cos\frac{2\pi kn}{K},\ k=0,\frac{K}{2}; \tag{19}$$

$$B_{\mathrm{k}}=\frac{2}{N}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\mathrm{K-1}}x_{\mathrm{n}}\sin\frac{2\pi kn}{K},\ k=1,\ldots,\frac{K}{2}-1\cdot \tag{20}$$

Ряд Фурье можно также представить в виде

$$x_{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{K/2}}C_{\mathrm{k}}\cos\left(\frac{2\pi kn}{K}+\varphi_{\mathrm{k}}\right), \tag{21}$$

где C_{k} – амплитуда k-й гармоники, вычисляемая по формуле

$$C_{\mathrm{k}}=\sqrt{A_{\mathrm{k}}^2+B_{\mathrm{k}}^2},\ k=0,\ldots,\frac{K}{2}, \tag{22}$$

где φ_{k} – фаза k-й гармоники, вычисляемая по формуле

$$\varphi_{\mathrm{k}}=\mathrm{arctg}\left(-\frac{B_{\mathrm{k}}}{A_{\mathrm{k}}}\right),\ k=0,\ldots,\frac{K}{2}. \tag{23}$$

Вычисление спектров скоростей и ускорений может производится двумя способами. Первый состоит в последовательном дифференцировании по времени ряда Фурье для перемещений, соответствующего (21)

$$\dot{x}_{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{K/2}}\mathrm{E}_{\mathrm{k}}\sin\left(\frac{2\pi kn}{K}+\varphi_{\mathrm{k}}\right); \tag{24}$$

$$\ddot{x}_{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{K/2}}\mathrm{E}_{\mathrm{k}}\cos\left(\frac{2\pi kn}{K}+\varphi_{\mathrm{k}}\right), \tag{25}$$

где

$$\mathrm{E}_{\mathrm{k}}=-C_{\mathrm{k}}\frac{2\pi k}{Kh}; \tag{26}$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{k}}=-C_{\mathrm{k}}\left(\frac{2\pi k}{Kh}\right)^2. \tag{27}$$

Второй способ состоит в вычислении скоростей и ускорений на основании временного ряда перемещений $\{x^{\mathrm{n}}\}$ с помощью разностных соотношений

$$\dot{x}_{\mathrm{n}}=\frac{x_{\mathrm{n+1}}-x_{\mathrm{n-1}}}{2h}; \tag{28}$$

$$\ddot{x}_{\mathrm{n}}=\frac{x_{\mathrm{n+1}}-2x_{\mathrm{n}}+x_{\mathrm{n-1}}}{h^2} \tag{29}$$

и представлении временных рядов скоростей $\{\dot{x}^{\mathrm{n}}\}$ и ускорений $\{\ddot{x}^{\mathrm{n}}\}$ в виде конечных рядов Фурье

$$\ddot{x}_{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{K}/2} \widetilde{C}_{\mathrm{k}} \cos\left(\frac{2\pi kn}{K} + \widetilde{\varphi}_{\mathrm{k}}\right); \qquad (30)$$

$$\ddot{x}_{\mathrm{n}} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{K}/2} \widetilde{\widetilde{C}}_{k} \cos\left(\frac{2\pi kn}{K} + \widetilde{\widetilde{\varphi}}_{\mathrm{k}}\right), \qquad (31)$$

где

$$\widetilde{C}_{\mathrm{k}} = \sqrt{\widetilde{A}_{\mathrm{k}}^2 + \widetilde{B}_{\mathrm{k}}^2}, \quad k = 0, \ldots, \frac{K}{2}; \qquad (32)$$

$$\widetilde{\varphi}_{\mathrm{k}} = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\widetilde{B}_{\mathrm{k}}}{\widetilde{A}_{\mathrm{k}}}\right), \quad k = 0, \ldots, \frac{K}{2}; \qquad (33)$$

$$\widetilde{A}_{\mathrm{k}} = \frac{2}{N} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{K}-1} \dot{x}_{\mathrm{n}} \cos\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 1, \ldots, \frac{K}{2} - 1; \qquad (34)$$

$$\widetilde{A}_{\mathrm{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{K}-1} \dot{x}_{n} \cos\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 0, \frac{K}{2}; \qquad (35)$$

$$\widetilde{B}_{\mathrm{k}} = \frac{2}{N} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{K}-1} \dot{x}_{\mathrm{n}} \sin\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 1, \ldots, \frac{K}{2} - 1; \qquad (36)$$

$$\widetilde{\widetilde{C}}_{\mathrm{k}} = \sqrt{\widetilde{\widetilde{A}}_{\mathrm{k}}^2 + \widetilde{\widetilde{B}}_{\mathrm{k}}^2}, \quad k = 0, \ldots, \frac{K}{2}; \qquad (37)$$

$$\widetilde{\widetilde{\varphi}}_{\mathrm{k}} = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\widetilde{\widetilde{B}}_{\mathrm{k}}}{\widetilde{\widetilde{A}}_{\mathrm{k}}}\right), \quad k = 0, \ldots, \frac{K}{2}; \qquad (38)$$

$$\widetilde{\widetilde{A}}_{\mathrm{k}} = \frac{2}{N} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{K}-1} \ddot{x}_{\mathrm{n}} \cos\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 1, \ldots, \frac{K}{2} - 1; \qquad (39)$$

$$\widetilde{\widetilde{A}}_{\mathrm{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{K}-1} \ddot{x}_{\mathrm{n}} \cos\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 0, \frac{K}{2}; \qquad (40)$$

$$\widetilde{\widetilde{B}}_{\mathrm{k}} = \frac{2}{N} \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{K}-1} \ddot{x}_{\mathrm{n}} \sin\frac{2\pi kn}{K}, \quad k = 1, \ldots, \frac{K}{2} - 1. \qquad (41)$$

Для апостериорного анализа точности получаемых численных результатов необходимо проводить сравнение спектров ускорений вычисленных двумя способами.

Учитывая свойства спектра дискретного периодического временного ряда, в настоящей работе использована следующая методика спектрального анализа колебаний тормозного механизма.

1. Вычисляется шаг интегрирования по времени

$$h = \frac{T_1}{N}, \tag{42}$$

где N – количество шагов по времени за период свободных колебаний колодки T_1.

В вычислительных экспериментах полагалось $N = 200$.

2. Вычисляется временной ряд перемещений $\{X^n\}$ масс рассматриваемой динамической системы на временном отрезке $[0, T_0]$, где $T_0 = MT_1$. В вычислительных экспериментах полагалось $M = 50$.

3. Используя конечный отрезок временных рядов $\{x^n\}$ и $\{y^n\}$, $\overline{n = (M-K)N, MN}$, строятся автокорреляционные функции перемещений колодки на отрезке $[(M - K/2)N, MN]$. В вычислительных экспериментах полагалось $K = 32$.

4. Используя приближенные условия периодичности автокорреляционных функций (11)–(12), определяется период колебаний T рассматриваемой динамической системы.

Если на рассмотренном конечном отрезке $[(M - K/2)N, MN]$ условия периодичности (11)–(12) не выполняются, то необходимо увеличить параметр M, определяющий длину отрезка $[0, T_0]$, на котором вычисляется временные ряды перемещений $\{x^n\}$ и $\{y^n\}$ колодки, или увеличить параметр K, определяющий максимально допустимый период колебаний.

5. Используя конечный отрезок временных рядов $\{x^n\}$ и $\{y^n\}$, $\overline{n = (M-K)N, MN}$, вычисляется по формулам (18)–(20) спектр перемещений колодки. Если спектр имеет ограниченную полосу частот, то выполняется условие

$$l < kN/2 - s, \tag{43}$$

где $s > 0$ – параметр, определяющий ширину спектра.

Если выполняется условие (43), то дискретное преобразование Фурье позволяет восстанавливать исходные непрерывные функции перемещений колодки. В противном случае, необходимо увеличить частоту дискретизации, т.е. уменьшить величину шага интегрирования по времени h и вернуться к п. 2 методики.

Разработанная методика спектрального анализа колебаний тормозного механизма основана на предположении, что его движения являются периодическими. Если в рассматриваемой динамической системе возникает детерминированный хаос, то автокорреляционная функция временного ряда перемещений $\{X^n\}$ должна иметь конечный носитель, т. е. обращаться в нуль вне конечного интервала времени. Для конечных отрезков временных рядов критерий апериодичности можно сформулировать следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon)$ такое, что

$$|\psi_{\mathrm{m}}| \le \varepsilon \text{, для любого } m > M(\varepsilon)\,. \tag{44}$$

Рассматриваемая динамическая система описывается нелинейной диссипативной неавтономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Движения диссипативных систем целесообразно разделить на два класса: переходных, нестационарных движений, соответствующих процессу релаксации от начального к предельному множеству состояний, и класс установившихся, стационарных движений, фазовые траектории которых целиком принадлежат предельным множествам. Важными с физической точки зрения являются притягивающие предельные множества – аттракторы. С течением времени произвольное начальное состояние из некоторой области притяжения G, включающей в себя аттрактор G_0, релаксирует к G_0. Движение, которому отвечает фазовая траектория в области притяжения, есть переходной процесс. Установившееся движение характеризуется принадлежностью фазовых траекторий инвариантному предельному множеству, т. е. аттрактору G_0.

Для анализа процесса установления колебаний тормозного механизма и визуального выявления аттракторов используются фазовые диаграммы в переменных «перемещение-скорость».

При исследовании зависимостей амплитуд перемещений, скоростей и ускорений рассматриваемой динамической системы от изменения её параметров использовался метод продолжения по параметру при пошаговом изменении параметров системы [14]. В качестве начального приближения решения выбирается решение, полученное на предыдущем шаге.

При выполнении расчётов параметры системы изменялись с постоянным шагом от начального до конечного значений, заданных в исходных данных, а затем в обратном направлении – от конечного значения до начального. Такой подход позволяет получить, в частности, полные амплитудно-частотные зависимости для динамической системы с учётом наличия неустойчивых ветвей.

Для верификация разработанных алгоритмов и программного обеспечения выполнено компьютерное моделирование фрикционных колебаний простейшей одномассовой системы. В результате вычислительных экспериментов установлено, что при использовании трехслойных разностных схем целесообразно выбирать следующие значения весовых коэффициентов

$$\theta_1 = \theta_3 = 0{,}25\,, \quad \theta_2 = 1.0 - \theta_1 - \theta_3 = 0{,}5\,,$$

а при использовании двухслойных разностных схем целесообразно выбирать следующее значение весового коэффициента

$$\theta = 0{,}5\,.$$

Проведенные расчеты подтвердили высокую вычислительную эффективность интегрирования во времени уравнений движения рассматриваемой динамической системы.

Выводы. Получена вариационная формулировка в виде квазивариационного неравенства динамической задачи для колебательной системы с двумя степенями свободы при наличии вязкого и сухого трения Амонтона и деформировании шероховатых контактирующих поверхностей. Дискретизация вариационной задачи по времени выполнена на основе двух- и трехслойных разностных схем. Для решения полученных на каждом шаге интегрирования по времени квазивариационных неравенств предложен итерационный процесс, позволяющий свести решение задачи к решению последовательных вариационных неравенств с недифференцируемыми слагаемыми, обусловленными наличием сил трения. Построены эквивалентные вариационным неравенствам с недифференцируемыми слагаемыми задачи минимизации, решение которых получены в явном виде.

Разработаны вычислительные алгоритмы численного моделирования фрикционных колебаний в тормозе методом установления, реализованные в виде пакета прикладных программ. На основе вычислительных экспериментов установлено, что при использовании для решения рассматриваемого класса задач трехслойных разностных схем минимальной схемной вязкостью обладают симметричные схемы при $\Theta_1 = \Theta_3$. Предложенная математическая модель, учитывающая нормальные колебания колодки, вызванные шероховатостью контактирующих поверхностей и наличием конструктивной связи между нормальными и тангенциальными колебаниями, описывает возникновение фрикционных колебаний в упругой системе, в которой не вводится искусственная разница между статическим и динамическим коэффициентами трения.

В зависимости от значений параметров динамической системы тормоза возможны три варианта движения тормозной колодки: затухающие, установившиеся релаксационные и установившиеся квазигармонические колебания. Зависимость коэффициента трения тормоза, при котором возникают колебания в тормозном механизме, от угла наклона подвески колодки линейная, от отношения жесткостей двух конструктивных связей в нормальном c_2 и тангенциальном c_1 направлениях – нелинейная. При этом минимальное значение коэффициента трения, при котором возникает установившиеся колебания, соответствуют случаю $c_1 = c_2$.

Анализ нормальных и тангенциальных фрикционных колебаний в рабочем процессе тормоза выполнен в результате применения методов корреляционного и спектрального анализа дискретных сигналов: выбор шага интегрирования по времени уравнений и критериев восстановления движения динамической системы тормоза на основе численного решения; применение автокорреляционных функций для определения периода колебаний; разложение исследуемого движения в ряд Фурье; использование фазовых диаграмм в переменных «перемещение – скорость» для анализа процесса установления колебаний и визуального выявления аттракторов; построение амплитудных зависимостей перемещений, скоростей, ускорений динамической системы методом продолжения по параметру.

Разработанные математические модели и вычислительные алгоритмы могут быть использованы для моделирования и анализа процессов тяжелонагруженных режимов трения в трибологических системах с контактным возбуждением колебаний различного технического назначения (горные машины, оборудование для подводной добычи полезных ископаемых и др.) и выявить новые технические решения.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабаєв А.М. Принцип дії, розрахунки та основи експлуатації гальм рухомого складу залізниць: Навч. посібник / А.М. Бабаєв, Д.В. Дмитрієв; під заг. ред. Д.В. Дмитрієва. – К.: ДЕТУТ, 2005. – 176 с.*
2. *Коптовец А.Н. Выбор формы связи между параметрами трения в тормозном механизме с применением дискриминантного анализа / А.Н. Коптовец // Подъемно-транспортная техника – 2007. – № 4 – С. 27-32.*
3. *Справочник по триботехнике. Т.3. Теоретические основы / Под общ. ред. М. Хебты, А.В. Чичинадзе. – М.: Машиностроение, 1989. – 400 с.*
4. *Правила технічної експлуатації залізниць України. – К.: Транспорт України, 2003. – 133 с.*
5. *Zander C.P. Metal-ceramicbrakingclampsonpowerfullocomotives / C.P. Zander // Glasers Annalen. – 2001. – № 4. –P. 157-165.*
6. *Зверев И.И. Проектирование авиационных колес и тормозных систем / И.И. Зверев, С.С. Коконин. – М.: Машиностроение, 2005. – 222 с.*
7. *Гребенюк П.Т. Правила тормозных расчетов / П.Т. Гребенюк. – М.: Интекст, 2004. – 111 с.*
8. *Свириденок А.И. Механика дискретного фрикционного контакта / А.И. Свириденок, С.А. Чижик, М.И. Петроповец. – Минск.: Наука и техника, 1990. – 100 с.*
9. *Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 582 с.*
10. *Горячева И.Г. Контактные задачи в трибологии / И.Г. Горячева, М.Н. Добычин. – М.: Машиностроение, 1988. – 253 с.*
11. *Буданов Б.В., Кудинов В.А., Толстой Д.Н. Взаимосвязь трения и колебаний / Б.В. Буданов, В.А. Кудинов, Д.Н. Толстой // Трение и износ. – 1980. – Т. 1. – С. 79-89.*
12. *Кудинов В.А. Исследование колебаний металлорежущих станков при резании металлов / В.А. Кудинов. – М.: Машгиз, 1958. – 198 с.*

13. *Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.*
14. *Шалашилин В.И. Метод продолжения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике) / В.И. Шалашилин, Е.Б. Кузнецов. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.*

Стаття надійшла до редакції 15.12.2014

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри гірничої механіки Державного вищого навчального закладу «Національний гірничий університет» **В.І. Самуся**

доктор технічних наук, професор, завідувач відділу механіки машин та процесів переробки мінеральної сировини інституту геотехнічної механіки НАН України **В.П. Надутий**