

УДК 629.12:532.059.041

Н.В. Ефремова

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ  
РАЗЛОЖЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ВОЛНЕНИЯ  
КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА СУДНЕ В МЕЛКОВОДНОЙ АКВАТОРИИ**

*Надано рішення задачі про дифракцію хвилювання кінцевої амплітуди, яке набігає під довільним кутом на нерухоме судно в умовах мелководдя. Рішення виконано методом зрощуваних асимптотичних розкладань.*

**Ключові слова:** мелководдя, нелінійна теорія хвилювання, профіль хвилі, дифракційний потенціал, метод зрощуваних асимптотичних розкладань.

*Представлено решение задачи о дифракции волнения конечной амплитуды, набегающего под произвольным углом на неподвижное судно в условиях мелководья. Решение выполнено методом сращиваемых асимптотических разложений.*

**Ключевые слова:** мелководье, нелинейная теория волн, профиль волны, дифракционный потенциал, метод сращиваемых асимптотических разложений.

*Solving of a diffraction problem for finite amplitude waves running at arbitrary angle onto unmoving vessel in shallow water is introduced. Problem is solved by the matched asymptotic expansion method*

**Keywords:** shallow water, non-linear wave theory, wave profile, diffraction potential, matched asymptotic expansion method.

**Введение.** В большинстве портов Черного моря крупнотоннажные танкеры и балкеры частично разгружаются и догружаются на рейдовой стоянке вне защищенной акватории порта. Волновое поле вокруг судна, находящегося на относительно мелководной рейдовой стоянке, существенно трехмерное и представляет собой суперпозицию набегающего и дифрагированного волнения.

Волнение, приходящее из глубоководных районов открытого моря, сложным образом трансформируется на мелководье – заостряются вершины волн и становятся более пологими их подошвы. Крупные волны уменьшаются, мелкие увеличиваются по длине и высоте.

Сложность оценки взаимодействия судна с таким волнением связана с нестационарностью области, занятой жидкостью и нелинейностью граничного условия на свободной поверхности жидкости. Решение такой задачи в общем виде крайне затруднительно. Решение отдельных задач требует уточнения и специализации граничных условий.

В частности, дифракционная задача рассматривается редко, поскольку для определения гидродинамических сил, действующих на судно при качке, достаточно иметь решение задачи излучения. В существующих решениях дифракционной задачи применяется линейная теория волн [1; 2; 3] и др.

**Цель работы** – определение потенциала скоростей возмущенного движения жидкости, вызванного дифракцией волнения конечной амплитуды, набегающего под произвольным углом на неподвижное судно в условиях мелководья.

**Изложение основного материала исследования.** Существующие в настоящее время исследования волнения конечной амплитуды на мелководье посвящены либо определению характеристик волн (волнового профиля, давления, составляющих скорости и ускорений частиц в волне) [4-6] и др., либо оценке воздействия волн на стационарные или подвижные шельфовые сооружения [7] и др.

Взаимодействие судов с волнами конечной амплитуды изучается в основном на глубокой воде. Так, нелинейные модели ветровых волн в шторме и нелинейные гидромеханические нагрузки на корпус судна рассмотрены в [8]. Задача о взаимодействии судна с умеренно нелинейными и нерегулярными волнами решена с применением теории возмущений. Искомый потенциал скоростей возмущенного движения жидкости разложен в ряд по степеням малого параметра, в разложении оставлено заданное число первых членов ряда. После подстановок и преобразований изначально нелинейная краевая задача приведена к серии линейных краевых задач для составляющих потенциалов.

В [9] приведена оценка поведения судна на сильном и экстремальном волнении с учетом переменной смоченной поверхности и взаимном влиянии колебаний. При использовании модели удлиненного судна и ограничении скорости ( $Fr < 0.3$ ) суммарный потенциал представлен суммой потенциала свободных набегающих волн конечной амплитуды и потенциала линейного возмущенного движения жидкости, вызванного присутствием в ней судна. Линеаризация граничной задачи и разделение гидромеханических сил позволили определять дифракционные силы на мгновенной смоченной поверхности с использованием решение задачи излучения.

В работе Ю.Л. Воробьева [10] поставлена общая гидродинамическая задача о потенциале возмущенных скоростей жидкости при движении судна на волнении в стесненном фарватере, проведена ее поэтапная линеаризация и описан метод решения соответствующих линейных задач.

Эффективные прямые методы решения задачи о взаимодействии судов с волнением конечной амплитуды на мелководье не описаны. Приближенные решения так или иначе связаны с линеаризацией граничных условий, специализацией формы корпуса судна. **Следовательно, тема работы актуальна.**

В большинстве задач, связанных с определением характеристик волнения, заданными считаются глубина акватории и период волны. Последнее можно объяснить, в частности, тем, что при переходе с глубокой воды на мелководье периоды почти не изменяются. Длина, высота и другие характеристики волны определяются в зависимости от выбранной теории волн – малой или конечной амплитуды.

В задачах динамики судна на волнении определяющими характеристиками является длина и высота волны при данной глубине акватории, а период и другие характеристики подлежат определению в зависимости от выбранной теории волн. Таким образом, для решения дифракционной задачи важно удобным образом задать уравнение профиля волны конечной амплитуды.

Традиционно в теории волновых движений жидкости учет влияния мелководья выполняется при глубине акватории, меньшей половины длины волны. Понятие «мелководная акватория» применительно к судну связано с расстоянием между днищем судна и дном водоема. В [11] показано, что даже в условиях умеренного (по отношению к судну) мелководья длина волны, сопоставимой с длиной судна, в пять и более раз превышает глубину акватории. Если предположить, что на данной глубине набегающее на судно волнение не разрушается, то получится вполне определенный диапазон длин и высот волн [11], для которого профиль набегающей волны достаточно точно определяется по теории Стокса 5 порядка (пример – рис. 1) и применительно к которому целесообразно решать, в частности, дифракционную задачу.

Рассмотрим взаимодействие неподвижного судна, плавающего на мелководье глубины  $H$  с набегающим под произвольным углом волнением конечной амплитуды, не доходящим до стадии обрушения. Обозначим длину волны  $\lambda$ , высоту волны  $h$ , скорость распространения волны  $c$ .

Введем в рассмотрение две прямоугольные системы координат: неподвижную  $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ , характеризующую движение жидкости и связанную с судном  $Oxyz$  (рис. 2). Ось  $O\xi_0$  сонаправлена с вектором скорости набегающего волнения. Курсовой угол набегающего волнения  $\beta$  (между осями  $Ox$  и  $O\xi_0$ ) изменяется от  $0$  до  $360^\circ$ , положительное направление – против часовой стрелки от  $O\xi_0$  к  $Ox$ .

Уравнение профиля волны согласно [6] задается в виде

$$\zeta = \sum_{j=1}^5 \zeta_{(j)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^5 a^j b_j \cos(j\theta), \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число (частота формы);

$a$  – параметр высоты волны, определяется из соотношения

$$kh = 2[a + a^3 B_{33} + a^5 (B_{35} + B_{55})]; \quad (2)$$

$b_j$  – безразмерные коэффициенты, зависящие от глубины акватории и длины волны;

$B_{33}$ ,  $B_{35}$ ,  $B_{55}$  – параметры профиля волны, определяются по [6] (таблица 1);

$$\theta = k(\xi_0 - ct) = k\xi_0 - \sigma t.$$

Таблица 1

Параметры профиля волны,  $S = Sh(kH)$ ,  $C = Ch(kH)$

$B_{33} = [3(8C^6 + 1)]/[64S^6]$
$B_{35} = [88128C^{14} - 208224C^{12} + 70848C^{10} + 54000C^8 - 21816C^6 + 6264C^4 - 54C^2 - 81]/[12288S^{12}(6C^2 - 1)]$
$B_{55} = [192000C^{16} - 262720C^{14} + 83680C^{12} + 20160C^{10} - 7280C^8 + 7160C^6 - 1800C^4 - 1050C^2 + 225]/[12288S^{10}(6C^2 - 1)(8C^4 - 11C^2 + 3)]$

Составляющие  $\bar{\zeta}_{(j)} = 2\zeta_{(j)}/h$  профиля волны Стокса показаны на рис. 1. Крутизна всех составляющих меньше заданной крутизны волны конечной амплитуды.

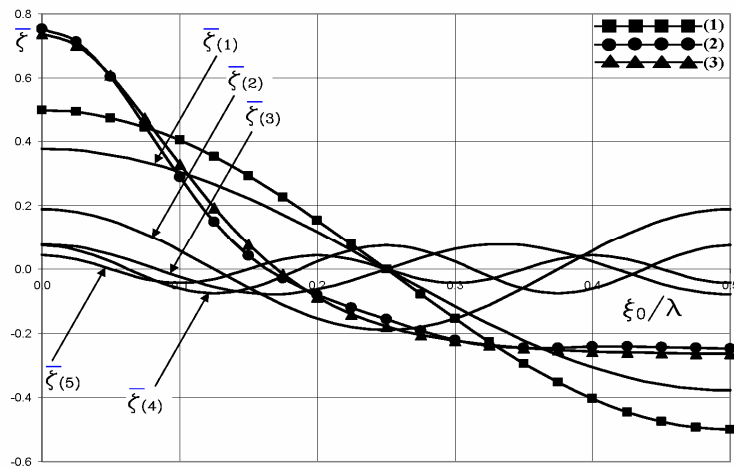


Рис. 1. Относительные ординаты  $\bar{\zeta} = 2\zeta/h$  профиля волны, определенные по линейной теории (1), по теории Стокса (2), по кноидальной теории (3);  $\bar{\zeta}_{(j)}$  ( $j=1, \dots, 5$ ) – составляющие профиля волны Стокса; глубина акватории  $H = 17.6$  м; длина волны  $\lambda = 201.6$  м, крутизна  $h/\lambda = 1/20$

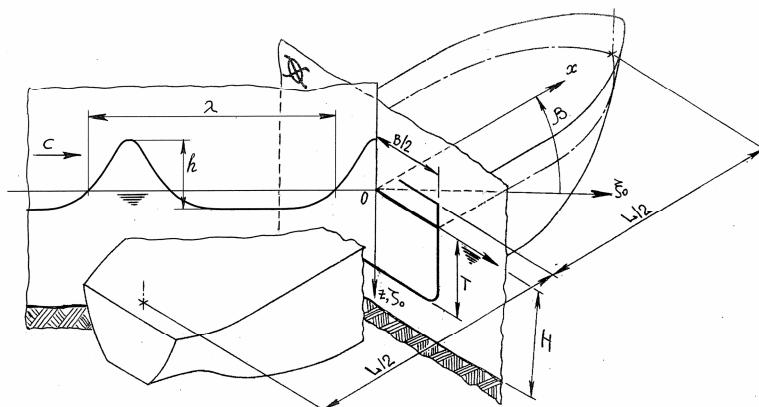


Рис. 2. Системы координат и характеристики волнения

Жидкость считаем идеальной, тяжелой, несжимаемой, ее движение потенциальным. В системе координат, связанной с судном, где  $\xi_0 = x \cos \beta + y \sin \beta$ ,  $\zeta_0 = z$ , возмущенное движение жидкости описывается потенциалом скоростей  $\Phi^E(x, y, z, t)$ . Область его определения  $E$  ограничена дном водоема  $D$ , смоченной поверхностью судна  $S$  и свободной поверхностью жидкости  $\Sigma$ . Представим потенциал  $\Phi^E$  в виде суммы

$$\Phi^E(x, y, z, t) = \Phi^*(x, y, z, t) + \Phi^d(x, y, z, t), \quad (3)$$

где  $\Phi^*(x, y, z, t)$  – потенциал скоростей набегающего волнения;

$\Phi^d(x, y, z, t)$  – потенциал скоростей дифрагированного волнового движения.

Потенциал скоростей набегающего волнения в соответствии с выбранным представлением волнового профиля запишем в системе координат, связанной с судном, в виде [6]

$$\begin{aligned} \Phi^*(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^5 \Phi^{*(j)} = \\ &= \frac{\sigma}{k^2} \sum_{j=1}^5 a^j A_j \operatorname{Ch}(jk(z-H)) \operatorname{Sin}[j(kx \cos \beta + ky \sin \beta - \sigma t)], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $A_j$  – параметры потенциала волны (безразмерные функции, зависящие от  $kH$ ).

Связь между волновым числом и частотой волнения  $\sigma = kc$  определяется выражением

$$\sigma^2 = kg \cdot \operatorname{Th}(kH) \cdot (1 + a^2 C_1 + a^4 C_2) = kg \cdot \operatorname{Th}(kH) \cdot C^*, \quad (5)$$

где  $C_1, C_2$  – параметры частоты волны, определяются по [6] (таблица 2).

Параметри частоти волни,  $S = Sh(kH)$ ,  $C = Ch(kH)$

$C_1 = [8C^4 - 8C^2 + 9]/[8S^4]$
$C_2 = [3840C^{12} - 4096C^{10} - 2592C^8 - 1008C^6 + 5944C^4 - 1830C^2 + 147]/[512S^{10}(6C^2 - 1)]$

Учитывая характер составляющих волнения в (1), а также представления потенциалов в виде (3) и (4), предположим, что дифракция всех  $\zeta_{(j)}$  на корпусе судна происходит взаимно независимо.

Потенциал первого порядка определяется выражением

$$\Phi^{*(1)} = \frac{\sigma}{k^2} a \frac{A_1^*}{Sh(kH)} Ch(k(z-H)) \cdot \sin[(kx \cos \beta + ky \sin \beta - \sigma t)] \quad (6)$$

где  $A_1^*$  - параметр потенциала волны, определяется по [6] (таблица 3).

Дифракционная задача для волнения малой амплитуды  $r = h/2$ , набегающего под произвольным углом на неподвижное судно в условиях мелководья, решена в [3]. Соответствующий потенциал скоростей набегающего волнения задан выражением

$$\Phi^{*(1)} = \frac{rg}{\sigma} \frac{1}{Ch(kH)} Ch[k(z-H)] \cdot \sin(kx \cos \beta + ky \sin \beta - \sigma t). \quad (7)$$

Структура и размерность выражений (6) и (7) одинаковы, отличается только форма записи размерного множителя. Выражение (6) можно переписать в виде

$$\Phi^{*(1)} = K \frac{r_{(1)}g}{\sigma} \frac{Ch[k(z-H)]}{Ch(kH)} \sin(kx \cos \beta + ky \sin \beta - \sigma t), \quad (8)$$

где  $r_{(1)} = aA_1^*/k$  - амплитуда волны первого порядка;

$$K = \frac{\sigma^2}{kgTh(kH)} - \text{вспомогательный коэффициент.}$$

Коэффициент  $K$  одинаков для всех составляющих потенциала в (4), а для амплитуд волн второго и более высоких порядков получается

$$r_{(j)} = \frac{a^j A_j^*}{k}, \quad (9)$$

где  $A_j^*$  - параметры потенциала волны, определяются по [6] (таблица 3).

Таблиця 3

Параметры потенциала волны,  $S = Sh(kH)$ ,  $C = Ch(kH)$

$A_1^* = 1 + (a^2 A_{13} + a^4 A_{15})$	$A_2^* = A_{22}^* + a^2 A_{24}^*$	$A_3^* = A_{33}^* + a^2 A_{35}^*$
$A_{13}^* = -[C^2(5C^2 + 1)]/[8S^4]$		
$A_{15}^* = -[1184C^{10} - 1140C^8 - 1992C^6 + 2641C^4 - 249C^2 + 18]/[1536S^{10}]$		
$A_{22}^* = 3/[8S^3]$		
$A_{24}^* = [192C^8 - 424C^6 - 312C^4 + 480C^2 - 17]/[768S^9]$		
$A_{33}^* = [13 - 4C^2]/[64S^6]$		
$A_{35}^* = [512C^{12} + 4224C^{10} - 6800C^8 - 12808C^6 + 16704C^4 - 3154C^2 + 107]/[4096S^{12}(6C^2 - 1)]$		
$A_4^* = [80C^6 - 816C^4 + 1338C^2 - 197]/[1536S^9(6C^2 - 1)]$		
$A_5^* = -[2880C^{10} - 72480C^8 + 324000C^6 - 432000C^4 + 163470C^2 - 16245]/[61440S^{10}(6C^2 - 1)(8C^4 - 11C^2 + 3)]$		

Тогда

$$\Phi^*(x, y, z, t) = \frac{g}{\sigma} \frac{K}{Ch(kH)} \times \sum_{j=1}^5 r_{(j)} Ch[jk(z-H)] \cdot \sin[j(kx \cos \beta + ky \sin \beta t - \sigma t)] \quad (10)$$

Форма записи всех составляющих потенциала скоростей набегающего волнения совпадает с использованной в [3]. Это обстоятельство и линейность краевой задачи позволяет применить для решения дифракционной задачи технику, использованную в [3]. Представим потенциал  $\Phi^*(x, y, z, t)$ , в виде

$$\Phi^*(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^5 [\Phi_c^{*(j)} \cos(j\sigma t) + \Phi_s^{*(j)} \sin(j\sigma t)], \quad (11)$$

где амплитудные функции равны соответственно

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_c^{*(j)} \\ \Phi_s^{*(j)} \end{array} \right\} = \frac{r_{(j)} g K}{\sigma} \frac{Ch[jk(z-H)]}{Ch(kH)} \left\{ \begin{array}{l} \sin[j(kx \cos \beta + ky \sin \beta)] \\ -\cos[j(kx \cos \beta + ky \sin \beta)] \end{array} \right\}, \quad (12)$$

Для каждого  $\Phi^{*(j)}$ ,  $j = 1, \dots, 5$  определяется соответствующий потенциал скоростей дифрагированного волнового движения  $\Phi^{d(j)}$ .

Краевая задача для всех составляющих дифракционного потенциала включает условие гармоничности, граничные условия на свободной поверхности жидкости  $\Sigma$ , на смоченной поверхности судна  $S$  и на дне водоема  $D$ , условие затухания дифрагированных волн на бесконечном

удалении от судна. Кроме того, каждый потенциал  $\Phi^{d(j)}$  должен удовлетворять принципу излучения. Представим  $\Phi^{d(j)}$  в виде суммы

$$\Phi^{d(j)}(x, y, z, t) = \Phi_c^{d(j)} \text{Cos}(j\sigma t) + \Phi_s^{d(j)} \text{Sin}(j\sigma t). \quad (13)$$

Тогда амплитудные функции  $\Phi_c^{d(j)}$  и  $\Phi_s^{d(j)}$  должны удовлетворять следующим дифференциальным системам:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_{c,s}^{d(j)}(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in E; \quad (14)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{(j\sigma)^2}{g} \right) \Phi_{c,s}^{d(j)}(x, y, 0) = 0, \quad (x, y, 0) \in \Sigma; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Phi_{c,s}^{d(j)}(x, y, H)}{\partial z} = 0, \quad (x, y) \in ]-\infty; \infty[; \quad (16)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\overline{\text{grad}} \Phi_{c,s}^{d(j)}(x, y, z)) = 0, \quad (x, y, z) \in E, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Phi_{c,s}^{d(j)}(x, y, z)}{\partial N} = -\frac{\partial \Phi_{c,s}^{*(j)}(x, y, z)}{\partial N}, \quad (x, y, z) \in S. \quad (18)$$

Далее индекс «*d*» в описаниях дифракционных потенциалов опущен.

Считая судно удлиненным телом, уточним вид нормальной производной потенциала на смоченной поверхности  $S$ . Аналогично тому, как это сделано в [3], получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_c^{(j)}(x, y, z)}{\partial N} &= B_c^{np(j)} + B_c^{mp(j)}, \\ \frac{\partial \Phi_s^{(j)}(x, y, z)}{\partial N} &= B_s^{np(j)} + B_s^{mp(j)}. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} B_c^{np(j)} \\ B_s^{np(j)} \end{array} \right\} &= \frac{r_{(j)} g K(jk)}{\sigma \text{Ch}(kH)} \text{Sh}[jk(z-H)] \times \\ &\times \text{Cos}(\overline{N}, z) \left\{ \begin{array}{l} -\text{Sin}[j(kx \text{Cos} \beta + ky \text{Sin} \beta)] \\ \text{Cos}[j(kx \text{Cos} \beta + ky \text{Sin} \beta)] \end{array} \right\}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} B_c^{mp(j)} \\ B_s^{mp(j)} \end{array} \right\} &= -\frac{r_{(j)} g K(jk \text{Sin} \beta)}{\sigma \text{Ch}(kH)} \text{Ch}[jk(z-H)] \times \\ &\times \text{Cos}(\overline{N}, y) \left\{ \begin{array}{l} \text{Cos}[j(kx \text{Cos} \beta + ky \text{Sin} \beta)] \\ \text{Sin}[j(kx \text{Cos} \beta + ky \text{Sin} \beta)] \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, каждый дифракционный потенциал  $\Phi^{(j)}$  равен сумме четырех составляющих

$$\Phi^{(j)} = \sum_{i=1}^4 \Phi_i^{(j)}. \quad (22)$$



Дифракционные потенциалы  $\Phi^{(j)}$  (каждый отдельно) определяются методом сращиваемых асимптотических разложений (САР) так, как это выполнено в [3].

Следуя процедуре применения метода САР, условно разделим область, занятую жидкостью, на зоны: внешнюю, где  $(y/L) = O(1)$ , и внутреннюю, в которой  $(y/L) = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $Y$  и  $Z$ , фиксированных во внешней зоне, превращает корпус судна в отрезок  $\Delta = \{-L/2 \leq x \leq L/2, y = z = 0\}$ , область  $E$  - в область  $\bar{E}_0$  (слой жидкости  $0 \leq z \leq H$  с вырезанным отрезком  $\Delta$ ), а свободную поверхность  $\Sigma$  - в плоскость  $\bar{\Sigma}_0$  (плоскость  $z = 0$  с вырезанным отрезком  $\Delta$ ).

В каждой зоне формулируются отдельные краевые задачи, затем их решения асимптотически сращиваются на границе зон, образуя равномерно пригодное во всей области, занятой жидкостью, приближенное решение задачи.

Во внешней зоне (т.е. в области  $\bar{E}_0$ ) краевые задачи включают условие гармоничности, граничные условия на свободной поверхности жидкости  $\bar{\Sigma}_0$  и на дне водоема  $D$ , условие затухания дифрагированных волн на бесконечном удалении от судна и принцип излучения. Граничные условия на смоченной поверхности судна не формулируются, т.к. эта поверхность внешней зоне не принадлежит. Известно только, что при дифракции на корпусе судна продольных волн потенциал возмущенных скоростей непрерывен, а его нормальная производная терпит разрыв при переходе через ДП судна. При дифракции поперечных волн непрерывна нормальная производная потенциала, а потенциал терпит разрыв при переходе через ДП.

Применим метод Фурье к краевым задачам для потенциалов  $\Phi_{ic,s}^{(j)}$  в каждой из областей  $y > 0$  и  $y < 0$ . Разложим потенциалы на отрезке  $[0; H]$  по полной ортогональной системе функций [10]

$$\begin{aligned} Z_0^{(j)}(z) &= N_0^{-\frac{1}{2}} \cdot Ch[\alpha_0^{(j)}(z-H)], \quad N_0 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{Sh(2\alpha_0^{(j)}H)}{2\alpha_0^{(j)}H} \right]; \\ Z_m^{(j)}(z) &= N_m^{-\frac{1}{2}} \cdot Cos[\alpha_m^{(j)}(z-H)], \quad N_m = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{Sin(2\alpha_m^{(j)}H)}{2\alpha_m^{(j)}H} \right], \quad m=1,2,\dots; \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\alpha_0^{(j)}$  - действительный положительный корень трансцендентного уравнения

$$\alpha^{(j)} Th(\alpha^{(j)}H) \cdot C^* - \frac{(j\sigma)^2}{g} = 0; \quad (24)$$

$\alpha_1^{(j)} < \alpha_2^{(j)} < \dots$  - последовательность действительных положительных корней трансцендентного уравнения

$$\alpha^{(j)} \operatorname{Tg}(\alpha^{(j)} H) \cdot C^* + \frac{(j\sigma)^2}{g} = 0. \quad (25)$$

$C^*$  – см. формулу (5).

Решение внешней задачи получено в предположении о том, что для четных по  $y$  составляющих потенциалов

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_1^{(j)}(x, \pm 0, z) = \pm f_c; \quad \frac{\partial}{\partial y} \Phi_3^{(j)}(x, \pm 0, z) = \pm f_s. \quad (26)$$

Тогда

$$\Phi_{c(1)}^{(j)} = \frac{1}{2H} Z_0^{(j)}(z) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_0(\alpha_0^{(j)} R) \int_0^H f_c(\xi, \zeta) Z_0^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi - \quad (27)$$

$$- \frac{1}{\pi H} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(j)}(z) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} K_0(\alpha_m^{(j)} R) \int_0^H f_c(\xi, \zeta) Z_m^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi;$$

$$\Phi_{s(1)}^{(j)} = - \frac{1}{2H} Z_0^{(j)}(z) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J_0(\alpha_0^{(j)} R) \int_0^H f_s(\xi, \zeta) Z_0^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi. \quad (28)$$

Здесь  $J_0, N_0, K_0$  - функции Бесселя, Неймана и Макдональда нулевого порядка действительного аргумента соответственно.

$$\Phi_{c(3)}^{(j)} = \frac{1}{2H} Z_0^{(j)}(z) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J_0(\alpha_0^{(j)} R) \int_0^H f_s(\xi, \zeta) Z_0^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi; \quad (29)$$

$$\Phi_{s(3)}^{(j)} = \frac{1}{2H} Z_0^{(j)}(z) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_0(\alpha_0^{(j)} R) \int_0^H f_s(\xi, \zeta) Z_0^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi - \quad (30)$$

$$- \frac{1}{\pi H} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(j)}(z) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} K_0(\alpha_m^{(j)} R) \int_0^H f_s(\xi, \zeta) Z_m^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi.$$

Для нечетных по  $y$  составляющих потенциалов

$$\Phi_2^{(j)}(x, \pm 0, z) = \pm p_c; \quad \Phi_4^{(j)}(x, \pm 0, z) = \pm p_s. \quad (31)$$

Тогда

$$\Phi_{c(2)}^{(j)} = \frac{1}{2H} Z_0^{(j)}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_0(\alpha_0^{(j)} R) \int_0^H p_c(\xi, \zeta) Z_0^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi - \quad (32)$$

$$- \frac{1}{\pi H} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(j)}(z) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} K_0(\alpha_m^{(j)} R) \int_0^H p_c(\xi, \zeta) Z_m^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi$$

$$\Phi_{s(2)}^{(j)} = -\frac{1}{2H} Z_0^{(j)}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J_0(\alpha_0^{(j)} R) \int_0^H p_c(\xi, \zeta) Z_0^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi \quad (33)$$

$$\Phi_{c(4)}^{(j)} = \frac{1}{2H} Z_0^{(j)}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J_0(\alpha_0^{(j)} R) \int_0^H p_s(\xi, \zeta) Z_0^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi ; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{s(4)}^{(j)} = & \frac{1}{2H} Z_0^{(j)}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_0(\alpha_0^{(j)} R) \int_0^H p_s(\xi, \zeta) Z_0^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi - \\ & - \frac{1}{\pi H} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(j)}(z) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} K_0(\alpha_m^{(j)} R) \int_0^H p_s(\xi, \zeta) Z_m^{(j)}(\zeta) d\zeta d\xi. \end{aligned} \quad (35)$$

Функции  $f_{c,s}$  и  $p_{c,s}$  на этапе решения внешней задачи неизвестны, они определяются на этапе сращивания решений внешней и внутренней задач.

Во внутренней зоне вводятся растянутые координаты  $Y = y/\varepsilon$ ,  $Z = z/\varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , движение с точностью до малых  $O(\varepsilon)$  считается двумерным. Область, занятая жидкостью, представляет собой полосу с исключенным шпангоутным контуром  $L(x)$ . Краевые задачи включают условие гармоничности, граничные условия на свободной поверхности жидкости, на смоченной поверхности судна и на дне водоема. Условие на бесконечном удалении от судна, т.е. на внешней границе внутренней зоны, отсутствует, поэтому решение задачи, как показано в [3], можно найти с точностью до произвольной аддитивной функции. Однако саму функцию определять не требуется, поскольку для выполнения сращивания решений достаточно выписать асимптотику потенциала на внешней границе внутренней зоны (при  $Y \rightarrow \infty$ ).

Для четной по  $Y$  составляющей потенциала скоростей асимптотика записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial Y} \Phi^{ev}(Y, Z) \sim \pm \frac{1}{2} \lambda_0 H(\lambda_0) Q(\lambda_0) Ch[\lambda_0(Z - H^*)] \cdot Cos(\lambda_0 Y), \quad (36)$$

где

$$H(\lambda_0) = \frac{2Ch(\lambda_0 H^*)}{2\lambda_0 H^* + Sh\lambda_0 H^*};$$

$H^*$  – глубина акватории, измеренная в линейном масштабе внутренней зоны.

Величина  $\lambda_0$  соответствует решению уравнения (24) в терминах внутренней зоны.

Для нечетной по  $Y$  составляющей потенциала скоростей асимптотика записывается в виде

$$\Phi^{od}(Y, Z) \sim \pm \frac{1}{2} H(\lambda_0) P(\lambda_0) Ch[\lambda_0(Z - H^*)] \cdot Cos(\lambda_0 Y). \quad (37)$$

Действительные функции  $P(\lambda_0)$  и  $Q(\lambda_0)$  определяются по формулам

$$\begin{cases} P(\lambda_0) \\ Q(\lambda_0) \end{cases} = 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-\lambda_0 \zeta_0(Y)} \left[ T_1(Y) \cdot \begin{cases} Sin(\lambda_0 Y) \\ Cos(\lambda_0 Y) \end{cases} + T_2(Y) \cdot \begin{cases} Cos(\lambda_0 Y) \\ -Sin(\lambda_0 Y) \end{cases} \right] dY. \quad (38)$$

Где  $b$  – ширина шпангоутного контура  $L(x)$ , измеренная в линейном масштабе внутренней зоны;

$\zeta_0(Y)$  – уравнение контура  $L(x)$ ;

$$\begin{aligned} T_1 &= \lambda_0 A_+(Y) + B_+(Y) \sqrt{1 + \left[ \frac{d\zeta_0(Y)}{dY} \right]^2}; \\ T_2 &= \lambda_0 A_+(Y) \frac{d\zeta_0(Y)}{dY}. \end{aligned} \quad (39)$$

В формулы (39) входят значения потенциала скоростей  $A_+(Y)$  и нормальной производной потенциала  $B_+(Y)$  на контуре  $L(x)$ . Значение нормальной производной определено граничным условием. Потенциал на контуре неизвестен, поскольку он и является решением задачи. Следуя практике применения функций Н.Е. Кочина в волновых задачах, вместо  $A_+(Y)$  в формулы (39) подставляется значение потенциала при бесконечной частоте.

Для сращивания решений используется метод предельного сращивания – «внутренний предел внешнего предела равен внешнему пределу внутреннего предела». Вернемся в (36) и (37) к внешним переменным  $y = \varepsilon Y$  и  $z = \varepsilon Z$ . При этом  $\lambda_0 H^*$  переходит в  $\alpha_0^{(j)} H$ ,  $P(\lambda_0)$  – в  $P(x, \alpha_0^{(j)})$ ,  $Q(\lambda_0)$  – в  $Q(x, \alpha_0^{(j)})$ , а функции  $f_{c,s}$  и  $p_{c,s}$  примут вид

$$f_{c,s} = \begin{cases} Q_c(x, \alpha_0^{(j)}) \\ Q_s(x, \alpha_0^{(j)}) \end{cases} \alpha_0^{(j)} \frac{Ch[\alpha_0^{(j)}(z - H)] Ch(\alpha_0^{(j)} H)}{2\alpha_0^{(j)} H + Sh(2\alpha_0^{(j)} H)}; \quad (40)$$

$$p_{c,s} = - \begin{cases} P_c(x, \alpha_0^{(j)}) \\ P_s(x, \alpha_0^{(j)}) \end{cases} \frac{Ch[\alpha_0^{(j)}(z - H)] Ch(\alpha_0^{(j)} H)}{2\alpha_0^{(j)} H + Sh(2\alpha_0^{(j)} H)}. \quad (41)$$

Выполняя подстановки и преобразования, получим окончательные выражения для составляющих дифракционного потенциала

$$\Phi_{c,s(i)}^{(j)}(x, y, z) = \frac{jk}{2} \frac{Ch[jk(z - H)] Ch(2jkH)}{2jkH + Sh(2jkH)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} Q_c(\xi, jk) \begin{cases} N_0(jkR) \\ -J_0(jkR) \end{cases} d\xi; \quad (42)$$

$$\Phi_{c,s(3)}^{(j)}(x, y, z) = \frac{jk}{2} \frac{Ch[jk(z-H)]Ch(2jkH)}{2jkH + Sh(2jkH)} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} Q_s(\xi, jk) \begin{Bmatrix} J_0(jkR) \\ N_0(jkR) \end{Bmatrix} d\xi; \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{c,s(2)}^{(j)}(x, y, z) &= \frac{jky}{2} \frac{Ch[jk(z-H)]Ch(2jkH)}{2jkH + Sh(2jkH)} \times \\ &\times \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} P_c(\xi, jk) \begin{Bmatrix} N_1(jkR) \\ -J_1(jkR) \end{Bmatrix} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{c,s(4)}^{(j)}(x, y, z) &= \frac{jky}{2} \frac{Ch[jk(z-H)]Ch(2jkH)}{2jkH + Sh(2jkH)} \times \\ &\times \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} P_s(\xi, jk) \begin{Bmatrix} J_1(jkR) \\ N_1(jkR) \end{Bmatrix} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь  $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$ ,  $J_1$ ,  $N_1$  – функции Бесселя и Неймана первого порядка действительного аргумента соответственно.

При вычислении функций  $P_{c,s}$  и  $Q_{c,s}$  используются соответственно

$$B_C^{PP(j)} \text{ – для } Q_c; B_S^{PP(j)} \text{ – для } Q_s; B_C^{PP(j)} \text{ – для } P_c; B_S^{PP(j)} \text{ – для } P_s.$$

**Выводы.** В работе показаны особенности применения метода сращиваемых асимптотических разложений для решения задачи о дифракции волнения конечной амплитуды на неподвижном судне в условиях значительного мелководья. Определены выражения для потенциала скоростей дифрагированного волнового движения жидкости при произвольном курсовом угле волнения.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля / М.Д. Хаскинд. – М.: Наука, 1973. – 327 с.
2. Нильва А.Е. Силы волновой природы, действующие на значительном мелководье и мели. Дис... канд. техн. наук / А.Е. Нильва. Одес. гос. мор. ун-т. – Одесса, 2001. – 202 с.
3. Ефремова Н.В. Определение параметров качки малого судна при подходе к судну-партнеру на рейдовой стоянке. Дис... канд. техн. наук / Н.В. Ефремова. Одес. гос. мор. ун-т. – Одесса, 2001. – 173 с.

4. Fenton J.D. *Nonlinear wave theories // The Sea, Vol.9: Ocean Engineering Science / B. Le Mehaute, D.M. Hanes, Eds. – Wiley, New York, 1990. – 19 p.*
5. Fenton J.D. *The cnoidal theory of water waves // Developments In Offshore Engineering: Wave Phenomena And Offshore Topics / Herbich J.B., Editor. – Gulf Publishing Company, 1998. – P. 55-100.*
6. Kinnas A.S. *Notes on fifth-order gravity wave theory // Fundamentals of offshore structures and design of fixed offshore platforms / OTRC/UT Austin, 13.04.2007. – 9 p.*
7. Федорова Е.Ю. *Расчетные модели волнозащитных и берегоукрепительных сооружений морского побережья и водохранилищ: Дис... канд. техн. наук / Е.Ю.Федорова; Одес.нац.мор.ун-т. – Одесса, 2005. – 281 с.*
8. Сердюченко А.Н. *Динамика морских волн и судна в шторме с учетом нелинейных эффектов // Гидромеханика. Межведомственный сборник научных трудов. – Вып. 72. – К.: НАН Украины. Институт гидромеханики, 1998. – С. 112-134.*
9. *Мореходность судов и средств океанотехники. Методы оценки: Монография / Под ред. И.К. Бородая. – ФГУП «Крыловский государственный научный центр». – СПб., 2013. – 256 с.*
10. Воробьев Ю.Л. *Гидродинамика судна в стесненном фарватере / Ю.Л. Воробьев. – СПб.: Судостроение, 1992. – 224 с.*
11. Демидюк А.В., Ефремова Н.В., Чернецкий А.В. *О назначении характеристик волнения при планировании экспериментов в опытовом бассейне ОНМУ // Вісник ОНМУ. – Одеса: Вид-во ОНМУ, 2015. – № 45. – С.145-156.*

*Стаття надійшла до редакції*

**Рецензенти:**

доктор технічних наук, професор, генеральний директор Морського інженерного бюро **Г.В. Єгоров**

кандидат технічних наук, завідувач кафедри «Теорія і проектування корабля ім. проф. Ю.Л. Воробйова» Одеського національного морського університету **О.В. Демідюк**