Вісник
Одеського національного морського університету
№ 2 (48), 2016

УДК 629.12:532.059

Н.В. Ефремова, Е.Ю. Федорова

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ДЕФОРМИРУЕМЫХ КООРДИНАТ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ ПРОГРЕССИВНОГО ВОЛНЕНИЯ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ И МЕЛКОВОДЬЕ

Надано визначення функцій, які перетворюють фізичний простір (об'єм, що займає вода) в умовний деформований простір на глибокій воді та мілководді. За допомогою цих функцій виконуються наближені рішення гідродинамічних задач про потенціал швидкостей хвилювання кінцевої амплітуди при довільній глибині акваторії.

Ключові слова: *мілководдя, глибока вода, нелінійна теорія хвилювання, потенціал швидкостей, метод деформованих координат.*

Представлено определение функций, преобразующих физическое пространство (объем, занятый водой) в условное деформированное пространство на глубокой воде и мелководье. С помощью этих функций выполняются приближенные решения гидродинамических задач о потенциале скоростей волнения конечной амплитуды при произвольной глубине акватории.

Ключевые слова: *мелководье, глубокая вода, нелинейная теория волн, потенциал скоростей, метод деформируемых координат.*

Definition of functions that transform physician space (volume occupied by water) into conventional deformed space in deep and shallow water is introduced. The approximate solution of the hydrodynamic problems concer-ning velocity potential of the finite amplitude waves at the arbitrary water depth is carried out with help of these functions.

Keywords: *shallow water, deep water, non-linear wave theory, velocity potential, deformed coordinates method.*

Введение. Геополитическое положение Украины и наличие на ее территории большого количества морских портов позволяют нашей стране получать доходы от эксплуатации водного транспорта. При этом вопросы безопасной эксплуатации всех элементов морехозяйственного комплекса (судов, средств освоения шельфа, портовых и берегозащитных сооружений) невозможно решать без информации о характеристиках волнения. Корректное определение этих характеристик осложняется нестационарностью области, занятой жидкостью и нелинейностью граничного условия на свободной поверхности жидкости, требуется конкретизация задачи и специализация граничных условий.

Большое количество работ отечественных и многочисленных зарубежных авторов в области гидродинамики морских волн и судов посвящены определению характеристик волнения конечной амплитуды. Основные результаты получены в рамках потенциальной теории. Переход от линейных теорий и соотношений к нелинейным целесообразен для ветровых волн предельной крутизны на глубокой воде, для длинных волн на значительном мелководье и в зоне разрушения волн.

Нелинейные модели ветровых волн в шторме и нелинейные гидромеханические нагрузки на корпус судна рассмотрены в работе [1]. Поведение судна на сильном и экстремальном волнении изучается в работе [2] с учетом переменности смоченной поверхности и взаимосвязи колебаний.

Наборы статистик по волнению, как экстремальные, предназначенные для режима выживания плавучего объекта, так и оперативные (повторяемость высот волн, повторяемость периодов волн, совместная повторяемость высот и периодов волн, характеристика волн зыби, орбитальные скорости волн), приведены в работе [3].

Существует большое количество нелинейных теорий волн. Наиболее распространена теория Стокса − разложение уравнения волнового профиля в ряд и определение коэффициентов разложения из условий, удовлетворяющих уравнениям гидродинамики для волн конечной амплитуды. В инженерных приложениях используются разложения, как правило, до пятого порядка (например, [4; 5]), однако существуют [3] решения до одиннадцатого порядка. Теория функций тока (stream function) дает возможность точно удовлетворить кинематическому граничному условию и свести к минимуму ошибки в динамическом граничном условии. Следует отметить также применение так называемой новой волновой теории [3], которая позволяет получить линейное приближение к наиболее вероятной форме максимальной волны в шторме.

Перечисленные выше волновые теории при всех несомненных достоинствах имеют общий недостаток − довольно сложные и громоздкие выражения. Это обстоятельство, а также тот факт, что волны достигают предельной крутизны достаточно редко, приводит к тому, что для инженерных расчетов чаще всего используются результаты линейной теории волновых движений.

Поэтому **описание метода, позволяющего получить компактное приближенное решение нелинейной краевой задачи для потенциала скоростей прогрессивных волн конечной амплитуды в жидкости произвольной глубины представляется весьма актуальным.**

В работах [6; 7] приведены приближенные решения задач о свободных прогрессивных волнах конечной амплитуды, полученные с помощью метода деформируемых координат. Ограниченность объема указанных работ не позволило описать метод подробно, что затрудняет возможность его использования при решении других гидродинамических задач.

Цель работы – изложение процедуры применения метода деформируемых координат к определению потенциала скоростей волнения конечной амплитуды в условиях глубокой воды и мелководья.

Изложение основного материала исследования. Рассмотрим плоские поверхностные гравитационные волны в невязкой жидкости произвольной глубины, ограниченной свободной поверхностью [6; 7]. Начало неподвижной декартовой системы координат совместим со свободной поверхностью, ось z_1 направим вертикально вверх, а ось x_1 вправо. Будем считать волновое движение потенциальным.

Пусть E − область, занятая жидкостью. В принятой системе координат потенциал возмущенных скоростей жидкости $\varphi(x_1, z_1, t)$ в условиях глубокой воды должен удовлетворять следующей дифференциальной системе [8], состоящей из уравнения Лапласа (1), граничных условий на свободной поверхности (2) и (3), условия затухания волнового движения на глубине (4)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)\varphi(x_1, z_1, t) = 0, \qquad (x_1, z_1) \in E; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi(x_1, z_в, t)}{\partial z_1} = \frac{\partial z_в(x_1, t)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi(x_1, z_в, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial z_в(x_1, t)}{\partial t}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi(x_1, z_в, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial \varphi(x_1, z_в, t)}{\partial x_1}\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi(x_1, z_в, t)}{\partial z_1}\right]^2\right\} + g z_в(x_1, t) = 0; \tag{3}$$

$$\lim_{z_1 \to -\infty} grad\,\varphi(x_1, z_1, t) = 0. \tag{4}$$

Здесь $z_в = z_в(x_1, t)$ − уравнение свободной поверхности взволнованной жидкости.

Система (1)-(4) дополняется условием периодичности

$$\varphi(x_1 - c \cdot t, z_1) = \varphi(x, z); \quad z_в(x_1 - c \cdot t) = z_в(x), \tag{5}$$

где c − скорость бега волн.

Для мелководной акватории постоянной глубины h вместо условия (4) принимается условие на дне водоема

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi(x_1, z_1 = -h, t) = 0, \quad -\infty < x_1 < \infty. \tag{6}$$

Как это принято в большинстве исследований волнения конечной амплитуды, введем подвижную декартову систему координат (x, z), которая при $t = 0$ совпадает с неподвижной и равномерно перемещается в сторону бега волн со скоростью c. Потенциал скорости и профиль волны периодичны с периодом λ.

Перейдем к безразмерным характеристикам

$$\begin{gathered}\tilde{x} = k(x_1 - c \cdot t); \quad \tilde{z} = k \cdot z_1; \quad H = kh; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \\ \varphi(x_1 - c \cdot t, z_1) = \frac{c}{k}\tilde{\Phi}(x, z); \quad z_в(x_1 - c \cdot t) = \frac{1}{k}\tilde{\zeta}_в(x).\end{gathered} \tag{7}$$

В дальнейшем изложении знак «~» над безразмерными координатами и функциями опустим.

Обозначим $\tilde{E}$ − часть нормированного пространства, занятую жидкостью. Потенциал $\Phi(x, z)$ должен удовлетворять следующей дифференциальной системе:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(x, z) = 0, \quad (x, z) \in \tilde{E}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_в(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_в(x)}{\partial x}, \quad z = \zeta_в(x); \tag{9}$$

$$\omega\zeta_в(x) - \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z}\right]^2\right\} = 0, \quad z = \zeta_в(x); \tag{10}$$

Отметим, что функция $\zeta_в(x)$ - 2π − периодична.

Условие затухания волнового движения с ростом глубины, как и выше, записывается отдельно для глубокой воды

$$\lim_{z \to -\infty} grad\Phi(x, z) = 0; \tag{11}$$

и для мелководья

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi(x_1, z_1 = -h, t) = 0, \quad -\infty < x_1 < \infty. \tag{12}$$

Здесь $\omega = \frac{g}{kc^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{g\lambda}{c^2}$.

В исходной постановке задач, как на глубокой воде, так и на мелководье, считаются заданными длина волны λ и скорость бега волн c, а величина ω подлежит определению. Для глубокой воды $\omega \to 1$.

Продифференцируем (10) по x, выразим из полученного равенства $\dfrac{\partial \zeta_в(x)}{\partial x}$ и подставим это выражение в (9). Будем считать, что возмущения жидкости невелики. Тогда величины $\zeta_в(x)$, $\dfrac{\partial \Phi(x,z)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \Phi(x,z)}{\partial z}$, а также их производные по координатам представляют собой величины порядка $\varepsilon < 1$, где ε - характерный линейный размер задачи (здесь − отношение амплитуды волны к ее длине). В этом случае

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,z)}{\partial x^2} + \omega \frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial z} = 0(\varepsilon^2), \quad при\ z = \zeta_в(x). \tag{13}$$

Обозначим функции, входящие в условие (13) на свободной поверхности, символом $f(x,z) = f[x, z = \zeta_в(x)]$. Разложим эти функции в ряд по z, учитывая, что они вычисляются на свободной поверхности $z = \zeta_в(x)$ и, удерживая члены разложения порядка ε^2, получим

$$f(x,z) = f(x,0) + \zeta_в(x) \cdot \frac{\partial f(x,0)}{\partial z} + 0(\varepsilon^2), \tag{14}$$

поскольку $|f(x,z)| \sim \varepsilon$.

После преобразований получается, что

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi(x,z)}{\partial x^2} + \omega \frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial z}\right]_{z=\zeta_в(x)} = \left[\frac{\partial^2 \Phi(x,0)}{\partial x^2} + \omega \frac{\partial \Phi(x,0)}{\partial z}\right] + 0(\varepsilon^3). \tag{15}$$

Приближенное краевое условие для потенциала скоростей при «средних» возмущениях записывается в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Phi(x,0)}{\partial x^2} + \omega \frac{\partial \Phi(x,0)}{\partial z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{\partial \Phi(x,0)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial \Phi(x,0)}{\partial z}\right]^2\right\} - \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Phi(x,0)}{\partial x}\right]^2 + 0(\varepsilon^3) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, при «средних» возмущениях получается приближенная (с точностью до малых порядка ε^3) краевая задача для потенциала возмущенных скоростей волнового движения

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x,z)}{\partial z^2} = 0, \quad (x,z) \in E_0; \tag{17}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi(x,0)}{\partial x^2}+\omega\frac{\partial\Phi(x,0)}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{\partial\Phi(x,0)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial\Phi(x,0)}{\partial z}\right]^2\right\}-\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\Phi(x,0)}{\partial x}\right]^2+0\left(\varepsilon^3\right)=0,\quad -\infty<x<\infty;
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\lim_{z\to-\infty} grad\ \Phi(x,z)=0. \tag{19}
$$

Область E_0 определения потенциала $\Phi(x,z)$ − нижняя полуплоскость $z\le 0$. Эта область − физическое пространство, в котором описываются кинематические и гидродинамические характеристики исследуемого волнового движения.

Введем вместо нормированного физического пространства (x,z) условное деформированное пространство (ξ,η), выполнив замену переменных

$$
x=\xi+F(\xi,\eta),\quad z=\eta. \tag{20}
$$

Для определения функции $F(\xi,\eta)$ предположим, что сама эта функция и ее частные производные до второго порядка включительно по ξ и η имеют порядок малости ε. Для того, чтобы краевую задачу (17)-(19) перенести из физического пространства (x,z) в условное пространство (ξ,η), вычислим производные ξ и η по x и z. Первые производные имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{1+\dfrac{\partial F}{\partial\xi}}=1-\frac{\partial F}{\partial\xi}+0\left(\varepsilon^2\right);\qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}=0;\\
&\frac{\partial\xi}{\partial z}=-\frac{\partial F}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\partial F}{\partial\xi}}=-\frac{\partial F}{\partial\eta}+0\left(\varepsilon^2\right);\qquad \frac{\partial\eta}{\partial z}=1.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Соответствующие вторые производные

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{\partial F}{\partial\xi}\right)^3}=-\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}+0\left(\varepsilon^2\right);\qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0;\\
&\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}+0\left(\varepsilon^2\right);\qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}=0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

С учетом (21) и (22) производные потенциала $\Phi(x,z)$ в новых переменных примут вид

$$\frac{\partial\Phi(x,z)}{\partial x}=\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi}+0(\varepsilon^3); \tag{23}$$

$$\frac{\partial\Phi(x,z)}{\partial z}=\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\eta}-\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi}+0(\varepsilon^3); \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2\Phi(x,z)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 F(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi}+ \\ +0(\varepsilon^3); \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2\Phi(x,z)}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\Phi(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\Phi(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2 F(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\eta}+ \\ +0(\varepsilon^3). \tag{26}$$

Подставляя соотношения (23)-(26) в краевую задачу (17)-(19) и пренебрегая слагаемыми порядка ε^3 и выше, получаем соответствующую краевую задачу в деформированном пространстве (ξ,η), приведенную в [7].

Для выбора функции $F(\xi,\eta)$ используем условия

$$\frac{\partial\Phi(\xi,0)}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2 F(\xi,0)}{\partial\xi^2}+\omega\cdot\frac{\partial F(\xi,0)}{\partial\eta}\right]+\frac{\partial^2\Phi(\xi,0)}{\partial\xi^2}\left[2\cdot\frac{\partial F(\xi,0)}{\partial\xi}+ \right. \\ \left. +\frac{\partial\Phi(\xi,0)}{\partial\xi}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\left[\frac{\partial\Phi(\xi,0)}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial\Phi(\xi,0)}{\partial\eta}\right]^2\right\}=0; \tag{27}$$

$$\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2 F(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 F(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}\right]+2\left[\frac{\partial^2\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial\xi}+ \right. \\ \left. +\frac{\partial^2\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial F(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right]=0. \tag{28}$$

Эти условия удовлетворяются, если принять

$$F(\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\Phi(\xi,\eta)=-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\exp(\omega\eta)\cdot\sin\omega\xi\cdot \tag{29}$$

Для функции $\Phi(\xi,\eta)$ в деформированном пространстве (ξ,η) получается классическая задача теории волн малой амплитуды [8]. Ее решение получается в виде

$$\Phi(\xi,\eta) = A\exp(\omega\eta)\sin\omega\xi \cdot \tag{30}$$

Таким образом, функции $\Phi(\xi,\eta)$ и $F(\xi,\eta)$ определяют в деформированном пространстве решение краевой задачи (17)-(19) волновых движений жидкости для «средних» возмущений. Взаимно-однозначное соответствие точек (x,z) физического пространства и (ξ,η) деформированного пространства устанавливается формулами

$$x = \xi - \frac{1}{2}A\exp(\omega\eta)\sin\omega\xi, \quad z = \eta. \tag{31}$$

Константа A [7] определяется по уравнению волнового профиля с точностью до малых третьего порядка с учетом условия неразрушения волн.

Для мелководной акватории граничные условия на свободной поверхности допускают такое же преобразование, как и в случае глубокой воды. Полагая, что возмущения жидкости невелики, и удерживая в граничных условиях слагаемые, имеющие порядок малости не выше ε^2 $(\varepsilon << 1)$, получаем приближенную краевую задачу для потенциала $\Phi(x,z)$ при «средних» возмущениях, включающую условия (17), (18), а вместо (19) будет

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,-H) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \tag{32}$$

Область E_0' определения потенциала $\Phi(x,z)$ − это полоса $\{-\infty < x < \infty,\ -H \le z \le 0\}$, в которой отыскиваются характеристики волнового движения.

Как и для случая неограниченной глубины, вместо нормированного физического пространства $[|x| < \infty, -H \le z \le 0]$ введем условное деформированное пространство (ξ,η) с помощью преобразования координат

$$x = \xi + K(\xi,\eta); \quad z = \eta \cdot \tag{33}$$

Функция $\mathrm{K}(\xi,\eta)$ определяется так, чтобы нелинейную краевую задачу (17), (18), (32) для потенциала $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{z})$ в нормированном физическом пространстве свести к совокупности линейных краевых задач в деформированном пространстве. Функция $K(\xi,\eta)$ и ее частные производные по переменным ξ и η до второго порядка включительно имеют порядок малости ε.

Используя соотношения (21)-(26), в которых функция $F(\xi,\eta)$ заменяется функцией $K(\xi,\eta)$, из краевой задачи (17), (18), (32) получаем дифференциальную систему для потенциала скоростей $\Phi(\xi,\eta)$ в деформированном пространстве (ξ,η), которая включает лишь составляющие с порядком малости не выше ε^2

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Phi(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}-\frac{\partial\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2 K(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 K(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}\right]-\\&-2\cdot\left[\frac{\partial^2\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial K(\xi,\eta)}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\Phi(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{\partial K(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right]+0\left(\varepsilon^3\right)=0;\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\Phi(\xi,0)}{\partial\xi^2}+\omega\frac{\partial\Phi(\xi,0)}{\partial\eta}-\frac{\partial\Phi(\xi,0)}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2 K(\xi,0)}{\partial\xi^2}+\omega\cdot\frac{\partial K(\xi,0)}{\partial\eta}\right]-\frac{\partial^2\Phi(\xi,0)}{\partial\xi^2}\times\\&\times\left[2\frac{\partial K(\xi,0)}{\partial\xi}+\frac{\partial\Phi(\xi,0)}{\partial\xi}\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\left[\frac{\partial\Phi(\xi,0)}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial\Phi(\xi,0)}{\partial\eta}\right]^2\right\}+0\left(\varepsilon^3\right)=0;\end{aligned} \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\Phi(\xi,-H)-\frac{\partial}{\partial\eta}K(\xi,-H)\frac{\partial}{\partial\xi}\Phi(\xi,-H)=0\left(\varepsilon^3\right). \tag{36}$$

Представим потенциал $\Phi(\xi,\eta)$ в виде суммы

$$\Phi(\xi,\eta)=\Phi_1(\xi,\eta)+\Phi_2(\xi,\eta)+0\left(\varepsilon^3\right), \tag{37}$$

считая, что $\Phi_1=0(\varepsilon)$, а $\Phi_2=0\left(\varepsilon^2\right)$. Учитывая, что $K=0(\varepsilon)$, из системы (34)-(36) получаем две дифференциальные системы относительно потенциалов Φ_1 и Φ_2, т.е нелинейная краевая задача для потенциала скорости при «средних» возмущениях сводится к совокупности двух линейных краевых задач.

Дифференциальная система для потенциала $\Phi_1(\xi,\eta)$ – это стандартная краевая задача теории прогрессивных волн малой амплитуды на мелководье. Ее решение выписывается [8] в виде

$$\Phi_1(\xi,\eta)=Bch\alpha(\eta+H)\sin\alpha\xi, \tag{38}$$

где α и ω связаны дисперсионным соотношением

$$\alpha = \omega \, th \alpha H \cdot \tag{39}$$

По смыслу величина α является сама волновым числом в деформированном пространстве (ξ, η).

Константа B [6] определяется по уравнению волнового профиля с точностью до малых третьего порядка с учетом условия неразрушения волн.

Если принять

$$K(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\Phi_1(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}B\,ch\alpha(\eta + H)\sin\alpha\xi \tag{40}$$

и подставить выражения для функции $K(\xi,\eta)$ и потенциала первого порядка $\Phi_1(\xi,\eta)$ в дифференциальную систему для $\Phi_2(\xi,\eta)$, как это сделано в [6], получим

$$\Phi_2(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}B^2\alpha^3 \frac{ch2\alpha(\eta + H)\cdot \sin 2\alpha\xi}{\omega\alpha\, sh2\alpha H - 2\alpha^2 ch2\alpha H} - \frac{1}{8}B^2\alpha \sin 2\alpha\xi \cdot \tag{41}$$

Выводы. В работе показаны особенности применения оригинального метода приближенного решения нелинейных волновых задач, связанного с использованием условий деформации пространства. Полученные с помощью этого метода выражения для потенциала скоростей волнения конечной амплитуды в условиях глубокой воды и мелководья могут быть применены для определения характеристик волнения, а также для оценки волнового воздействия на суда, плавучие и стационарные морские сооружения.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Сердюченко А.Н. Динамика морских волн и судна в шторме с учетом нелинейных эффектов // Гидромеханика. Межведомственный сборник научных трудов. − Вып. 72. − К.: НАН Украины. Институт гидромеханики, 1998. − С. 112-134.*
2. *Мореходность судов и средств океанотехники. Методы оценки: Монография / Под ред. И.К. Бородая. – ФГУП «Крыловский государственный научный центр». – СПб., 2013. – 256 с.*
3. *Лопатухин Л.И. Ветровое волнение: Учебн. пособие / Л.И. Лопатухин. – СПб.: ВВМ, 2012. – 165 с.*
4. *Fenton J.D. Nonlinear wave theories // The Sea, Vol.9: Ocean Engineering Science / B. Le Mehaute, D.M. Hanes, Eds. – Wiley, New York, 1990. – 19 p.*

5. *Kinnas A.S. Notes on fifth-order gravity wave theory // Fundamentals of offshore structures and design of fixed offshore platforms / OTRC/UT Austin, 13.04.2007. – 9 p.*
6. *Федорова Е.Ю. Приближенная гидродинамическая теория прогрессивных волн конечной амплитуды // Вісник ОДМУ. − Одеса: Вид-во ОДМУ, 1998. − № 1. – С. 57-61.*
7. *Федорова Е.Ю. Развитие методов решения задачи о прогрессивных волнах конечной амплитуды // Вісник ОДМУ. − Одеса: Вид-во ОДМУ, 1998. − № 1. – С. 62-66.*
8. *Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. − М.: Наука, 1977. − 816 с.*

Стаття надійшла до редакції 20.10.2016

Рецензенти:

кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри «Теорія та проектування корабля ім. проф. Ю.Л. Воробйова» Одеського національного морського університету **А.В. Демідюк**

кандидат технічних наук, старший науковий співпрацівник Морського Інженерного Бюро **О.Ю. Нільва**