УДК 517.9

Т.Д. Панченко, І.А. Тузова, В.В. Челабчі, В.М. Челабчі

ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ EXCEL ПРИ ВИКЛАДАННІ КУРСУ «МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ»

У статті проводиться аналіз використання чисельних методів при вивченні навчальної дисципліни «Моделювання систем». Описано використання аналітико-сіткового методу розв'язання звичайних диференціальних рівнянь.
Ключові слова: *моделювання систем, рішення, звичайні диференціальні рівняння.*

В статье проводится анализ использования численных методов при изучении учебной дисциплины «Моделирование систем». Описано использование аналитико-сеточного метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
Ключевые слова: *моделирование систем, решение, обыкновенные дифференциальные уравнения.*

The article analyzes the use of numerical methods in the study of educational discipline «Simulation systems». We describe the use of analytical-grid method for solving ordinary differential equations.
Keywords: *simulation systems, decision, ordinary differential equations.*

Вступ. При створенні нових і для оптимізації режимів роботи існуючих суднових систем і установок активно використовуються методи математичного моделювання. Вірогідність інформації, отриманої при моделюванні динаміки суднових комплексів та систем, в першу чергу залежить від того, наскільки докладно й адекватно використовувані математичні моделі описують процеси в системі.

Не менш важливим представляється розробка ефективних чисельних методів для імітації процесів у системах. Використовувані чисельні методи повинні мати абсолютну стійкість або, у всякому разі, стійкість в максимально широкому діапазоні параметрів моделі. Необхідно також забезпечувати максимально низьку методичну погрішність чисельного методу.

Вибір методу чисельного моделювання динамічних процесів в суднових установках і системах залежить від рівня вимог до постановки задачі.

Найбільш достовірну інформацію про процеси можна отримати, використовуючи проекційно-сіткові методи [1], [2]. Але реалізація проекційно-сіткового методу в середовищі Excel вимагає організації громіздких таблиць.

© **Панченко Т.Д., Тузова І.А., Челабчі В.В., Челабчі В.М., 2017**

Часто необхідно проводити оціночні розрахунки, коли потрібно встановити наближені результати для отримання інформації про характер процесів, що протікають. У цьому випадку має сенс використовувати менш точні різницеві методи, які легко реалізуються в середовищі Excel.

Не менш важливим є ефективне використання чисельних методів при освоєнні курсу «Моделювання систем». В цьому випадку чисельне моделювання динамічних процесів в середовищі Excel легко реалізується, а візуалізація результатів проводиться легко і наочно.

Моделювання динаміки об'єктів з зосередженими параметрами. Опис динамічних процесів в елементах суднових комплексів звичайно базується на концепції систем з зосередженими параметрами. Звичайні диференціальні рівняння першого або другого порядку використовуються як математичні моделі об'єктів моделювання.

Як приклад розглядається моделювання перехідних процесів у системі автоматичного регулювання (рис. 1). Використано пропорційно-інтегрально-диференціальний (ПІД) регулятор.

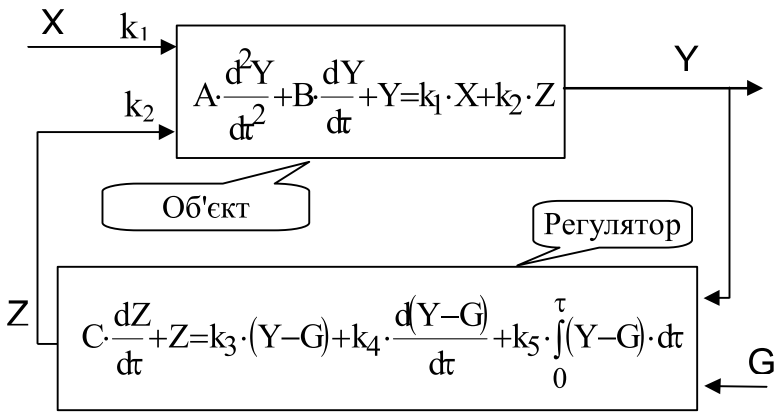

Рис. 1. Схема системи автоматичного регулювання

Прийняті позначення:
τ – час;
C – коефіцієнт властивості об'єкта;
X – зовнішній вплив на об'єкт;
Y – реакція системи;
Z – регулюючий вплив;
G – налаштування регулятора;
k_1-k_5 – коефіцієнти, що враховують дію різного роду впливів.
Всі величини представлені в безрозмірному вигляді.
Математична модель об'єкта (1)

$$A \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2} + B \cdot \frac{dY}{d\tau} + Y = k_1 \cdot X + k_2 \cdot Z, \quad \tau = 0 \quad Y = Y_0, \quad Y' = Y'_0. \tag{1}$$

Математична модель регулятора (2)

$$C \cdot \frac{dZ}{d\tau} + Z = k_3 \cdot (Y - G) + k_4 \cdot \frac{d(Y-G)}{d\tau} + k_5 \cdot \int_0^{\tau} (Y - G) \cdot d\tau, \quad \tau = 0 \quad Z = Z_0. \qquad (2)$$

При моделюванні використовується чисельний метод трапецій.

Для реалізації чисельного методу рівняння об'єкта (10) слід перетворити в систему двох рівнянь. Вводиться нова змінна (3)

$$F = dY/d\tau\,. \qquad (3)$$

Математична модель системи регулювання представляється у вигляді системи трьох рівнянь (4), (5), (6) які необхідно вирішувати спільно

$$\frac{dY}{d\tau} = F, \qquad \tau = 0,\;\; Y = Y_0. \qquad (4)$$

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{dF}{d\tau} + F = -\frac{1}{B} Y + \frac{k_1}{B} \cdot X + \frac{k_2}{B} \cdot Z, \qquad \tau = 0,\;\; F = F_0 = Y'_0. \qquad (5)$$

$$C \cdot \frac{dZ}{d\tau} + Z = k_3 \cdot (Y - G) + k_4 \cdot \frac{d(Y-G)}{d\tau} + k_5 \cdot \int_0^{\tau} (Y - G) \cdot d\tau, \quad \tau = 0,\;\; Z = Z_0. \qquad (6)$$

При запису кінцево-різницевих аналогів диференціальних рівнянь. використовується різницева схема **трапецій**. Після перетворень отримаємо в компактному запису систему рівнянь.

$$F_i = D_1 \cdot F_{i-1} + D_2 \cdot (Y_i + Y_{i-1}) + D_3 \cdot (X_i + X_{i-1}) + D_4 \cdot (Z_i + Z_{i-1}), \qquad (7)$$

$$Y_i = Y_{i-1} + D_5 \cdot (F_i + F_{i-1}), \qquad (8)$$

$$Z_i = D_6 \cdot Z_{i-1} + D_7 \cdot Y_i + D_8 \cdot Y_{i-1} + D_9 \cdot G_i + D_{10} \cdot G_{i-1}, \qquad (9)$$

де

$$D_1 = \frac{2 \cdot A - B \cdot \Delta\tau}{2 \cdot A + B \cdot \Delta\tau}, \quad D_2 = -\frac{\Delta\tau}{2 \cdot A + B \cdot \Delta\tau}, \quad D_3 = \frac{k_1 \cdot \Delta\tau}{2 \cdot A + B \cdot \Delta\tau}, \; D_4 = \frac{k_2 \cdot \Delta\tau}{2 \cdot A + B \cdot \Delta\tau},$$

$$D_5 = \frac{\Delta\tau}{2}, \; D_6 = \frac{2 \cdot C - \Delta\tau}{2 \cdot C + \Delta\tau}, \; D_7 = \frac{2 \cdot \Delta\tau}{2 \cdot C + \Delta\tau} \cdot \left(\frac{k_3}{2} + \frac{k_4}{\Delta\tau} + \frac{k_5 \cdot \Delta\tau}{2} \right),$$

$$D_8 = \frac{2 \cdot \Delta\tau}{2 \cdot C + \Delta\tau} \cdot \left(\frac{k_3}{2} - \frac{k_4}{\Delta\tau} + \frac{k_5 \cdot \Delta\tau}{2} \right), \quad D_9 = \frac{2 \cdot \Delta\tau}{2 \cdot C + \Delta\tau} \cdot \left(-\frac{k_3}{2} - \frac{k_4}{\Delta\tau} - \frac{k_5 \cdot \Delta\tau}{2} \right),$$

$$D_{10} = \frac{2 \cdot \Delta\tau}{2 \cdot C + \Delta\tau} \cdot \left(-\frac{k_3}{2} + \frac{k_4}{\Delta\tau} - \frac{k_5 \cdot \Delta\tau}{2} \right).$$

Умови обчислювальної стійкості $0 < D_1 < 1$, $\quad 0 < D_6 < 1$.

Спільне рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16), (17), (18) в середовищі Excel може проводитися методом ітерацій. При ітераційному вирішенні практично завжди використовується метод Зейделя. Зокрема, він реалізований в табличному процесорі Excel.

Для забезпечення виконання ітерацій необхідно звернутися до активного пункту меню «Сервис», потім до команди меню «Параметры» і працювати із вкладкою «Вычисления», замовити ітераційний процес, установити число ітерацій чи установити відносну погрішність.

Аналітико-сітковий метод. Ряд різницевих методів (явний різницевий метод, метод трапецій, метод Рунге-Кутта 4 порядку) при певних значеннях коефіцієнтів рівнянь і кроку (інтервалу) інтегрування володіє нестійкістю. Тому рекомендується використовувати аналітико-сітковий [2; 5] метод розв'язання рівнянь типу (10).

Цей метод відрізняється абсолютною стійкістю і малою методичною похибкою

$$A \cdot \frac{dY}{d\tau} + Y = K \cdot X(\tau), \qquad \tau = 0, \quad Y = Y_0, \tag{10}$$

де τ − час;

$X(\tau)$ − вплив на об'єкт;

$Y(\tau)$ − реакція об'єкта;

A, K − коефіцієнти властивості об'єкта.

Одним зі способів побудови різницевих схем є використання точного аналітичного рішення на відрізку інтегрування рівного кроку сітки. У межах відрізка інтегрування використовується нова координатна вісь t, як показано на рис. 1, та проводиться рішення рівняння (11).

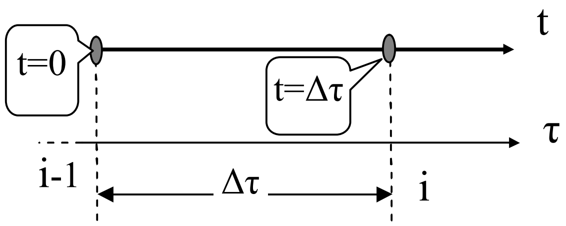

Рис. 2. Відрізок інтегрування

$$A \cdot \frac{dY}{dt} + Y = K \cdot B, \qquad t = 0, \quad Y = Y_{i-1}. \tag{11}$$

Залежно від способу подання впливу B можливі варіанти організації схем.

При B = const аналітичне рішення (11) має вигляд (12)

$$Y = \left(Y_{i-1} - K \cdot B\right) \cdot exp\left(-\frac{\tau}{A}\right) + \mathrm{K} \cdot B\,, \tag{12}$$

де B − прийняте на відрізку інтегрування постійне значення впливу. Розумно прийняти $B = 0{,}5 \cdot \left(X_i + X_{i-1}\right)$. Тоді розрахункова формула має вигляд (13)

$$Y_i = D_1 \cdot Y_{i-1} + D_2 \cdot \left(X_i + X_{i-1}\right)\,, \tag{13}$$

де $D_1 = exp\left(-\frac{\Delta\tau}{A}\right),\quad D_2 = \frac{K}{2} - \frac{K}{2} \cdot exp\left(-\frac{\Delta\tau}{A}\right).$

Ця схема абсолютно стійка, оскільки завжди виконується умова (14).

$$0 < \exp\left(-\frac{\Delta\tau}{\mathrm{A}}\right) < 1 \cdot \tag{14}$$

При лінійній залежності $B = a + b \cdot t$ аналітичне рішення (11) має вигляд (15)

$$Y = \left(Y_{i-1} - K \cdot a - K \cdot A \cdot b\right) \cdot exp\left(-\frac{\tau}{A}\right) + K \cdot a - K \cdot A \cdot b + K \cdot b \cdot \tau\,. \tag{15}$$

Якщо на відрізку інтегрування прийнята лінійна зміна величини X від X_{i-1} до X_i, то (16)

$$a = X_{i-1}, \quad b = \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta\tau}\,. \tag{16}$$

Розрахункова формула приймає вигляд (17)

$$Y_i = D_1 \cdot Y_{i-1} + D_2 \cdot X_{i-1} + D_3 \cdot X_i\,, \tag{17}$$

$$D_1 = \exp\left(-\frac{\Delta\tau}{A}\right), \quad D_2 = \frac{A \cdot K}{\Delta\tau} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta\tau}{A}\right)\right) - K \cdot \exp\left(-\frac{\Delta\tau}{A}\right),$$

де $$D_3 = K - \frac{A \cdot K}{\Delta\tau} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta\tau}{A}\right)\right).$$

Схема абсолютно стійка, оскільки завжди виконується умова (18)

$$0 < exp\left(-\frac{\Delta\tau}{A}\right) < 1\,. \tag{18}$$

Для оцінки ефективності чисельних методів авторами проводилася серія рішень лінійних рівнянь виду (10) як при переході системи з обуреного стану в стійкий, так і при стрибкоподібній зміні впливу (таблиця 1).

Таблиця 1

Оцінка ефективності чисельних методів

Метод	Оцінка абсолютної стійкості	Відносний рівень погрішності в порівнянні із проекційним методом
Явний різницевий метод	$0 < \frac{\Delta\tau}{A} < 1$	1.5 – 2.5
Неявний різницевий метод	Стійкий	1.2 – 2.0
Метод трапецій	$0 < \frac{\Delta\tau}{A} < 2$	1.1 – 1.5
Аналітико-сітковий метод з постійним впливом на інтервалі інтегрування	Стійкий	1.05 – 1.5
Аналітико-сітковий метод з лінійним впливом на інтервалі інтегрування	Стійкий	1.025– 1.1
Метод Рунге- Кутта 4 порядку	$0 < \frac{\Delta\tau}{A} < 2{,}785$	1.1 – 1.5
Проекційний метод	Стійкий	1

де $\Delta\tau$ – крок інтегрування.

Оцінка погрішності проводилися порівнянням з точними аналітичними рішеннями.

Згідно до таблиці 1 аналітико-сітковий метод можна рекомендувати для вирішення звичайних диференціальних рівнянь.

Моделювання одновимірних процесів переносу в каналах. У теплообмінних установках відбувається сукупність взаємозалежних процесів переносу маси, імпульсу й концентрації. Математична модель процесів теплопереносу в теплообмінних установках включає систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. При записі рівнянь математичних моделей можна незалежно від схеми руху теплоносіїв використовувати одновимірний опис тепло- й масопереносу в кожному каналі.

У безрозмірному вигляді одновимірний теплоперенос в каналі можна описати рівнянням (19)

$$\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}\cdot\frac{dT}{dX}=\sum_{k=1}^{Km}Nu_k\cdot\left(T_k-T\right), \tag{19}$$

де T, X – відповідно, температура потоку і вісі координат у напрямку руху потоку;

$\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}$ – комплекс критеріїв, що відображають потік;

T_k, Nu_k, – відповідно, температура і критерій, що описує теплообмін зі стінкою каналу.

Для моделювання зручно перетворити (19) в (20).

$$\left(\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}\Big/\sum_{k=1}^{Km}Nu_k\right)\cdot\frac{dT}{dX}+T=\sum_{k=1}^{Km}\left(\left(Nu_k\Big/\sum_{k=1}^{Km}Nu_k\right)\cdot\left(T_k\right)\right)$$

або

$$A\cdot\frac{dT}{dX}+T=\sum_{k=1}^{Km}\left(D_k\cdot T_k\right) \tag{20}$$

де $A=\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}\Big/\sum_{k=1}^{Km}Nu_k$, $D_k=Nu_k\Big/\sum_{k=1}^{Km}Nu_k$.

Рішення (20) можна проводити с використанням різних різницевих схем (явна, неявна, трапецій, Рунге-Кутта четвертого порядку) [50]. Проте в деяких випадках вони відрізняються нестійкістю і порівняно високою методичної похибкою.

Одним зі способів побудови різницевих схем є використання точного аналітичного рішення на відрізку інтегрування рівного кроку сітки. У межах відрізка інтегрування використовується нова координатна вісь x, як показано на рис. 4, та проводиться рішення рівняння (21).

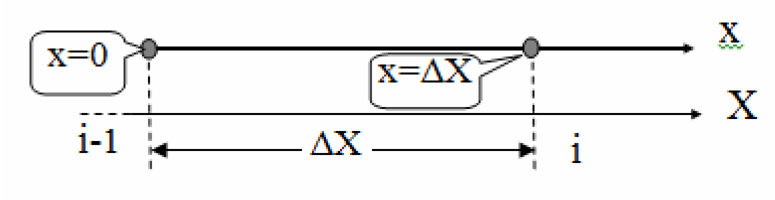

Рис. 4. Схема відрізка рішення (21)

$$A \cdot \frac{dT}{dx} + T = \sum_{k=1}^{Km} \left(D_k \cdot T_k \right), \quad \mathrm{x} = 0, \ \mathrm{T} = \mathrm{T_{i\text{-}1}} \tag{21}$$

Можна прийняти

$$\mathrm{A} = \left(\mathrm{A_i} + \mathrm{A_{i-1}} \right)/2, \ \mathrm{D_k} = \left(\mathrm{D_{k\,i}} + \mathrm{D_{k\,i-1}} \right)/2, \ \mathrm{T_k} = \left(\mathrm{T_{k\,i}} + \mathrm{T_{k\,i-1}} \right)/2.$$

У цьому випадку можна отримати розрахункову формулу (22)

$$T_i = T_{i-1} \cdot D1 + \sum_{k=1}^{Km} \left(D_k \cdot T_k \right) \cdot \left(1 - D1 \right), \tag{22}$$

де

$$D1 = \exp\left(-\left(\sum_{k=1}^{Km} Nu_k \Big/ \left(\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr} \right) \right) \cdot \Delta X \right).$$

Оскільки завжди виконується умова (23) пропонована різницева схема володіє абсолютною обчислювальною стійкістю

$$0 < \mathrm{D1} < 1. \tag{23}$$

Для оцінки методичної похибки різницевих схем проводилися варіантні дослідження. У канал з постійною безрозмірною температурою стінки T_k=0 і постійними умовами теплообміну подавалася середа з безрозмірною температурою на вході T=1.

Результати досліджень наведені на рис. 5.

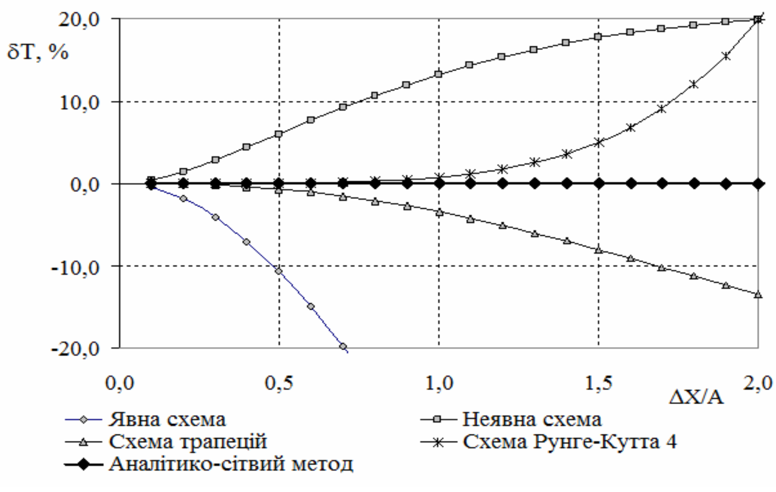

Рис. 5. Залежність найвищої відносної похибки від параметрів моделі

Висновки. Проведений аналіз показав ефективність використання Excel при моделюванні динаміки систем. У навчальному процесі при освоєнні курсу «Моделювання систем» краще використовувати метод трапецій (при забезпеченні умов стійкості процесу рішення) або аналітико-сітковий метод.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.*
2. *Челабчі В.М. Чисельні методи: Навч.посібник / В.М. Челабчі, В.В. Челабчі, І.А. Тузова. − Одеса: ОНМУ, 2012. – 39 с.*
3. *Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. − М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. − 632 с.*
4. *Годунов С.К. Разностные схемы (введение в теорию): Учебн. пособие / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1973. – 400 с.*
5. *Меркт Р.В. До питання чисельного моделювання систем з розподіленими і зосередженими параметрами / Р.В. Меркт, В.В. Челабчі, В.М. Челабчі // Матеріали VIII міжнародної НПК «Наука і освіта '2005». − Т. 23. Математичне моделювання. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2005. − С. 45-46.*
6. *Меркт Р.В. О выборе численных методов для исследования динамических систем / Р.В. Меркт, В.В. Челабчи, В.Н. Челабчи // Сб. научн. трудов по материалам международной научно-практической конференции «Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития '2007». − Т. 1. – Одесса: НИИМФ-ОНМУ, 2007. − С.81-84.*

Стаття надійшла до редакції 17.05.2017

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Інформаційні технології» Одеського національного морського університету **В.В. Вичужанін**

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Суднові енергетичні установки та технічна експлуатація» Одеського національного морського університету **Р.А. Варбанець**