

УДК 532+697.94

І.А. Тузова, В.В. Челабчі, В.М. Челабчі

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКІВ В ЩІЛИННИХ КАНАЛАХ

У статті описаний метод моделювання течій середовищ в щілинних каналах. Математична модель включає в себе систему рівнянь: нерозривності, Нав'є-Стокса (в проекції на координатні осі) і рівняння тиску. Проблема розглядається в двовимірній постановці, тому використовуються змінні: функція струму і вихор. Члени з похідними другого і першого порядку в просторі апроксимуються методом Патанкара за триточковою схемою, а похідна за часом апроксимується неявною схемою.

Ключові слова: щілинний канал, гідромеханіка, математичне моделювання.

В статье описан метод моделирования течений сред в щелевых каналах. Математическая модель включает в себя систему уравнений: неразрывности, Навье-Стокса (в проекции на координатные оси) и уравнение давления. Проблема рассматривается в двумерной постановке, поэтому используются переменные: функция тока и завихренность. Члены с производными второго и первого порядка в пространстве аппроксимируются методом Патанкара по трехточечной схеме, а производная по времени аппроксимируется неявной схемой.

Ключевые слова: щелевой канал, гидромеханика, математическое моделирование.

Heat exchangers of the slotted channel type differ in small intervals between heat exchange surfaces. It is technically difficult, and sometimes impossible, to conduct a detailed experimental study of the flow characteristics of the working medium in the cracks. Computational (computer) experiment on the basis of mathematical modeling makes it possible to conduct research faster and cheaper, so the development of methods for mathematical modeling of transport processes in the slotted channels is urgent. The mathematical model includes the system of equations: continuity, Navier-Stokes (in the projection on the coordinate axes) and the pressure equation. The problem is considered in a two-dimensional enhancement, so variables are used: the current and vorticity function. The authors propose a new technique for simulating the flow of media in channels. Members with derivatives of the second and first order in space are approximated by the Patankar method in a three-point scheme, and the time derivative is approximated by an implicit scheme.

Keywords: slotted channel, fluid mechanics, mathematical modeling.

© Тузова І.А., Челабчі В.В., Челабчі В.М., 2017

Вступ. Підвищення ефективності теплообмінних пристроїв вимагає надійної інформації про процеси перенесення флюїдів в каналах. У промисловості та у морських енергетичних установках використовуються теплообмінники щілинного типу. Теплообмінники такого типу відрізняються малими проміжками між поверхнями теплообміну. Технічно складно, а іноді неможливо здійснити детальне експериментальне дослідження особливостей течії робочих середовищ в щілинних каналах.

Обчислювальний (комп'ютерний) експеримент на основі математичного моделювання дозволяє провести дослідження швидше й дешевше [1]. Особливо важливо забезпечити достатню вірогідність результатів, які одержані в експерименті при мінімізації витрат. Вірогідність інформації, що отримана в обчислювальному експерименті, в першу чергу залежить від адекватності математичних моделей. Методи моделювання мають бути з абсолютною стійкістю і зниженою методичною похибкою.

Аналіз основних публікацій з проблеми. Методам чисельного моделювання процесів перенесення присвячені роботи [1]-[10].

Загальна постановка проблеми детально описана в [1]. Різницьві методи висвітлені в [1; 6]. Використання методу Галеркіна описано в [4]. Детальний опис методу кінцевих елементів даний в [5].

У роботі [8] запропонований новий підхід до апроксимації рівняння конвективного перенесення. Вдосконалений метод чисельного моделювання конвективного перенесення описано в роботах [9-10].

Об'єкт дослідження. Як об'єкт дослідження обрано канал складного профілю (рис. 1). Подібні канали використовуються в охолоджувачах повітря побічно-випарного типу [11].

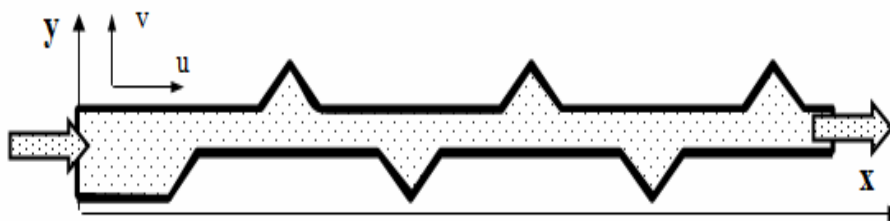


Рис. 1. Вид розглянутого каналу

Математичні моделі. Як математична модель приймається система рівнянь: нерозривності (1), Нав'є-Стокса у проекції на вісь x (2) та y (3), та рівняння тиску (4).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho \cdot \partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho \cdot \partial z} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Перелік умовних позначень:

x, y – відстань по координатних осях x, y , м;

τ – час, с;

u – швидкість повітря по напрямку осі x , м/с;

v – швидкість повітря по напрямку осі y , м/с;

p – тиск, Па, Н/м²;

ρ – щільність, кг/м³;

ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості, м²/с;

Рішення системи рівнянь (1)-(4) чисельними методами представляє певні складності. Тому система рівнянь (1)-(4) записується в змінних: функція струму й вихор. Такий підхід зручний при рішенні задач у двовимірній постановці.

Використовується система рівнянь (5) та (6).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \zeta, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + u \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \quad (6)$$

де ψ – функція струму, м²/с;

ζ – вихор, 1/с.

Разом з (5) і (6) використовуються вирази (7) і (8).

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad (7)$$

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8)$$

У роботі використовується модифікована безрозмірна форма рівнянь, коли величини швидкості v, u представлені як природні змінні, а всі інші величини в безрозмірному виді. Такий підхід дозволяє використовувати розроблені алгоритми й процедури для рішення як лінійних, так і нелінійних задач.

У безрозмірному виді вираз (5) представлено (9).

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = W, \quad (9)$$

У безрозмірному виді вираз (6) представлено (10).

$$\frac{\partial W}{\partial H_0} + U \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + V \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

У безрозмірному виді вирази (7) і (8) представлені (11).

$$U = \frac{\partial F}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial F}{\partial X}, \quad W = \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X}. \quad (11)$$

У (9)-(11) використані наступні позначення:

$$U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad H_0 = \frac{u_0 \cdot \tau}{L}, \quad W = \frac{L \cdot \zeta}{u_0}, \quad F = \frac{\psi}{u_0 \cdot L},$$

де $L = \delta_d$ – характерний розмір;
 u_0 – характерна швидкість.

$$Re = \frac{u_0 \cdot L}{\nu} \text{ – число Рейнольда.}$$

Граничні умови. На нижній границі $\psi = 0$ звідки $F = 0$. На верхній границі $\psi = u_0 \cdot \delta$. Отже, при $L = \delta$, $F = 0$.

На обох границях $u = v = 0$. Отже, $U = V = 0$.

На вході в канал задається профіль швидкості $u = f(y)$. Значення $v = 0$. При цьому $\zeta = 0$ ($W = 0$).

На виході каналу використовуються умови (12).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0. \quad (12)$$

Різницева апроксимація. Різницева апроксимація рівнянь (9), (11) проводиться згідно до схеми рис. 2.

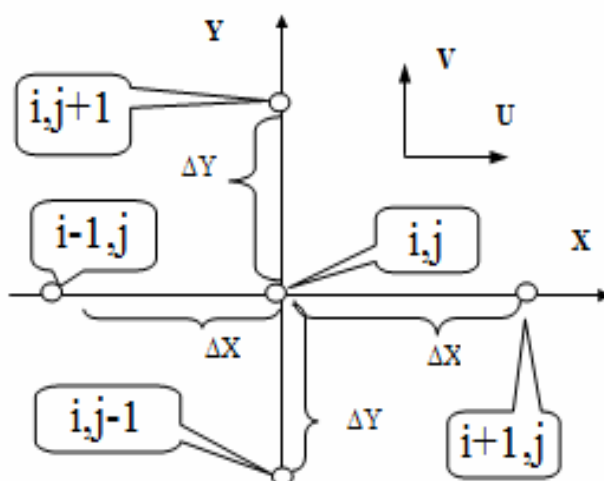


Рис. 2. Схема розміщення вузлів сітки

Рівняння Пуассона (9) апроксимується за допомогою центральних різницевих схем (13).

$$\frac{F_{i-1,j} + F_{i+1,j} - 2 \cdot F_{i,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{F_{i,j-1} + F_{i,j+1} - 2 \cdot F_{i,j}}{(\Delta Y)^2} = W_{i,j} \quad (13)$$

Розрахункова формула має вигляд (14).

$$F_{i,j} = (F_{i-1,j} + F_{i+1,j}) \cdot \frac{(\Delta Y)^2}{2 \cdot (\Delta Y)^2 + 2 \cdot (\Delta X)^2} + (F_{i,j-1} + F_{i,j+1}) \cdot \frac{(\Delta X)^2}{2 \cdot (\Delta Y)^2 + 2 \cdot (\Delta X)^2} - W_{i,j} \cdot \frac{(\Delta Y)^2 \cdot (\Delta X)^2}{2 \cdot (\Delta Y)^2 + 2 \cdot (\Delta X)^2}, \quad (14)$$

де $\Delta X, \Delta Y$ – кроки відповідно по осях X і Y .

При рівності кроків $\Delta X = \Delta Y = \Delta L$ формула (14) спрощується (15).

$$F_{i,j} = (F_{i-1,j} + F_{i+1,j} + F_{i,j-1} + F_{i,j+1}) \cdot \frac{1}{4} - W_{i,j} \cdot \frac{(\Delta L)^2}{4}. \quad (15)$$

Рівняння (10) перед різницевою апроксимацією перетворюється до (16).

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - U \cdot \text{Re} \cdot \frac{\partial W}{\partial X} \right) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} - V \cdot \text{Re} \cdot \frac{\partial W}{\partial Y} \right) = \text{Re} \cdot \frac{\partial W}{\partial H_0}. \quad (16)$$

Члени з похідними другого й першого порядку по просторі апроксимуються згідно [6,7] по триточковій схемі (17), (18), а похідна за часом апроксимуються за схемою «крок назад за часом» (19).

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - U \cdot \operatorname{Re} \cdot \frac{\partial W}{\partial X} \right) \approx \frac{1}{\Delta X^2} \cdot (W_{i-1,j} \cdot A_{X1} + W_{i,j} \cdot A_{X2} + W_{i+1,j} \cdot A_{X3}), \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} - V \cdot \operatorname{Re} \cdot \frac{\partial W}{\partial Y} \right) \approx \frac{1}{\Delta Y^2} \cdot (W_{i,j-1} \cdot A_{Y1} + W_{i,j} \cdot A_{Y2} + W_{i,j+1} \cdot A_{Y3}), \quad (18)$$

де $\operatorname{Re} \cdot \frac{\partial W}{\partial H_0} \approx \operatorname{Re} \cdot \frac{W_{i,j} - W_{i,j}^*}{\Delta H_0},$

$W_{i,j}^*$ – значення величини W в попередній момент часу.

Тоді різницева апроксимація (16) має вигляд (19).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta X^2} \cdot (W_{i-1,j} \cdot A_{X1} + W_{i,j} \cdot A_{X2} + W_{i+1,j} \cdot A_{X3}) + \\ & + \frac{1}{\Delta Y^2} \cdot (W_{i,j-1} \cdot A_{Y1} + W_{i,j} \cdot A_{Y2} + W_{i,j+1} \cdot A_{Y3}) = \operatorname{Re} \cdot \frac{W_{i,j} - W_{i,j}^*}{\Delta H_0} \end{aligned} \quad (19)$$

Розрахункова формула при рівності кроків $\Delta X = \Delta Y = \Delta L$ має вигляд (20)

$$W_{i,j} = P_w \cdot \left(-W_{i-1,j} \cdot A_{X1} - W_{i+1,j} \cdot A_{X3} - W_{i,j-1} \cdot A_{Y1} - W_{i,j+1} \cdot A_{Y3} - \frac{\operatorname{Re} \Delta L^2}{\Delta H_0} \cdot W_{i,j}^* \right), \quad (20)$$

де $P_w = 1 / \left(A_{X2} + A_{Y2} - \frac{\operatorname{Re} \cdot \Delta L^2}{\Delta H_0} \right).$

Коефіцієнти формули (20) розраховуються по залежностях (21), (22).

$$A_{X1} = \frac{U \cdot \operatorname{Re} \Delta L \cdot (C_2 - C_1)}{(C_2 - 2 \cdot C_1)}, \quad A_{X2} = -\frac{U \cdot \operatorname{Re} \Delta L \cdot C_2}{(C_2 - 2 \cdot C_1)}, \quad A_{X3} = \frac{U \cdot \operatorname{Re} \Delta L \cdot C_1}{(C_2 - 2 \cdot C_1)}, \quad (21)$$

де $C_1 = \exp(U \cdot \operatorname{Re} \cdot \Delta L) - 1, \quad C_2 = \exp(2 \cdot U \cdot \operatorname{Re} \cdot \Delta L) - 1.$

$$A_{Y1} = \frac{V \cdot \operatorname{Re} \Delta L \cdot (C_2 - C_1)}{(C_2 - 2 \cdot C_1)}, \quad A_{Y2} = -\frac{V \cdot \operatorname{Re} \Delta L \cdot C_2}{(C_2 - 2 \cdot C_1)}, \quad A_{Y3} = \frac{V \cdot \operatorname{Re} \Delta L \cdot C_1}{(C_2 - 2 \cdot C_1)}, \quad (22)$$

де $C_1 = \exp(V \cdot \operatorname{Re} \cdot \Delta L) - 1, \quad C_2 = \exp(2 \cdot V \cdot \operatorname{Re} \cdot \Delta L) - 1.$

Апроксимація крайових умов. Найбільш складно крайові умови визначаються для рівняння (10) згідно до (11).

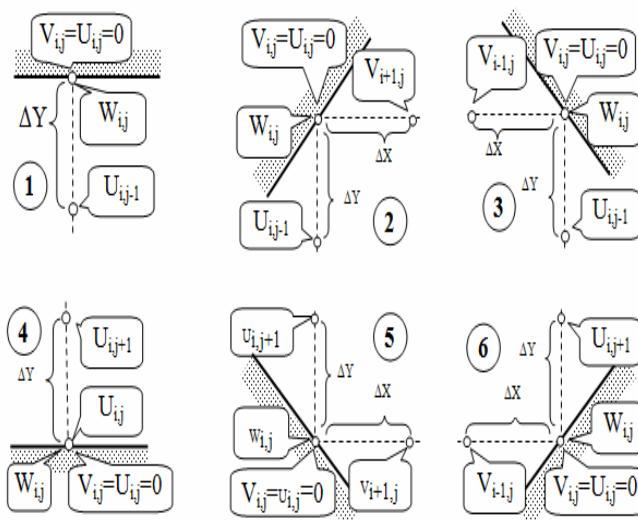


Рис. 3. Схема граничних умов для рівняння (11)

Розрахункові формули для границь каналу наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Розрахункові формули для граничних умов рис. 3

Номер	Розрахункова формула	Номер	Розрахункова формула
1	$W_{ij} = -\frac{U_{ij-1}}{\Delta Y}$	4	$W_{i,j} = \frac{U_{i,j+1}}{\Delta Y}$
2	$W_{i,j} = -\frac{U_{i,j-1}}{\Delta Y} - \frac{V_{i+1,j}}{\Delta X}$	5	$W_{i,j} = \frac{U_{i,j+1}}{\Delta Y} - \frac{V_{i-1,j}}{\Delta X}$
3	$W_{i,j} = -\frac{U_{i,j-1}}{\Delta Y} + \frac{V_{i-1,j}}{\Delta X}$	6	$W_{i,j} = \frac{U_{i,j+1}}{\Delta Y} + \frac{V_{i-1,j}}{\Delta X}$

Чисельна реалізація умов на вході в канал виконувалася у вигляді (23).

$$V_{0,j} = 0, \quad U_{0,j} = f_u(Y), \quad F_{0,j} = \int_0^{2L} f_u(Y) \cdot dY, \quad W_{0,j} = 0. \quad (23)$$

Чисельна реалізація умов на виході з каналу виконувалася у вигляді (24) згідно до рис. 4.

$$F_{ig,j} = 2 \cdot F_{ig-1,j} - F_{ig-2,j}, \quad W_{ig,j} = 2 \cdot W_{ig-1,j} - W_{ig-2,j} \quad (24)$$

де ig – індекс вузлів у вихідному перетині каналу.

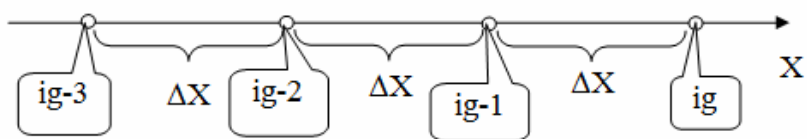


Рис. 4. Схема реалізації граничних умов на виході

Розрахунок проводиться по моментах часу. На кожному моменті часу n виконуються ітерації по швидкості рішень відносно F і W . Коли ітераційний процес зійшовся, за результатами рішення відносно полів U , V виконується підготовка значень для $n+1$ моменту часу. Загальний алгоритм програми розрахунку представлений на рис. 5.

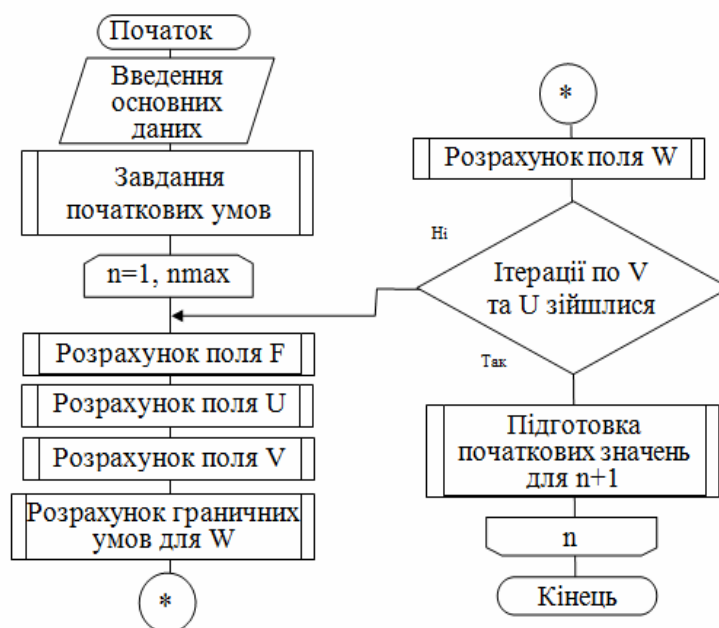


Рис. 5. Блок-схема алгоритму

Оскільки завдання абсолютних ітераційних допусків відносно F і W представляло певні труднощі, оцінка закінчення ітераційного процесу проводилася за значеннями швидкостей U і V , для яких задати абсолютний ітераційний допуск простіше.

Результати досліджень. Проводились варіантні дослідження по вивченню полів швидкостей повітря в каналах виду рис. 1.

Розглянута методика застосовувалася для дослідження поля швидкості повітря в каналах за протиточною схемою руху повітря рис. 6.

Режими течії були переважно ламінарні. Досліджувався також поле швидкості в каналі при виході на перехідні режими рис. 7.

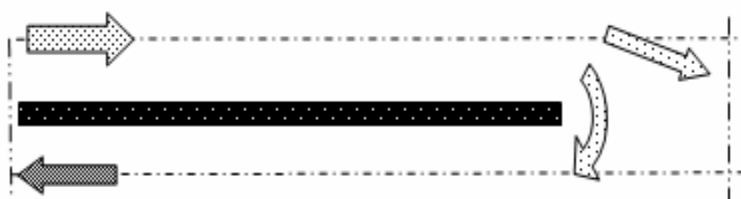


Рис. 6. Схема обтікання пластини

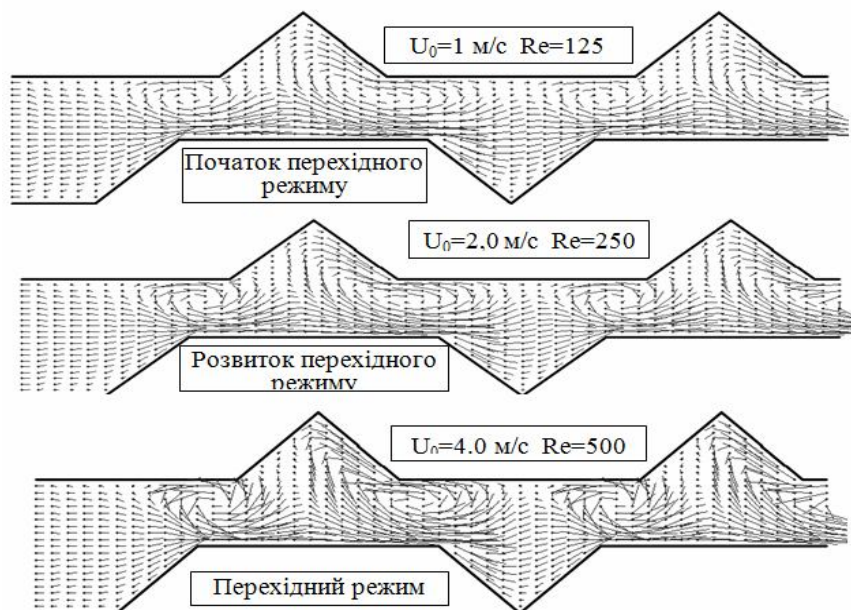


Рис. 7. Поля швидкості при різних режимах плин

Поле швидкості повітря при поділі потоків, як показано на рис. 7, наведено на рис. 8.

Описана методика застосовувалася для уточнення розподілу потоків повітря і процесів теплообміну при моделюванні режимів роботи охолоджувачів повітря побічно-випарного типу [12]. Спостерігалось хороше узгодження результатів математичного і натурального експериментів.

Висновки. Розроблена методика математичного моделювання процесів течії середовищ в теплообмінниках щільного типу дозволяє проводити детальні дослідження полів швидкості. Вона може застосовуватися при математичному моделюванні різних теплообмінних пристроїв при оптимізації режимів їх роботи.

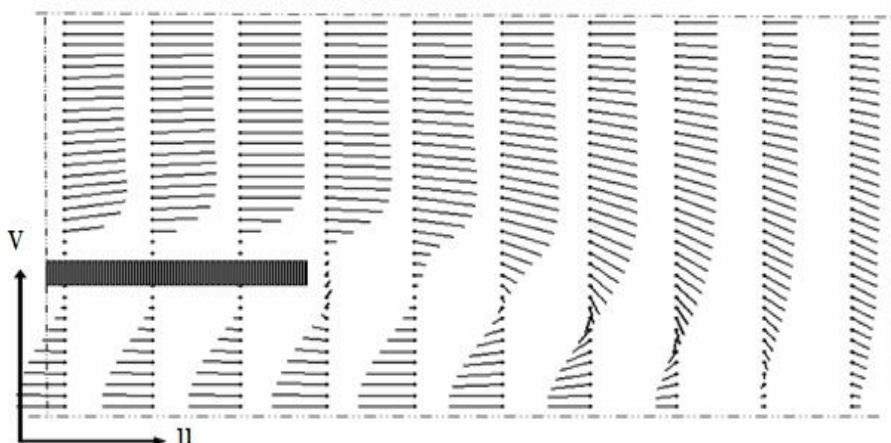


Рис. 8. Поле швидкості повітря при поділі потоків

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: ИММ РАН, 2000. – 409 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидромеханика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
3. Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М.: Наука, 1992. – 423 с.
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
6. Андерсен Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Пер. с англ. / Д. Андерсен, Дж. Таннехилл, Р. Глетчер. – М.: Мир, 1990. – Т.1. – 384 с.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. В 2-х т. / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т.1. – 502 с.
8. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С.В. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
9. Меркт Р.В. Устойчивая разностная схема для решения задач гидромеханики и конвективного переноса / Р.В. Меркт, В.В. Челабчи, В.Н. Челабчи // Тезисы докладов 1 международной конференции «Численные методы в гидравлике и гидромеханике». – Донецк: ДонГУ, 1994. – С. 83.

10. Merkt R.V. Computer simulation of associated transfer processes / R.V. Merkt, V.V. Chelabchy // Вестник Национального технического университета «ХПИ»: Сб. научн. трудов. Тематический выпуск «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Харьков: ХПИ, 2004. – № 2. – С. 37-47.
11. Дорошенко А.В. Новое поколение систем кондиционирования воздуха на основе комбинированных испарительных охладителей / А.В. Дорошенко, В.Х. Кириллов, О.В. Ефимова, А.А. Клим-чук // Холодильная техника и технология. – 2000. – № 67. – С. 57-68.
12. Merkt R.V., Chelabchi V.N., Chelabchi V.V. Economical coolers of air of the evaporated type // Сб. научн. трудов Sword. – Вып. 3(36). – Т. 3. – Иваново: МАРКОВА АД, 2014. – С. 91-93.

Стаття надійшла до редакції 15.11.2017

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор, віце-президент Асоціації українського сейсмостійкого будівництва **К.В. Єгунов**

кандидат технічних наук, доцент кафедри «Суднові енергетичні установки і технічна експлуатація» Одеського національного морського університету **Л.С. Вітюк**