УДК 519.8

ОСОБЛИВОСТІ ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОЇ СТАБІЛІЗАЦІЇ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ

В.І. Нещерет
к.ф.-м.н., доцент кафедри «Технічна кібернетика ім. професора Р.В.Меркта»
Т.Д. Панченко
ст.викладач кафедри «Технічна кібернетика ім. професора Р.В.Меркта»
В.І. Стародуб
ст.викладач кафедри «Технічна кібернетика ім. професора Р.В.Меркта»

Одеський національний морський університет

Анотація. *Для стабілізації нелінійної системи пропонується локальний функціонал на основі функції Ляпунова. Для нього отримано локально-оптимальне управління. Формулюються умови, яким повинна задовольняти область допустимих управлінь. У формі теорем формулюються умови, при виконанні яких локально-оптимальне управління стабілізує початкову систему.*

Ключові слова: *диференціальні рівняння, незбурений рух, стабілізація, локально-оптимальне управління, локальний функціонал, гіперплощина.*

ОСОБЕННОСТИ ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В.И. Нещерет
к.ф.-м.н., доцент кафедры «Техническая кибернетика им. профессора Р.В. Меркта»
Т.Д. Панченко
ст.преподаватель кафедры «Техническая кибернетика им. профессора Р.В. Меркта»
В.И. Стародуб
ст.преподаватель кафедры «Техническая кибернетика им. профессора Р.В. Меркта»

Одесский национальный морской университет

Аннотация. *Для стабилизации нелинейной системы предлагается локальный функционал на основе функции Ляпунова. Для него получено локально-оптимальное управление. Формулируются условия, которым должно удовлетворять множество допустимых управлений. В форме теорем формулируются условия, при выполнении которых локально-оптимальное управление стабилизирует исходную систему.*

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, невозмущённое движение, стабилизация, локально-оптимальное управление, локальный функционал, гиперплоскость.*

© Нещерет В.І., Панченко Т.Д., Стародуб В.І., 2018

УДК 519.8

FEATURES OF LOCAL-OPTIMAL STABILIZATION NONLINEAR SYSTEM

V.I. Necheret
Ph. D. Associate Professor of department
of «Technical Cybernetics named of the Professor R.V. Merkt»
T.D. Panchenko
senior lecturer of the department «Technical Cybernetics named of the Professor R.V. Merkt»
V.I. Starodub
senior lecturer of the department «Technical Cybernetics named of the Professor R.V. Merkt»

Odessa National Maritime University

Abstract. *For stabilizing of the nonlinear system, a local functional is offered on the basis of function of Lyapunova. For him a local-optimum control is got. Conditions, which must satisfy the set of possible controls, are formulated. In the form of theorems formulated the conditions under which a locally optimal control stabilizes the initial system.*

Keywords*: differential equations, unperturbed motion, stabilization, locally-optimal control, the local functional, hyperplane.*

Вступ. У задачах стабілізації програмних рухів представляє інтерес реалізація локально-оптимальних підходів у різних постановках. За їх допомогою можуть бути побудовані ефективні алгоритми обчислення управління у функції від фазових змінних системи.

У загальному вигляді методика застосування локально-оптимальних управлінь полягає в тому, що використовується критерій, який в кожен момент часу певним чином характеризує стан об'єкту, що описується системою диференціальних рівнянь. Управління потрібно вибирати так, щоб локальний функціонал максимально зменшувався на траєкторіях системи. Для цього необхідно мінімізувати його похідну в силу системи диференціальних рівнянь.

При реалізації цих ідей виникає ряд проблем – вибір структури локальних функціоналів, побудова похідної у вигляді явних функцій від управління в складних системах, рішення задач їх мінімізації в процесі інтегрування, урахування обмежень для фазових змінних і управлінь, урахування особливостей області допустимих управлінь і, нарешті, дослідження динаміки системи з таким управлінням.

Низку цих запитань вдається досліджувати для лінійних систем. Надзвичайно складно зробити це в нелінійній постановці.

У данній статті приділяється увага вивченню особливостей області допустимих управлінь в задачі локально-оптимальної стабілізації нелінійних систем. Також сформульован деяке загальне ствердження щодо локально-оптимальної стабілізації програмної множинності більш загального вигляду.

Постановка задачі. Нехай диференціальні рівняння

$$\dot{x} = F(x) \tag{1}$$

описують сбурений рух і допускають несбурений рух *x* = *0*. Припускатимемо, що праві частини їх безперервні по усіх змінних в деякій однозв'язній замкнутій кінцевій області *X* фазового простору R^N, що містить початок координат і його околицю. У відповідній керованій системі

$$\dot{x} = F(x) + C(x)u \tag{2}$$

елементи функціональної $(N \times K)$ – мірній матриці $C(x)$ також безперервні, а її стовпці $C_s(x), s = 1,2,..K,$ лінійно незалежні в *X*.

Задача стабілізації несбуреного руху системи (2) за допомогою управління $u^*(x)$, оптимального по відношенню до локального функціонала, пов'язана передусім з проблемою вибору такого функціонала, яка аналогічна питанню про побудову функції Ляпунова для аналізу стійкості системи (1). Тим складніше вказане завдання при обмеженнях на управління. Тому для загального вигляду рівнянь (2) немає конструктивних результатів в такій задачі.

1. Не торкаючись звичайних труднощів побудови функції Ляпунова, розглянемо специфічні особливості дослідження систем з локальними функціоналами. Для цього достатньо обмежитися наступною задачею.

Припустимо, що система (1) стійка і нам відома функція Ляпунова $V(x)$, визначено позитивна і така, що безперервно диференціюється в *X*, а її похідна $\dot{V} = \psi(x)$ знакопостійна негативна в *X* на траєкторіях системи (1). Запишемо її похідну в силу (2)

$$\dot{V} = \psi(x) + h(x)u, \tag{3}$$

$\psi = \dfrac{\partial V}{\partial x} F(x) \le 0, \quad h = \dfrac{\partial V}{\partial x} C(x)$ – функціональний вектор-рядок $(1 \times K)$.

Управління, оптимальне по відношенню до локального функціонала

$$\hat{O} = V(x) + \rho \int_0^t u' u dt \tag{4}$$

при $\rho \ne 0$ має вигляд

$$u^* = -\frac{1}{2\rho} h'(x) \tag{5}$$

і називається локально-оптимальним. Зубов В.І. [1] називає подібні управління оптимальними по відношенню до демпфування (4).

Похідна $\dot{V}(x,u^*)$ з таким управлінням негативна при $h(x) \neq 0$, тобто в усіх точках *X*, окрім може бути $(N-K)$ − мірної множинності (рос. − многообразия)

$$\overline{H} = \{x : h(x) = 0,\ x \in X\}\ .$$

Якщо ця множинність, а точніше множина

$$\overline{H} \cap \Psi,\ \Psi = \{x : \psi(x) = 0, x \in X\}\ ,$$

не містить цілих траєкторій системи (1), окрім *x* = 0, то управління (4) стабілізує систему (2) в *X*. Докладніше ці питання для задачі стабілізації програмної множинності в лінійній постановці розглядалися в [2; 3].

Аналогічне твердження має місце у тому випадку, коли $u^* \in U$. Якщо (5) не належить *U*, оптимальне управління визначається за умовою

$$\hat{O}(x,u) - \frac{\inf}{u \in U} \tag{6}$$

і належить межі *U*.

Визначення 1. Будемо говорити, що множина допустимих управлінь *U* належить классу *U₁*, або $U \in U_1$, якщо *U* це замкнута, обмежена, опукла область в R^K і виконується одна з умов:

а) *u = 0* − внутрішня точка *U*;

б) точка *u=0* належить межі області $\widehat{U}$, і в околиці цієї точки $\widehat{U}$ є гладка гіперповерхня.

Наприклад, множина

$$U = \{u_1, u_2 : u_s \leq \overline{u},\ s = 1,2,\ u_1^2 + u_2^2 + 2(u_1 + u_2)\overline{u} \leq 0, \overline{u} > 0\}$$

задовольняє умові (б).

Зупинимося на тих особливостях, які має рішення задачі, якщо виконується умова (б), тобто *u = 0* − гранична точка *U*. В цьому випадку можливо $u^* = 0$ не лише при $x \in H$, але і на деякій множині $\hat{H}$, яку можна визначити наступним чином.

У R^K через точку *u = 0* може бути проведена опорна до *U* гіперплощина, що визначена умовою $\beta' u = 0, u \in R^K$. $\hat{H}$ є множина значень $x \in X$, при яких вектор $h(x)$ співпадає по напряму з вектором β внутрішньої нормалі до *U* в точці *u = 0.* У просторі змінних $h_s, s = 1,2,\ldots K,$ цей напрям задається умовами

$$\frac{h_1}{\beta_1} = \frac{h_2}{\beta_2} = ... = \frac{h_K}{\beta_K} > 0 \ . \qquad (7)$$

Отже, множина

$$\hat{H} = \{x : \hat{h}(x) = 0, x \in X\},$$

де $\hat{h}(x)$ − *(K-1)*-мірний вектор з компонентами

$$\hat{h}_s(x) = \frac{1}{\beta_s} h_s(x) - \frac{1}{\beta_{s+1}} h_{s+1}(x),$$

причому $sign\ h_s = sign\ \beta_s$, $s = 1,2,..K-1$.

По аналогії з h_s можна написати

$$\hat{h}_s = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{C}_s,\ \hat{C}_s = \frac{1}{\beta_s} C_s - \frac{1}{\beta_{s+1}} C_{s+1},\ s = 1,2,..K-1. \qquad (8)$$

Видно, що при $x \in \overline{H}$, тобто $h(x) = 0$, буде $x \in \hat{H}$, тому $\overline{H} \subset \hat{H}$. Наприклад, при *N=3, K=2* крива $\overline{H}$ лежить на поверхні $\hat{H}$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

а) існує функція $V(x)$, визначено позитивна і така, що безперервно диференціюється в *X*, така, що її похідна $\dot{V} = \psi(x)$ в силу системи (1) знакопостійна негативна;

б) множина допустимих управлінь *U* належить классу *U₁*, або $U \in U_1$;

в) якщо $U \in U_1$ в силу умови (а) визначення 1, то множина $\hat{H} \bigcap \Psi$ не містить цілих траєкторій системи (1), окрім $x = 0$;

г) якщо $U \in U_1$ в силу умови (б) визначення 1, то множина $H \bigcap \Psi$ не містить цілих траєкторій системи (1), окрім $x = 0$.

Тоді управління u^*, оптимальне по відношенню до локального функціонала (4), стабілізує систему (2) в *X* при $u^* \in U$.

2. Розглянемо особливості управління, оптимального по відношенню до критерію (4), якщо прийняти в ньому $\rho = 0$, тобто без добавки, що регуляризує функціонал (4). Очевидно, що в отриманих вище рішеннях цього не можна зробити, оскільки вони мають форму (5). Це управління отримане з умови мінімуму квадратичної по *u* функції $\hat{O}(x,u)$. Тому оптимальне управління при $\rho \neq 0$ може набувати значень

як у середині *U*, так і на межі цієї області – якщо (5) не належить *U*. Саме *U* може і не бути обмеженим.

Якщо $\rho = 0$, похідна $\hat{O} = \dot{V}(x,u)$ – лінійна по управлінню форма для рівняння виду (2). Її найменше значення досягається на межі замкнутої області *U*. При $\rho \neq 0$, якщо (5) не належить *U*, то оптимальне рішення знаходиться в точці дотику еліпсоїда і зовнішньої межі *U*. Ця точка єдина, якщо *U* опукло. При $\rho = 0$ рішенням задачі завжди буде точка дотику площини (ортогональної до вектору $h(x)$) і межі *U*. Тут рішення єдине, якщо *U* строго опукло.

Оскільки при $\rho = 0$ локально-оптимальне управління в системі (2) належить межі *U*, то це рішення дозволяє більш повно використати ресурс управління, чим (5). Крім того, визначати на межі U найменше значення лінійної форми в загальному випадку легше, ніж квадратичної. Але коли при наближенні точки до положення рівноваги управління (5) стає внутрішньою точкою U, таке рішення незрівнянно простіше, ніж при $\rho = 0$. Це управління і фізично природніше, оскільки прагне до нуля при $x \to 0$. Перехід до управління (5), тобто до значення $\rho > 0$ у функціоналі (4) можна здійснювати по-різному, наприклад, по умові досягнення межі околиці X_V несбуреного руху. Тут цю область зручно задати умовою $V(x) \leq \delta, \delta > 0$. Значення δ можна погоджувати з величиною (чи навпаки), «потужністю» управління *U*, видом області початкових значень та іншими міркуваннями.

Управління (5) має ще ту особливість, що унеможливлює виникнення ковзаючого режиму [3]. Втім, він можливий на тій частині *H*, що містить точку *x=0*, яка задовольняє необхідній умові виникнення ковзаючого режиму $u^{ý}(x) \in U$ [4]. Тут $u^{ý}$ визначається з рівняння $\dot{h}(x,u) = 0$, де $\dot{h}' = H(x) + \Pi(x)\,u$ похідна в силу (2). Множину значень *x*, що задовольняють умові $u^{ý}(x) \in U$, позначимо U^{x}. Таким чином, прийматимемо $\rho > 0$ у функціоналі при досягненні області $\widetilde{\Gamma}$, що об'єднує X_V і $U^{X} \bigcap \overline{H}$. Відмітимо, що при $\rho \to 0$ (5), а точніше значення, що відповідає йому, на межі *U* прагне до рішення задачі при $\rho = 0$.

Додатково до вказаних раніше умов безперервності *F(x), C(x)* зажадаємо, щоб елементи матриці *C(x)* були функціями, що безперервно диференціюються в *X*.

Теорема 2. Нехай виконуються наступні умови:

а) існує визначено позитивна функція $V(x)$, що двічі безперервно диференціюється, похідна якої в силу (1) $\dot{V} = \psi(x)$ непозитивна в *X;*

б) область допустимих управлінь *U* строго опукла, обмежена, замкнута, а *u=0* – внутрішня точка *U*;

в) функціональна матриця

$$\Pi = C'\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}C + C'(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}) \qquad (9)$$

невироджена на $\overline{H} = \{x : h = \frac{\partial V}{\partial x}C = 0, \quad x \in X\}$;

г) $\rho = 0$ при $x \notin \vec{\Gamma}$,

$$\vec{\Gamma} = X_V \bigcup (\overline{H} \bigcap U^X), \quad X_V = \{x : V(x) \le \delta, x \in X\},$$

$$U^X = \{x : u^{\acute{Y}}(x) \in U, x \in X\}, \quad u^{\acute{Y}} = -\Pi^{-1}H, \quad H = \frac{\partial C'}{\partial x}F\frac{\partial V}{\partial x} + C'\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}F; \qquad (10)$$

д) $\rho > 0$; при $x \in \tilde{\Gamma}$;

е) множина $\tilde{\Gamma} \bigcap \Psi$ не містить цілих траєкторій системи (1), окрім *x=0.*

Тоді управління, оптимальне по відношенню до демпфування критерію (4), стабілізує систему (2) в *X.*

Можливі різні узагальнення або послаблення приведених умов, але вони можуть потребувати більш громіздких формулювань.

Так, *u = 0* не обов'язково має бути внутрішньою точкою U. Це можна врахувати як зроблено у визначенні і умові (г) теореми 1. Якщо C постійна матриця і $V(x)$ квадратична форма, умова (в) теореми 2 виконана.

Якщо управління належить межі області U, то лінійну систему можна розглядати як нелінійну. Проілюструємо на прикладі системи $\dot{x} = Ax + Cu$ з функцією $V = x'Tx > 0$ деякі умови теореми 2. В цьому випадку умова (в), як вказувалося, виконуються автоматично.

Розглянемо множинність U_0, визначену умовою $u^{\acute{Y}}(x) = 0$, де $u^{\acute{Y}} = \Lambda x, \ \Lambda = -(CTC')^{-1}C'TA.$ Це перетин *K* гіперплощин $\Lambda x = 0$. Множину U^X можна розглядати як циліндр в *X*, усі точки якого віддалені від «осі» U_0 на таку ж відстань, як граничні точки *U* від *u=0* з урахуванням перетворення Λx. Перетин $\overline{H} \bigcap U^X$ цього циліндра з $\overline{H}$ виділяє на $\overline{H}$ область, що містить *x=0*. Наприклад, при *N=3, K=2* це відрізок прямої $\overline{H}$.

Якщо множинність $\overline{H} \bigcap U_0$ визначається рівняннями $C'Tx = 0, \Lambda x = 0$, є точка x = 0, тобто якщо $rank\,\{TC, \Lambda'\} = N \ (2K \ge N)$, то $\overline{H} \bigcap U^X$ обмежена замкнута множина. Тоді постійну δ можна вибирати так, щоб було $\overline{H} \bigcap U^X \subset X_V$, тобто $\widetilde{\Gamma} = X_V$, або, навпаки, по δ визначити значення ρ. При обмеженні на уравління у вигляді еліпсоїда можна використати методику, аналогічну запропонованій в [2; 5].

3. Вище розглядалися умови локально-оптимальної стабілізації системи відносно несбуреного руху *x=0.* Якщо говорити про можливо краще наближення до програми, то управління слід вибирати так, щоб форма hu в похідній (3) від локальног критерія була мінімальною. При цьому вона може і не бути завжди негативною в довільній області *U*, а програма, в силу обмеженості ресурсу управління, може не бути асимптотично стійкою.

Сформулюємо більш загальний результат для стабілізації відносно програмного руху Ω. Слід говорити про мінімізацію похідної від деякого локального функціонала $\hat{O}(\omega, \tilde{o})$, який характеризує відстань до програми Ω. В якості такої програми розглядатимемо перетин гіперповерхонь

$$\omega\,(x) = 0\,,\; dim\,\omega = K\,, \tag{11}$$

на траєкторіях системи

$$\dot{x} = F(x,u)\,,\;\; x \in X\,,\;\; dim\,x = N\,. \tag{12}$$

Припускатимемо, що їх праві частини безперервні по усіх змінних в деякій однозв'язній замкнутій кінцевій області *X* фазового простору

У відповідності до робіт В.І. Зубова [1] і статті [6] про незбурений рух системи диференціальних рівнянь можна сформулювати наступну теорему для задачі програмного руху (11), (12).

Теорема 3.

Якщо в кожній точці $x \in X$ для довільної константи *a* існує така функція часу *b(t),* що виконується в силу системи (12) умова

$$\frac{\inf}{u \in U}\dot{\Phi}(\omega,x,u) = b(t) \tag{13}$$

при

$$\Phi(\omega,x) = a\,, \tag{14}$$

де $\Phi(\omega,x) -$ функція, безперервна з частковими похідними по усіх змінних, то управління u^*, яке мінімізує в кожній точці $x \in X$ швидкість зміни функції $\Phi(\omega,x)$, зменшує $\Phi(\omega,x)$ максимальним чином.

Доказ

Позначимо $x^*(t)$ через фазову траєкторію, що відповідає управлінню $u^*(t)$, яке мінімізує швидкість зміни функції $\Phi(\omega, x)$, а через, $\omega^*(t)$ – значення $\omega(x^*)$. Для простоти викладу будемо означати через $\Phi(t)$ значення $\Phi(\omega(x,t), x(t))$, через $\Phi^*(t)$ – значення $\Phi(\omega(x^*,t), x^*(t))$.

Припустимо, що в якийсь момент часу має місце співвідношення

$$\Phi^*(t) > \Phi(t). \tag{15}$$

Оскільки в початковий момент t_0

$$\Phi^*(t_0) = \Phi(t_0), \tag{16}$$

то з умови (13), справедливої вже в початковій точці t_0, і умови (15) в силу безперервності функції $\Phi^*(t)$ витікає, що існує таке $t_1 \in (t_0, t)$, що

$$\begin{gathered} \Phi^*(t_1) = \Phi(t_1) \\ \Phi^*(t_1 + dt) > \Phi(t_1 + dt) \end{gathered}, \tag{17}$$

тобто

$$\Phi^*(t_1) + \frac{d\Phi^*}{dt}(t_1)dt + 0_1(dt) > \Phi(t_1) + \frac{d\Phi}{dt_1}(t_1)dt + 0_2(dt), \tag{18}$$

де $0_1(dt), 0_2(dt)$ – нескінченно малі вищого порядку малості в порівнянні з dt.

Із співвідношень (17), (18), переходячи до межі при $dt \to 0$, отримуємо

$$\frac{d\Phi^*}{dt}(t_1) > \frac{d\Phi}{dt}(t_1). \tag{19}$$

Припустимо $\Phi^*(t_1) = a$. Тоді із співвідношень (17), (19) в силу умов (13), (14) отримуємо, що

$$\frac{d\Phi}{dt}(t_1) < \frac{d\Phi^*}{dt}(t_1) = \frac{\inf}{u \in U} \frac{d\Phi}{dt}(\omega^*(t_1), x^*(t_1), u(t_1)) =$$

$$= b(t_1) = \frac{\inf}{u \in U} \frac{d\Phi}{dt}(\omega(t_1), x(t_1), u(t_1)).$$

Отримана тут суперечність показує хибність зробленого припущення (15).

Таким чином, для будь-якого $t > t_0$ маємо $\Phi^*(t) < \Phi(t)$, де $\Phi(t) = \Phi(\omega(x,t), x(t))$ за будь-яких управліннях, що й потрібно було довести.

Зауваження. Згідно із співвідношеннями (13), (14), якщо $b = b(\Phi(\omega, x))$ для будь-якого $x \in X$, то теорема зберігає свою силу.

Наслідок. Якщо функція $\Phi(\omega, x)$, що задовольняє умовам теореми, визначено позитивна по ω в X, і управління u^*, яке мінімізує швидкість зміни $\Phi(\omega, x)$, переводить систему (12) із $x(t_0) \in X$ в $x \in \Omega$, то u^* − управління оптимальне за швидкодією. Це твердження слідує з теореми і того факту, що із знаковизначеності $\Phi(\omega, x)$ по ω випливає, що існує така визначено позитивна функція $\overline{\Phi}(\omega), \overline{\Phi}(0) = 0$, що $\Phi(\omega, x) \le \overline{\Phi}(\omega)$ при $x \in X$, а для $\overline{\Phi}(\omega)$ в X існує таке число $c > 0$, що всі поверхні рівня $\overline{\Phi}(\omega) = b$, де $|b| < c$, є замкнутими відносно $\omega = 0$.

Розглянемо дві задачі для прикладу.

Задачу програмного руху назвемо задачею з інваріантною нормою програми $\omega = 0$, якщо виконується умова

$$\omega' \varphi = 0, \tag{20}$$

де $\varphi = \frac{d\omega}{dx} F(x)$ − похідна в силу системи

$$\dot{x} = F(x). \tag{21}$$

З урахуванням умови (20) похідна від локального функціонала $\Phi = \frac{1}{2}\omega'\omega$ на траєкторіях керованої системи

$$\dot{x} = F(x) + C(x)u \tag{22}$$

має вигляд

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega' L u, \quad L = \frac{d\omega}{dx} C. \tag{23}$$

Нехай управління обмежене умовою

$$\|u\| \le \bar{u} \ . \tag{24}$$

Тоді потрібне управління дорівнює

$$u^* = -\bar{u}\frac{L'\omega}{\|L'\omega\|}. \tag{25}$$

Умова (13) теореми 3 має тут вигляд

$$\frac{\inf}{u \in U}\frac{d\Phi}{dt} = -\bar{u} \ .$$

Можна зробити висновок, що управління (24) оптимальне по швидкодії.

В якості другого прикладу розглянемо задачу програмного руху, що допускає перший інтеграл

$$\Phi(\omega, x) = g\,, \tag{26}$$

у якому $\Phi(\omega, x)$ - визначено позитивна по ω функція, що безперервно диференціюється. Для того, щоб для системи (21) існував інтеграл (26), необхідно і достатньо, щоб функція $F(x)$ задовольняла умові

$$\frac{d\Phi}{dx}F(x) = 0, \tag{27}$$

де $\quad \dfrac{d\Phi}{dx} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial x}.$

По аналогії з А.М. Лєтовим [7], який розглядав задачу про незбурений рух, можна задачу програмного руху, що задовольняє умові (27), назвати задачею з інтегральним інваріантом програми.

З урахуванням умови (27) запишемо похідну в силу (22) $\dot{\Phi} = \dfrac{d\Phi}{dx}Cu$. Цей вираз аналогічний (23), тому справедливі усі результати для задачі з інваріантною нормою програми.

Зокрема, при обмеженнях (24) маємо

$$u^* = \bar{u}\frac{(\frac{d\Phi}{dx}C)'}{\left\|\frac{d\Phi}{dx}C\right\|}, \tag{28}$$

і умова (13) теореми набирає вигляду $\frac{\inf}{u \in U}\frac{d\Phi}{dx} = -\bar{u}\left\|\frac{d\Phi}{dx}C\right\|$.

Отже, якщо $\left\|\frac{d\Phi}{dt}\right\| = const$ або є деякою функцією часу, то управління (28) буде оптимальним по швидкодії.

Аналогічний висновок А.М. Лєтов [7] отримав для задачі з $\omega \equiv x$, використовуючи ідеї динамічного програмування.

Висновки. У статті досліджені особливості локально-оптимальної стабілізації нелінійних систем для локального функціонала, що містить добавку з управлінням, яка регуляризує задачу, так і без неї. Основна увага приділена вимогам до області допустимих управлінь. Результати сформульовані у вигляді двох теорем. Розглянута також задача локально-оптимальної стабілізації програмної множини в більш загальній постановці.

Застосування локально-оптимальних управлінь дозволило отримати добрі результати для ряду складних технічних систем – літальних апаратів, електроенергетичних систем [8; 9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Зубов В.И. Динамика управляемых систем. − М.: Высшая школа, 1982. − 288 с.*
2. *Нещерет В.И. Об инвариантных многообразиях в задаче локально-оптимального управления // Вісник Одеського національного морського університету. − Вип. 2 (38). – Одесса, 2013. – С. 171-182.*
3. *Нещерет В.И. Стабилизация неинвариантного многообразия в скользящем режиме при использовании локально-оптимального управления // Вестник Одесского национального морского университета. − Вып. 18. – Одесса, 2005. – С. 198-206.*
4. *Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. − М.: Наука, 1974. − 272 с.*
5. *Кунцевич В.М, Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. − М.: Наука, 1977. − 400 с.*

6. *Костюк В.И., Павлов А.А., Сбитнев В.И. Применение функций Ляпунова для построения оптимального по быстродействию управления // Автоматика. − К., 1974. − № 5. − С. 20-24.*
7. *Летов А.М. Динамика полёта и управление. – М.: Наука, 1969. − 346 с.*
8. *Нещерет В.И. Локально-оптимальная стабилизация углового движения летательного аппарата // Проблеми техніки: Науково-виробничий журнал. – Одеса, 2012. − № 3. – С. 36-41.*
9. *Neshcheret V.I. Locally optimal stabilization of energy systems // Сборник научных трудов «SWorld». – Вып. 1. −Т. 10. Технические науки. – Иваново: Маркова АД, 2014. − С. 83-90.*

Стаття надійшла до редакції 25.05.2018

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор, віце-президент Асоціації українського сейсмостійкого будівництва **К.В. Єгупов**

кандидат технічних наук, доцент кафедри «Технічна кібернетика ім. проф. Р.В. Меркта» Одеського національного морського університету **І.Г. Бугаєва**