

УДК 621.78
JEL Classification: C6

**МОДЕЛЮВАННЯ КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСУ
В ПОВЕРХНЕВИХ ШАРАХ ДЕТАЛЕЙ**

Т.Д. Панченко

старший викладач кафедри «Технічна кібернетика
та інформаційні технології ім. професора Р.В. Меркта»
tdp_1103@ukr.net

В.І. Стародуб

старший викладач кафедри «Технічна кібернетика
та інформаційні технології ім. професора Р.В. Меркта»
sval6236@gmail.com

В.В. Челабчі

старший викладач кафедри «Технічна кібернетика
та інформаційні технології ім. професора Р.В. Меркта»
vn_chel@ukr.net

В.М. Челабчі

к.ф.-м.н., доцент кафедри кафедри «Технічна кібернетика
та інформаційні технології ім. професора Р.В. Меркта»
vv_chel@ukr.net

Одеський національний морський університет

***Анотація.** При термічній обробці деталей (гарт, ціанування і ін.) Важливою є інформація про температурні поля в поверхневому шарі матеріалу деталі. Експериментальне визначення обумовлених полів температури особливо при інтенсивних процесах вкрай важко. Використання відомих різницевих методів утруднено їх значною методичної похибкою і нестійкістю ряду методів. Тому розробка різницевих методів які володіють малою методичної похибкою і абсолютною стійкістю вкрай бажано. У статті розглянуто модифікований аналітико-сітковий метод моделювання полів температури в поверхневих шарах деталей при термообробці. Метод заснований на описі зміни температури в часі диференціальними операторами і кондуктивного теплопереносу кінцевими різницями. Використовуються уточнені способи різницевої апроксимації. Результати моделювання процесів в тонкій пластині оцінюються порівнянням з аналітичним рішенням.*

***Ключові слова:** моделювання, аналітико-сітковий метод, температура, поверхневі шари.*

УДК 621.78

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА
В ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЯХ ДЕТАЛЕЙ**

Т.Д. Панченко, В.И. Стародуб, В.В. Челабчи
старшие преподаватели кафедры «Техническая кибернетика
и информационные технологии им. профессора Р.В. Меркта»

В.Н. Челабчи
к.ф.-м.н., доцент кафедры «Техническая кибернетика
и информационные технологии им. профессора Р.В. Меркта»

Одесский национальный морской университет

***Аннотация.** При термической обработке деталей (закалка, цианирование и пр.) важной представляется информация о температурных полях в поверхностном слое материала детали. В статье рассмотрен модифицированный аналитико-сеточный метод моделирования полей температуры в поверхностных слоях деталей при термообработке. Метод основанный на описании изменения температуры во времени дифференциальными операторами и кондуктивного теплопереноса конечными разностями. Используются уточненные способы разностной аппроксимации. Результаты моделирования процессов в тонкой пластине оцениваются сравнением с аналитическим решением.*

***Ключевые слова:** моделирование, аналитико-сетевой метод, температура, поверхностные слои.*

UDC 621.78

JEL Classification: C6

**MODELING OF CONDUCTIVE HEAT TRANSFER
IN SURFACE BALLS OF DETAILS**

T.D. Panchenko
senior lecturer of the department
«Technical Cybernetics named of the Professor R.V. Merkt»
tdp_1103@ukr.net

V.I. Starodub
senior lecturer of the department
«Technical Cybernetics named of the Professor R.V. Merkt»
sval6236@gmail.com

V.V. Chelabchi
senior lecturer of the department
«Technical Cybernetics named of the Professor R.V. Merkt»
tdp_1103@ukr.net

V.N. Chelabchi
Ph. D. Associate Professor of department
of «Technical Cybernetics named of the Professor R.V. Merkt»
onmu_tk@ex.ua

Odessa National Maritime University

Abstract. *During heat treatment of parts (quenching, cyaniation, etc.), information on temperature fields in the surface layer of the part material is important.*

The article describes a modified analytical network method for modeling temperature fields in the surface layers of parts during heat treatment. The method is based on the description of temperature change over time by differential operators and conductive heat transfer by finite differences. The methods of difference approximation are used. The results of modeling processes in a thin plate are evaluated by comparison with an analytical solution.

Keywords: *modelyuvnya, analogy-sitkovy method, temperature, surface of the ball.*

Вступ. У багатьох технологічних процесах обробки металевих виробів використовується термічна обробка поверхні деталей. Температура поверхневих шарів багато в чому визначає кінцеві властивості матеріалів поверхні виробу. Для розрахунку температурних полів в деталях використовуються різні чисельні методи [1].

Метою роботи авторів є розробка модифікованого аналітико-сіткового методу для дослідження розподілу температури в поверхневих шарах виробів при термообробці.

Огляд літературних джерел. Аналітико-сітковий метод володіє абсолютною стійкістю і успішно застосовується при моделюванні динаміки систем з зосередженими параметрами [2; 3]. Аналіз ефективності аналітико-сіткового методу в порівнянні зі звичайними проведено в [4; 5]. Описаний метод можна успішно застосовувати і при моделюванні одновимірного конвективного теплопереносу в каналах [6].

В [6] розглянуті питання використання чисельних методів при моделюванні кондуктивного теплопереносу в огорожі у вигляді плоскої стінки. Однак звичайні чисельні методи мають значну методичну похибку. Крім того ряд різницевих схем рішення задач нестационарної теплопровідності (явна різницева схема, схема Кранка-Ніколсона) не володіють абсолютною стійкістю при певних значеннях коефіцієнтів математичних моделей. При використанні модифікації аналітико-сіткового методу при класичній кінцево-різницевій апроксимації рівнянь моделі (навіть з осереднені значення величин на кроку часу) не може забезпечити достатній рівень достовірності рішення.

Тому має сенс з метою зниження методичної похибки модифікувати аналітико-сітковий метод. Особливості методу розглядаються на прикладі чисельного моделювання кондуктивного теплопереносу в плоскій пластині, охолодженій з обох боків. Розглянута задача має аналітичне рішення (7).

Постановка задачі. Об'єкт дослідження – теплоперенос в огорожі у вигляді плоскої стінки завтовшки $2L$. Задача формулюється в одновимірній постановці. Слід врахувати, що теплоперенос за напрямками, перпендикулярними осі x , відсутній.

Пластина попередньо рівномірно прогріта до температури T_s та занурена в середу з постійною температурою T_e . Коефіцієнт теплообміну на поверхні не змінюється.

Задача розглядається в лінійній постановці, коли властивості матеріалу пластини не змінюються при зміні температури матеріалу деталі.

Одна з пропозицій полягає в тому, що зміна температури матеріалу пристінкового шару в напрямку, перпендикулярному поверхні, апроксимується поліномом другого порядку. Це дозволяє уточнити значення температури поверхні.

Схема теплопереносу в стінці і граничні умови на поверхні показано на рис. 1.

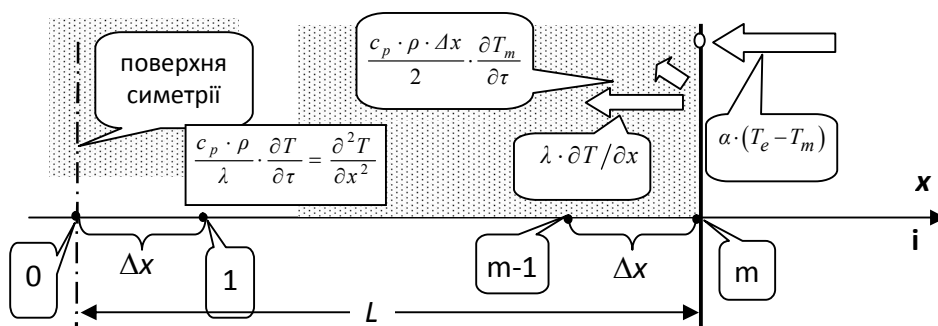


Рис. 1. Схема теплопереносу в стінці

Використані наступні позначення:

T – температура, $^{\circ}\text{C}$;

τ – час, с;

α – коефіцієнти теплообміну на поверхні, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$;

L – половина товщини стінки, м;

λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки, $\text{Вт}/(\text{К} \cdot \text{м})$;

c_p – питома теплоємність матеріалу стінки, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$;

ρ – щільність матеріалу стінки, $\text{кг}/\text{м}^3$;

m – кількість відрізків інтегрування по товщині стінки;

Δx – довжина відрізка інтегрування, м.

При моделюванні опис процесів представляється в безрозмірному вигляді.

Кондуктивний теплоперенос в матеріалі стінки відображений в (1).

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \quad (1)$$

Для опису процесу в поверхневому шарі використовується (2).

$$Bi \cdot (\theta_e - \theta_m) = \frac{\Delta X}{2} \cdot \frac{\partial \theta_m}{\partial F_0} + \frac{d\theta}{dX} \Big|_{i=m} \quad (2)$$

В (1), (20) використані безрозмірні змінні (3).

$$Fo = \frac{\lambda \cdot \tau}{c_p \cdot \rho \cdot L^2}, \quad Bi = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad \theta = \frac{T - T_e}{T_s - T_e} \quad (3)$$

Опис методу. Метод характерний тим (рис. 2), що використовується звичайна різницева апроксимація по осі X за триточковою схемою та диференційний оператор за часом F_0 .

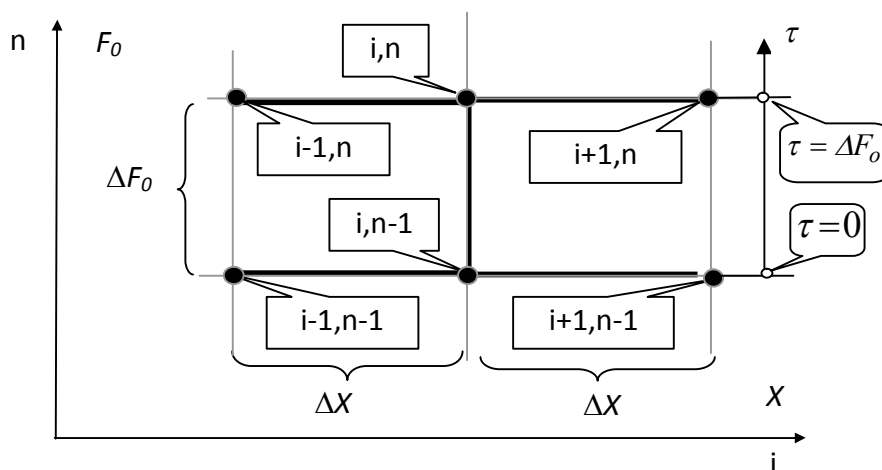


Рис. 2. Схема розташування вузлів сітки в аналітико-сітковому методі

Для вирішення рівнянь (1), (2) розроблено дві модифікації методу.

Варіант **a** – модифікація аналітико-сіткового методу із середніми значеннями параметрів на відрізьку ΔF_0 .

Варіант **b** – модифікація аналітико-сіткового методу коли зміна в часі величин θ_{i-1} та θ_{i+1} на відрізку ΔF_0 відбивається лінійною залежністю (4).

Варіант a. Рівняння (1) приводиться до вигляду (4).

$$\frac{\Delta X^2}{2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial F_0} + \theta_i = \frac{\theta_{i-1} + \theta_{i+1}}{2}. \quad (4)$$

На відрізку ΔF_0 вводиться нова вісь τ (рис. 2). З урахуванням усереднення значень в вузлах сітки з індексами $i-1$ та $i+1$ отримуємо (5).

$$\frac{\Delta X^2}{2} \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} + \theta_i = \frac{\theta_{i-1,n} + \theta_{i+1,n} + \theta_{i-1,n-1} + \theta_{i+1,n-1}}{4}. \quad (5)$$

Аналітичне рішення (5) дозволяє знайти значення $\theta_{i,n}$ (6).

$$\theta_{i,n} = \theta_{i,n-1} \cdot D_1 + \frac{\theta_{i-1,n} + \theta_{i+1,n} + \theta_{i-1,n-1} + \theta_{i+1,n-1}}{4} \cdot D_2, \quad (6)$$

де $D_1 = \exp\left(-\frac{2 \cdot \Delta F_0}{\Delta X^2}\right)$,

$$D_2 = 1 - \exp\left(-\frac{2 \cdot \Delta F_0}{\Delta X^2}\right).$$

У площині симетрії ($X = 0$) використовується рівняння (7).

$$\theta_{0,n} = \theta_{0,n-1} \cdot D_1 + \frac{\theta_{1,n} + \theta_{1,n-1}}{2} \cdot D_2. \quad (7)$$

Більш проблематичною є апроксимація рівняння (2) що описує процес в поверхневому шарі. У цьому випадку рівняння (2) перетвориться до виду (8).

$$\frac{\Delta X}{2 \cdot Bi} \cdot \frac{\partial \theta_m}{\partial F_0} + \theta_m = \theta_e - \frac{1}{Bi} \cdot \frac{d\theta}{dX} \Big|_{i=m}. \quad (8)$$

З урахуванням усереднення значень в поверхневому шарі на відрізку ΔF_0 та згідно до рис. 2 рівняння (8) можна представити як (9).

$$\frac{\Delta X}{2 \cdot Bi} \cdot \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau} + \theta_m = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\theta_{en} - \frac{1}{Bi} \cdot \frac{d\theta}{dX} \Big|_{i=m}^n \right) + \left(\theta_{en-1} - \frac{1}{Bi} \cdot \frac{d\theta}{dX} \Big|_{i=m}^{n-1} \right) \right]. \quad (9)$$

Аналітичне рішення (9) дозволяє знайти значення $\theta_{m,n}$ (10).

$$\theta_{m_n} = \theta_{m_{n-1}} \cdot D_3 + \frac{1}{2} \cdot \left((\theta_{e_n} + \theta_{e_{n-1}}) - \left(\frac{1}{Bi} \cdot \frac{d\theta}{dX} \Big|_{i=m}^n + \frac{1}{Bi} \cdot \frac{d\theta}{dX} \Big|_{i=m}^{n-1} \right) \right) \cdot D_4, \quad (10)$$

де $D_3 = \exp\left(-\frac{2 \cdot Bi \cdot \Delta F_0}{\Delta X}\right),$

$$D_4 = 1 - \exp\left(-\frac{2 \cdot Bi \cdot \Delta F_0}{\Delta X}\right).$$

Якість визначення значень $d\theta/dX$ на поверхні пластини істотно позначається на методичній похибці моделювання процесу в поверхневому шарі, а, отже, на рівні достовірності результатів моделювання процесів в пластині. У методах, заснованих на кінцево-різницевої апроксимації зазвичай використовується формула (11).

$$\frac{d\theta}{dX} \Big|_m = \frac{(\theta_m - \theta_{m-1})}{\Delta X}, \quad (11)$$

Для уточнення значення $d\theta/dX$ пропонується формула (12) яка заснована на апроксимації процесу у матеріалі поблизу поверхні.

$$\frac{d\theta}{dX} \Big|_m = \frac{1}{\Delta X} \cdot (0,5 \cdot \theta_{m-2} - 2 \cdot \theta_{m-1} + 1,5 \cdot \theta_m). \quad (12)$$

Варіант в. Рівняння (1) приводиться до вигляду (13).

$$\frac{\Delta X^2}{2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial F_0} + \theta_i = \frac{\theta_{i-1} + \theta_{i+1}}{2}. \quad (13)$$

Пропонується припущення, що на відріжку ΔF_0 можна використовувати (14).

$$\theta_{i-1} = \theta_{i-1,n-1} + \frac{\theta_{i-1,n} - \theta_{i-1,n-1}}{\Delta F_0} \cdot \tau, \quad \theta_{i+1} = \theta_{i+1,n-1} + \frac{\theta_{i+1,n} - \theta_{i+1,n-1}}{\Delta F_0} \cdot \tau. \quad (14)$$

На відріжку ΔF_0 згідно до рис. 2 рівняння (13) з урахуванням (14) можна представити як (15).

$$\begin{aligned} \frac{\Delta X}{2 \cdot Bi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \theta_i &= \frac{1}{2} \cdot (\theta_{i-1,n-1} + \theta_{i+1,n-1}) + \\ &+ \frac{\tau}{2 \cdot \Delta F_0} \cdot (\theta_{i-1,n} - \theta_{i-1,n-1} + \theta_{i+1,n} - \theta_{i+1,n-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

Аналітичне рішення (15) дозволяє знайти значення $\theta_{i,n}$ (16).

$$\theta_{i,n} = \theta_{i,n-1} \cdot D_5 + D_7 + \left(\left(\frac{\theta_{i-1,n-1}}{2} + \frac{\theta_{i+1,n-1}}{2} \right) - \frac{\Delta X^2}{2} \cdot \left(\frac{\theta_{i-1,n} - \theta_{i-1,n-1}}{2 \cdot \Delta Fo} + \frac{\theta_{i+1,n} - \theta_{i+1,n-1}}{2 \cdot \Delta Fo} \right) \right) \cdot D_6, \quad (16)$$

де $D_5 = \exp\left(-\frac{2 \cdot \Delta Fo}{\Delta X^2}\right),$

$$D_6 = 1 - \exp\left(-\frac{2 \cdot \Delta Fo}{\Delta X^2}\right),$$

$$D_7 = \frac{\theta_{i-1,n} - \theta_{i-1,n-1}}{2} + \frac{\theta_{i+1,n} - \theta_{i+1,n-1}}{2}.$$

Аналогічно рівняння (2), що описує процес в поверхневому шарі перетвориться до виду (17).

$$\frac{\Delta X}{2 \cdot Bi} \cdot \frac{\partial \theta_m}{\partial Fo} + \theta_m = \theta_e - \frac{1}{Bi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_m. \quad (17)$$

Пропонується припущення, що на відріжку ΔFo виконується (18).

$$\theta_e = \theta_{e_{n-1}} + (\theta_{e_n} - \theta_{e_{n-1}}) \cdot \frac{\tau}{\Delta Fo}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_m = \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{m,n-1} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{m,n} - \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{m,n-1} \right) \cdot \frac{\tau}{\Delta Fo}. \quad (18)$$

На відріжку ΔFo згідно до рис. 2 рівняння (17) з урахуванням (18) можна представити як (19).

$$\frac{\Delta X}{2 \cdot Bi} \cdot \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau} + \theta_m = \theta_{e_{n-1}} + (\theta_{e_n} - \theta_{e_{n-1}}) / \Delta Fo \cdot \tau - \frac{1}{Bi} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{m,n-1} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{m,n} - \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{m,n-1} \right) / \Delta Fo \cdot \tau \right). \quad (19)$$

Аналітичне рішення (19) дозволяє знайти значення $\theta_{m,n}$ (20).

$$\theta_{m,n} = \left(\theta_{m,n-1} + \frac{1}{Bi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{m,n-1} + D_8 \cdot \left(\frac{\Delta X}{2 \cdot Bi} \right) \right) \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot Bi \cdot \Delta Fo}{\Delta X}\right) - \frac{1}{Bi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{m,n-1} + D_8 \cdot \left(\Delta Fo - \frac{\Delta X}{2 \cdot Bi} \right), \quad (20)$$

$$\text{де } D8 = (\theta_{e_n} - \theta_{e_{n-1}}) / \Delta Fo - \frac{1}{Bi} \cdot \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{m,n} - \frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{m,n-1} \right) / \Delta Fo \right).$$

Для уточнення значення $d\theta/dX$ використовується формула (12).

Тестування методу. Залежність температури поверхні пластини θ_m від часу показана на рис. 3. Використовувався аналітико-сітковий метод (варіант **b**) при $\Delta Fo = 0,05$; $\Delta X = 0,1$.

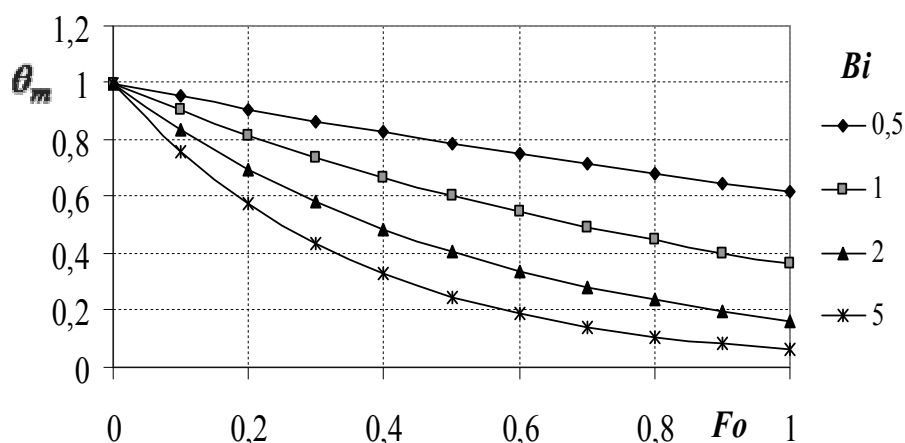


Рис. 3. Залежність θ_m від Fo при різних значеннях Bi

Порівнювалися результати аналітичного рішення [7] з результатами чисельного моделювання.

Відносна похибка δ оцінювалася (рис. 4) за формулою (21).

$$\delta = \theta_{ns} - \theta_a, \quad (21)$$

де θ_{ns} – чисельне рішення;

θ_a – аналітичне рішення.

Проведено порівняння похибки рішення задачі пропонованим модифікованим аналітико-сітковим методом і відомими різницевиими методами (явним, неявним, трапецій).

Слід врахувати, що визначення значення першої похідної по напрямку осі X в поверхневому шарі визначався за формулою (22).

$$\frac{d\theta}{dX} \Big|_m = \frac{1}{\Delta X} \cdot (\theta_m - \theta_{m-1}). \quad (22)$$

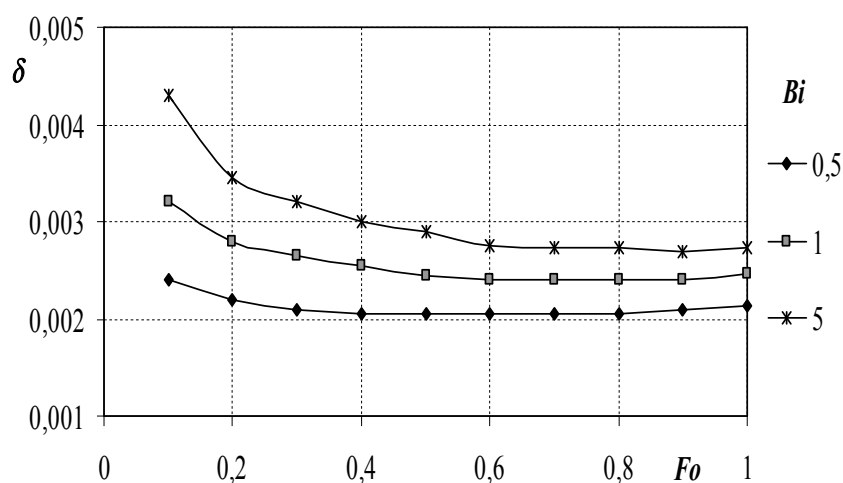


Рис. 4. Залежність δ від Fo при різних значеннях Bi

При різницевих рішеннях використовувалися ті ж значення кроків за часом і координаті.

Теплообмін моделювався при значенні $Bi = 1$.

Результати досліджень представлені в таблиці, наведеній нижче.

Таблиця

Порівняння рівня похибки різних методів вирішення задачі

Метод	Оцінка абсолютної стійкості	Рівень похибки в порівнянні з аналітико-сітковим методом (Варіант b)	
		поверхня	площина симетрії
Явний різницевий метод	$0 < \frac{\Delta X^2}{2} < 1$	2,6	2,35
Неявний різницевий метод	Стійкий	2,23	1,8
Метод трапецій	$0 < \frac{\Delta X^2}{2} < 2$	1,45	1,4
Аналітико-сітковий метод при середніх значеннях параметрів на відрізку (Варіант a)	Стійкий	1,1	1,08
Аналітико-сітковий метод при лінійній зміні значень параметрів на відрізку (Варіант b)	Стійкий	1	1

Результати досліджень показують, що моделювання інтенсивних процесів теплообміну на поверхні деталі при використанні явного і неявного різницевого методів можлива суттєва помилка в оцінці рівня температури матеріалу деталі.

Менший рівень помилки (але істотний) забезпечує метод трапецій. Найбільш ефективним є аналітико-сітковий метод.

Висновки. Пропонований аналітико-сітковий метод володіє абсолютною стійкістю і малою методичною похибкою. Метод може успішно використовуватися при вирішенні прикладних задач теплообміну деталей з навколишнім середовищем, коли потрібна надійна інформація про температуру в поверхневих шарах. Пропоновані модифікації аналітико-сіткового методу можна використовувати в будівництві для забезпечення ефективної теплоізоляції будівельних об'єктів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Киперник Е.Г. Исследование температурных полей при местной термической обработке ступицы и корневых сечений лопастей латунных гребных винтов танкеров типа «Прага» / В.Н. Челабчи, В.Е. Гладков, И.А. Яворский // *Технология судостроения*. – 1986. – № 5. – С. 69-73.
2. Меркт Р.В. До питання чисельного моделювання систем з розподіленими і зосередженими параметрами / Р.В. Меркт, В.В. Челабчі, В.М. Челабчі // *Матеріали VIII міжнародної НПК «Наука і освіта '2005». Математичне моделювання*. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2005. – Т. 23. – С. 45-46.
3. Челабчі В.М. Чисельні методи: Навч. посібник / І.А. Тузова, В.В. Челабчи, В.М. Челабчи. – Одеса: ОНМУ, 2012. – 39 с.
4. Меркт Р.В. О выборе численных методов для исследования динамических систем / Р.В. Меркт, В.В. Челабчи, В.Н. Челабчи // *Сб. научных трудов по материалам международной научно-практической конференции «Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития '2007»*. – Одесса: НИИМФ-ОНМУ, 2007. – Т. 1. – С. 81-84.
5. Челабчі В.Н. Вибір чисельних методів при моделюванні динаміки систем / Т.Д. Панченко, І.А. Тузова, В.В. Челабчі, В.М. Челабчі // *Информационные технологии и средства обучения [Електронний ресурс]*, 2016. – Режим доступу: <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/author/submission/1387>. – Дата доступу: 01.07.2016.

6. Челабчі В.М. Чисельні методи в прикладних розрахунках: Навч. посібник / Т.Д. Панченко, В.І. Стародуб, В.В. Челабчі, В.М. Челабчі. – Одеса: ОНМУ, 2018. – С. 39-64.
7. Кулиниченко В.Р. Справочник по теплообменным расчетам / В.Р. Кулиниченко. – К.: Техника, 2009. – 165 с.

Стаття надійшла до редакції 25.12.2018

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор, віце-президент Асоціації українського сейсмостійкого будівництва **К.В. Єгунов**

кандидат технічних наук, доцент кафедри «Технічна кібернетика» ім. проф. Р.В. Меркта Одеського національного морського університету **І.Г. Бугасва**