УДК 519.2:539.4

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ДРЕВЕСИНЫ

Е.Ю. Неделько
к.т.н., доцент кафедры Высшей математики
Л.И. Коростылёв
д.т.н., профессор кафедры Конструкции и механики судна
А.Л. Чорный
преподаватель

Национальный университет кораблестроения им. адм. Макарова

Аннотация. *В статье проводится статистический анализ результатов механических испытаний на прочность при сжатии образцов твёрдой породы древесины. Проверяется гипотеза о нормальном распределении разрушающих усилий, а также ставится вопрос о значимости различия групповых средних. Применяя дисперсионный анализ, получен вывод о том, что это различие объясняется не естественным разбросом экспериментальных данных, а фактором проведения испытания различными бригадами исследователей.*

Ключевые слова: *прочность древесины, статистический анализ, критерий согласия Пирсона, дисперсионный анализ, критерий Фишера.*

УДК 519.2:539.4

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ МЕХАНІЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ ДЕРЕВИНИ

Є.Ю. Неделько
к.т.н., доцент кафедри Вищої математики
Л.І. Коростильов
д.т.н., професор кафедри Конструкції та механіки судна
А.Л. Чорний
викладач

Національний університет кораблебудування ім. адм. Макарова

Анотація. *В статті проводиться статистичний аналіз результатів механічних випробувань на міцність на стискання зразків твердої породи деревини. Перевіряється гіпотеза про нормальний розподіл руйнуючих зусиль, а також ставиться питання про значимість відмінності групових середніх.*

Застосовуючи дисперсійний аналіз, отримано висновок про те, що дана відмінність пояснюється не природнім розкидом експериментальних даних, а фактором проведення досліду різними бригадами дослідників.

Ключові слова: *міцність деревини, статистичний аналіз, критерій узгодженості Пірсона, дисперсійний аналіз, критерій Фішера.*

UDC 519.2:539.4

STATISTICAL ANALYSIS OF RESULTS MECHANICAL TESTING WOOD

E. Nedelko
Ph.D., Associate Professor, Department of Higher Mathematics
L. Korostylev
doctor of technical sciences, professor,
department of «Ship design and mechanics»
O. Choirnyi
teacher

National University of Shipbuilding them. adm. Makarov

Abstract. *The article provides a statistical analysis of the results of mechanical tests for compressive strength of samples of solid wood. The hypothesis of the normal distribution of destructive efforts is tested, and the question of the significance of the difference between group means is raised. Applying the analysis of variance, it was concluded that this difference is not explained by the natural variation of experimental data, but by the factor of testing by various teams of researchers.*

Keywords: *wood strength, statistical analysis, Pearson's chi-squared test, analysis of variance, F-test.*

В судостроении при формировании корпуса судна на стапельном месте и его спуске на воду широко используется дерево в опорных устройствах (кильблоках, клетях, тележках и др.). При расчетах прочности корпуса судна и его отдельных конструкций необходимы данные о механических характеристиках дерева, которое в опорных устройствах применяют, как правило, в виде пакетов, в которых верхний слой формируется из дерева мягких пород, а нижний – из твердых.

Данные о механических характеристиках дерева приведены в специальной литературе [1; 2; 3]. Однако эти данные имеют большой разброс, что можно объяснить влиянием на них различных факторов. Установить причины такого разброса практически невозможно из-за отсутствия полной информации о методиках проведения испытаний, количествах образцов и других влияющих факторов.

Уровень разброса данных о механических характеристиках и возможные причины можно установить путем статистической обработки полных данных об испытании большой серии образцов. Такие данные о результатах испытаний образцов из дерева твердой породы приведены в работе [4].

В настоящей статье статистическому анализу были подвергнуты результаты испытаний [4] образцов твёрдой породы древесины с размерами 108×9,5×2 мм, которые доводились сжатием до разрушения, которое наступило, по-видимому, в результате потери устойчивости. При этом фиксировалось усилие разрушения. Образцы в количестве 500 шт. изготовлены из древесины одной партии. Испытания проведены пятью различными бригадами, причем каждая испытала по 100 образцов.

Результаты разрушающих нагрузок в кг и их обработка представлены в таблице 1. В ней также приведены результаты вычисления групповых средних по формуле $\overline{F_j} = \sum_{i=1}^{14} F_{i\,\text{ср}} n_i$.

Таблица 1

Результаты испытаний образцов

№ интервала i	Интервал нагрузок F_i, кг	Средина интервала $F_{i\text{ ср}}$, кг	Частота n_{ij}, номер серии 1	2	3	4	5	$\sum n_i$
1	0 – 2	1	-	2	-	-	1	3
2	2 – 4	3	2	1	-	1	-	4
3	4 – 6	5	3	-	-	3	9	15
4	6 – 8	7	10	3	3	5	10	31
5	8 – 10	9	16	6	9	11	28	70
6	10 – 12	11	32	7	12	11	31	93
7	12 – 14	13	24	17	19	20	20	100
8	14 – 16	15	10	18	19	29	1	77
9	16 – 18	17	3	11	28	9	-	51
10	18 – 20	19	-	14	9	10	-	11
11	20 – 22	21	-	9	1	1	-	11
12	22 – 24	23	-	7	-	-	-	7
13	24 – 26	25	-	2	-	-	-	2
14	26 – 28	27	-	3	-	-	-	3
$\sum$			100	100	100	100	100	500
Групповые средние $\overline{F_j}$, кг			11,0	15,8	14,34	13,32	9,84	-

На первом этапе попытаемся определить закон распределения общей совокупности объемом в 500 ед. Для этого сначала построим гистограмму частот и найдем основные числовые характеристики: среднее значение, моду, медиану, дисперсию, стандартное отклонение.

Гистограмма частот приведена на рисунке.

Найдем общее среднее по формуле

$$\overline{F} = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}\overline{F}_j, \qquad \overline{F} = \frac{1}{5}\left(11{,}0 + 15{,}8 + 14{,}34 + 13{,}32 + 9{,}84\right) \approx 13{,}0 \cdot$$

Моду вычислим по формуле [5]

$$Mo = F_0 + k \cdot \frac{\left(n_i - n_{i+1}\right)}{\left(n_i - n_{i-1}\right) + \left(n_i - n_{i+1}\right)},$$

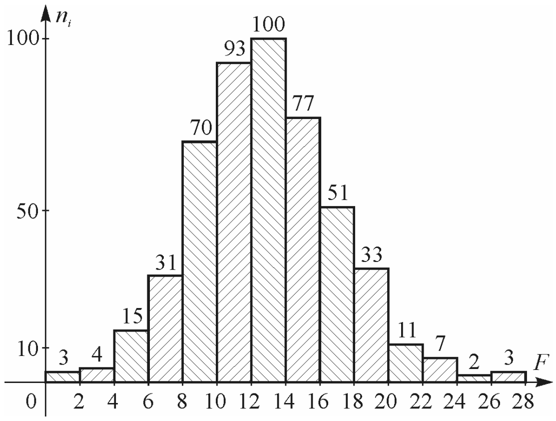

Рисунок. Гистограмма частот

где F_0 – начало модального интервала;

k – ширина модального интервала;

n_{i-1}, n_i, n_{i+1} – частота интервала, предшествующего модальному; частота модального интервала; частота интервала, следующего за модальным.

$$Mo = 12 + 2 \cdot \frac{100 - 93}{\left(100 - 93\right) + \left(100 - 77\right)} = 12{,}5 \cdot$$

Медиану подсчитаем по формуле [6]

$$Me = F_0 + k \cdot \frac{n/2 - T_{i-1}}{n_i},$$

где F_0 – начало медианного интервала;

k – ширина медианного интервала;

n – объём совокупности;

T_{i-1} – сумма частот к началу медианного интервала;

n_i – ширина медианного интервала.

$$Me = 12 + 2 \cdot \frac{500/2 - 216}{100} \approx 12{,}7 \cdot$$

Подсчитаем меры изменчивости: дисперсию S^2 (кг^2) и стандартное отклонение S (кг). Дисперсию подсчитаем по формуле

$$S^2 = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{14} \left(F_{i\,\text{ср}} - \overline{F}\right)^2 n_i =$$

$$= \frac{1}{500} \Big[(1-13)^2 \cdot 3 + (3-13)^2 \cdot 4 + (5-13)^2 \cdot 15 + (7-13)^2 \cdot 31 +$$
$$+ (9-13)^2 \cdot 70 + (11-13)^2 \cdot 93 + (13-13)^2 \cdot 100 + (15-13)^2 \cdot 77 +$$
$$+ (17-13)^2 \cdot 51 + (19-13)^2 \cdot 33 + (21-13)^2 \cdot 11 + (23-13)^2 \cdot 7 +$$
$$+ (25-13)^2 \cdot 2 + (27-13)^2 \cdot 3 \Big] = 17{,}98 .$$

Стандартное отклонение

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{17{,}98} = 4{,}24 .$$

Построим доверительный интервал для оценки генеральной средней по формуле [7]

$$\overline{F}_{\text{В}} - \frac{t_\gamma S_{\text{В}}}{\sqrt{n}} < \overline{F}_{\Gamma} < \overline{F}_{\text{В}} + \frac{t_\gamma S_{\text{В}}}{\sqrt{n}} ,$$

где $\overline{F}_{\text{В}}$ – выборочная средняя;

$S_{\text{В}}$ – выборочное стандартное отклонение, подсчитанное по выборке объёма n;

t_γ – справочный параметр [7], зависящий от объёма выборки и заданного уровня доверительной вероятности γ .

В нашем случае: $\overline{F}_{\text{В}} = 13$; $S_{\text{В}} = 4{,}24$; $n = 500$; $\gamma = 0{,}95$; $t_\gamma (n = 500,\ \gamma = 0{,}95) = 1{,}96$.

$$13 - \frac{1{,}96 \cdot 4{,}24}{\sqrt{500}} < \overline{F}_{\Gamma} < 13 + \frac{1{,}96 \cdot 4{,}24}{\sqrt{500}} ; \qquad 12{,}63 < \overline{F}_{\Gamma} < 13{,}37 .$$

Таким образом, с вероятностью 0,95 среднее значение разрушающего усилия при сжатии генеральной совокупности (образцов данного типа древесины) покрывается интервалом (12,63; 13,37).

Подводя промежуточный итог первого этапа анализа экспериментальных данных можно сказать, что распределение разрушающих усилий приближается к нормальному. Об этом говорит хотя бы тот факт, что мода, медиана и среднее значение (12,5; 12,7; 13) весьма близки друг к другу. Кроме того вид гистограммы частот напоминает форму нормальной кривой.

Чтобы окончательно удостоверится в нормальном характере распределения экспериментальных данных, проведем проверку гипотезы о нормальном распределении совокупности по критерию Пирсона [7].

Начнём с определения теоретических частот нормального распределения. Для этого составим таблицу 2, в которой приняты следующие обозначения: F_i, F_{i+1} – начало и конец интервала нагрузки, $\overline{F}$ – общая средняя; $z_i = \frac{1}{S}\left(F_i - \overline{F}\right)$; $z_{i+1} = \frac{1}{S}\left(F_{i+1} - \overline{F}\right)$ – нормированные значения нагрузки; $S = 4{,}24$ - стандартное отклонение; $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-x^2/2}\,dx$ - интеграл вероятности, значение которого находится по специальной таблице [7]; $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ – вероятность попадания величины F в интервал (z_i, z_{i+1}); $n_i = n \cdot P_i = 500P_i$ – теоретическая частота.

Таблица 2

Определение теоретических частот нормального распределения

i	F_i	F_{i+1}	$F_i - \overline{F}$	$F_{i+1} - \overline{F}$	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	n_i
1	0	2	-	-1	-∞	-2,59	-0,5	-0,4952	0,0048	2,4
2	2	4	-11	-9	-2,59	-2,12	-0,4952	-0,4830	0,0122	6,1
3	4	6	-9	-7	-2,12	-1,65	-0,4830	-0,4505	0,0325	16,25
4	6	8	-7	-5	-1,65	-1,18	-0,4505	-0,3810	0,0695	34,75
5	8	10	-5	-3	-1,18	-0,71	-0,3810	-0,2611	0,1199	59,95
6	10	12	-3	-1	-0,71	-0,24	-0,2611	-0,0948	0,1663	83,15
7	12	14	-1	1	-0,24	0,24	-0,0948	0,0948	0,1896	94,8
8	14	16	1	3	0,24	0,71	0,0948	0,2611	0,1663	83,15
9	16	18	3	5	0,71	1,18	0,2611	0,3810	0,1199	59,95
10	18	20	5	7	1,18	1,65	0,3810	0,4505	0,0695	34,75
11	20	22	7	9	1,65	2,12	0,4505	0,4830	0,0325	16,25
12	22	24	9	11	2,12	2,59	0,4830	0,4952	0,0122	6,1
13	24	26	11	13	2,59	3,07	0,4952	0,4987	0,0035	1,75
14	26	28	13	15	3,07	+∞	0,4987	0,5	0,0013	0,65
∑	-	-	-	-	-	-	-	-	1	500

Для проверки нулевой гипотезы H_0: генеральная совокупность распределена по нормальному закону, формируем случайную величину χ^2, где

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'},$$

наблюдаемое значение которой определим с использованием таблицы 3. В таблице 3 обозначено:

n_i − эмпирические частоты;

n_i' − теоретические частоты.

Два последних столбца служат для контроля точности вычислений. Если вычисления корректны, то должно выполняться условие

$$\sum_i \frac{n_i^2}{n_i'} - n = \chi^2_{\text{набл}}.$$

Таблица 3

Определение наблюдаемого значения случайной величины χ^2

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	3	2,4	0,6	0,36	0,15	9	3,75
2	4	6,1	-2,1	4,41	0,72	16	2,62
3	15	16,25	-1,25	1,5625	0,096	225	13,85
4	31	34,75	-3,75	14,0625	0,405	961	27,65
5	70	59,95	10,05	101,0025	1,705	4900	81,73
6	93	83,15	9,85	97,0225	1,167	8649	104,02
7	100	94,8	5,2	27,04	0,285	10000	105,49
8	77	83,15	-6,15	37,8225	0,455	5929	71,30
9	51	59,95	-8,95	80,1025	1,336	2601	43,39
10	33	34,75	-1,75	3,0625	0,0888	1089	31,34
11	11	16,25	-5,25	27,5625	1,696	121	7,45
12	7	6,1	0,9	0,81	0,133	49	8,03
13	2	1,75	0,25	0,0625	0,036	4	2,29
14	3	0,65	2,35	5,5225	8,496	9	13,85
$\sum$	500	500			$\chi^2_{\text{набл}} = 16,76$		516,76

В результате вычислений

$$\chi^2_{\text{набл}} = 16,76.$$

Контроль вычислений

$$\sum_i \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 516{,}76 - 500 = 16{,}76 \cdot$$

Критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$, где $\alpha = 0{,}05$ − принятый уровень значимости; $k = l - 3 = 14 - 3 = 11$, где $l = 14$ − количество интервалов, найдём по таблице [7]

$$\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;11) = 19{,}7 \; .$$

Вывод: так как $\chi^2_{\text{набл}} = 16{,}76 < \chi^2_{\text{кр}} = 19{,}7$, то есть наблюдаемое значение критерия не попадает в критическую область, нет оснований отвергать нулевую гипотезу о нормальном распределении. В результате можно считать, что разрушающее усилие в данном виде испытаний подчиняется нормальному закону.

Второй этап статистического анализа результатов испытаний ставит следующий вопрос. Обратившись к таблице 1, замечаем, что групповые средние различаются существенно (от 9,84 до 15,8). Напомним, что испытания провели пять разных бригад. Разницу в средних, по-видимому, можно объяснить двумя причинами: либо естественным разбросом характерным данному виду материала, либо фактором проведения исследования разными бригадами. Возможны различия в технике проведения эксперимента, погрешностях измерений, качестве оборудования и пр. Предстоит выяснить случайно или нет различие в групповых средних. Если будет подтверждена случайность расхождения, то скорей всего превалирует роль свойств материала. Если же расхождение не случайно, тогда надо рекомендовать тщательно проанализировать методику испытаний каждой бригады исследователей.

Решение поставленной задачи осуществим в результате сравнения средних с использованием дисперсионного анализа [7]. Суть метода сводится к сравнению факторной и остаточной дисперсий. При этом считается, что факторная дисперсия $S^2_{\text{факт}}$ несёт ответственность за влияние фактора (в нашем случае проведения опытов разными бригадами), а остаточная дисперсия $S^2_{\text{ост}}$ отвечает за влияние случайных факторов.

Прежде чем вычислить $S^2_{\text{факт}}$ и $S^2_{\text{ост}}$ найдем суммы квадратов отклонений по формулам

$$S_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{14} \left(F_i - \overline{F}\right)^2 n_i \; ; \quad S_{\text{факт}} = 100 \sum_{j=1}^{5} \left(\overline{F}_j - \overline{F}\right); \quad S_{\text{ост}} = S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}} \; .$$

В нашем случае

$$S_{\text{общ}} = S^2 \cdot n = 17{,}98 \cdot 500 = 8990 \; ; \; \overline{F} = 13{,}0 \; ;$$

$$S_{\text{факт}} = 100 \cdot \Big[(11-13)^2 + (15{,}8-13)^2 + (14{,}34-13)^2 + \\ + (13{,}32-13)^2 + (9{,}84-13)^2\Big] = 2372{,}4\,;$$

$$S_{\text{ост}} = 8990 - 2372{,}4 = 6617{,}6\,.$$

Переходим к вычислению дисперсий

$$S^2_{\text{факт}} = \frac{S_{\text{факт}}}{m-1} = \frac{2372{,}4}{5-1} = 593{,}1\,; \quad S^2_{\text{ост}} = \frac{S_{\text{ост}}}{m(p-1)} = \frac{6617{,}6}{5(100-1)} = 13{,}4\,,$$

где m – количество серий;

p – количество испытаний в одной серии.

Существенность различия факторной и остаточной дисперсии проверим по критерию Фишера. Для этого вычисляем наблюдаемое значение критерия

$$\widetilde{F}_{\text{набл}} = \frac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{ост}}} = \frac{593{,}1}{13{,}4} = 44{,}3\,.$$

Критическую точку правосторонней критической области $\widetilde{F}_{\text{кр}}$, зависящую от заданного уровня значимости $\alpha = 0{,}01$ и чисел степеней свободы большей дисперсии $k_1 = m - 1 = 5$ и меньшей дисперсии $k_2 = m(p-1) = 5(100-1) = 495$, найдем по таблице [4]

$$\widetilde{F}_{\text{кр}}(0{,}01;\ 4;\ 495) = 3{,}32\,.$$

В результате, поскольку

$$\widetilde{F}_{\text{набл}} = 44{,}3 > \widetilde{F}_{\text{кр}} = 3{,}32\,,$$

различие факторной и остаточной дисперсии следует признать значимым. Это означает, что различие в групповых средних нельзя признать случайными и объясняется не естественным разбросом экспериментальных данных, связанных со свойствами материала, а фактом проведения полной серии испытаний различными бригадами.

В итоге проведенного статистического анализа можно констатировать следующее:

1. Распределение разрушающих усилий можно считать нормальным с основными параметрами

$$\overline{F} = 13{,}0 \text{ и } S = 4{,}24\,;$$

2. Различие в групповых средних, вероятно, связано с ошибками в планировании эксперимента.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Архангородский А.Г. Сминающиеся прокладки в судостроении и судоремонте / А.Г. Архангородский, Л.М. Беленький, А.Б. Литвин. − Ленинград: Судостроение, 1966. − 132 с.*
2. *Козляков В.В. Проектирование доковых опорных устройств / В.В. Козляков, Г.Н. Финкель, И.Я. Хархурим. − Ленинград: Судостроение, 1973. − 176 с.*
3. *Антоненко С.В. Обеспечение прочности, остойчивости и непотопляемости судов при ремонте: Учебн. пособие. С.В. Антоненко / Дальневосточный гос. техн. ун-т. − Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2008. − 230 с.*
4. *Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке / Н. Джонсон, Ф. Лион. − М.: Мир, 1980. − 160 с.*
5. *Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике: Учебн. пособие / Я.К. Колде. − М.: Высшая школа, 1991. – 157 с.*
6. *Венецкий И.Г. Основы теории вероятностей и математической статистики / И.Г. Венецкий, Г.С. Кильдишев. − М.: Изд-во. Статистика, 1968. − 360 с.*
7. *Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. − М.: Высшая школа, 1972. − 368 с.*

Стаття надійшла до редакції 15.11.2018

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри Технології суднобудівництва Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова **А.С. Рашковський**

кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри «Теорія і проектування корабля ім.професора Ю.Л. Воробйова» Одеського національного морського університету **О.В. Демідюк**