

УДК 330.3:330.46

Циганчук Р. О.

Університет банківської справи Національного банку України

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ВІДНОСНО ВУЗЛОВИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ, ДИСКРЕТНИХ У ЧАСІ

Сформульовано загальне поняття моделювання в економіці і його використання в розвитку і формалізації економічної теорії. Описано математичні методи дослідження в економіці, розглянуто теорію моделювання, моделі різних рівнів економіки та узгодження інтересів. Отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначного ускладнення розрахункових формул суттєво скоротити загальне число прораховуваних вузлів при моделюванні економічних процесів.

Ключові слова: математична модель, вузлова функція, економічна динаміка, періодичність.

Вступ. Сучасна економічна теорія як на мікро-, так і на макрорівні включає як природний, необхідний елемент математичні моделі та методи. Використання математики в економіці дозволяє, по-перше, виділити і формально описати найбільш важливі, істотні зв'язки економічних змінних і об'єктів: вивчення настільки складного об'єкта припускає високий ступінь абстракції. По-друге, з чітко сформульованих вихідних даних і співвідношень методами дедукції можна отримувати висновки, адекватні досліджуваному об'єкту в тій же мірі, що і зроблені передумови. По-третє, методи математики і статистики дозволяють індуктивним шляхом отримувати нові знання про об'єкт: оцінювати форму і параметри залежностей його змінних, що відповідають у найбільшій мірі наявним спостереженням. Нарешті, по-четверте, використання мови математики дозволяє точно і компактно викладати положення економічної теорії, формулювати її поняття та висновки.

Математичні моделі використовувалися з ілюстративними і дослідницькими цілями ще Ф. Кене (1758 «Економічна таблиця»), А. Смітом (класична макроекономічна модель), Д. Рікардо (модель міжнародної торгівлі). У ХІХ столітті великий внесок у моделювання ринкової економіки внесла математична школа (Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето, Ф. Еджворт та ін.). У ХХ столітті математичні методи моделювання застосовувались дуже широко, з їх використанням пов'язані практично всі роботи, удостоєні Нобелівської премії з економіки (Д. Хікс, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуельсон та ін.). Розвиток мікроекономіки, макроекономіки, прикладних дисциплін пов'язано з все більш високим рівнем їх формалізації. Основою для цього заклав прогрес в області прикладної математики – теорії ігор, математичного програмування, математичної статистики. В Росії на початку ХХ століття великий внесок у математичне моделювання економіки внесли В. К. Дмитрієв і Е. Е. Слуцький. У 1930-1950 роки в цій області не спостерігалось прогресу внаслідок ідеологічних обмежень тоталітарного режиму. У 1960-1980 рр. економіко-математичний напрям відродився (В. С. Немчинов, В. В. Новожилов, Л. В. Канторович), але був пов'язаний в основному зі спробами формально описати «систему оптимального функціонування соціалістичної економіки» (Н. П. Федоренко, С. С. Шаталін та ін.). Будувалися багаторівневі системи моделей народногосподарського планування, оптимізаційні моделі галузей і підприємств. Зараз важливим завданням є моделювання процесів перехідного періоду.

Будь-яке економічне дослідження завжди передбачає об'єднання теорії (економічної моделі) та практики (статистичних даних). Теоретичні

моделі використовуються для опису і пояснення спостережуваних процесів, а статистичні дані збираються з метою емпіричної побудови і обґрунтування моделей [5].

Для вивчення різних економічних явищ економісти використовують – їх спрощені формальні описи, так звані економічні моделі. Прикладами економічних моделей є моделі споживчого вибору, моделі фірми, моделі економічного зростання, моделі рівноваги на товарних, факторних і фінансових ринках і багато інших. Будуючи моделі, економісти виявляють істотні фактори, що визначають досліджуване явище і відкидають деталі не суттєві для вирішення поставленої проблеми. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дозволяє оцінити можливі наслідки впливу на них і використовувати такі оцінки в управлінні.

Методика побудови економічної моделі.

1. Формулюються предмет і мета дослідження.

2. У розглянутій економічній системі виділяються структурні або функціональні елементи, відповідні даній меті, виявляються найбільш важливі якісні характеристики цих елементів.

3. Словесно, якісно описуються взаємозв'язки між елементами моделі.

4. Вводяться символічні позначення для характеристик економічного об'єкта, що враховуються і формалізуються, наскільки можливо, взаємозв'язки між ними. Тим самим формулюється математична модель.

5. Проводяться розрахунки з математичної моделі і аналізується отримане рішення.

Слід розрізняти математичну структуру моделі та її змістовну інтерпретацію.

Економічні моделі дозволяють виявити особливості функціонування економічного об'єкта і на основі цього передбачати майбутню поведінку об'єкта при зміні будь-яких параметрів. У моделі всі взаємозв'язки змінних можуть бути оцінені кількісно, що дозволяє отримати більш точний і надійний прогноз.

Для будь-якого економічного суб'єкта можливість прогнозування ситуації означає, перш за все, отримання кращих результатів або уникнути втрат, у тому числі і в державній політиці.

За своїм визначенням будь-яка економічна модель абстрактна і, отже, неповна, оскільки, виділяючи найбільш суттєві фактори, що визначають закономірності функціонування розглянутого економічного об'єкта, вона абстрагується від інших факторів, які, незважаючи на свою відносну незначущість, все ж в сукупності можуть визначати не тільки відхилення в поведінці об'єкта, а й саме його поведінку. Так, в найпростішій моделі попиту вважається, що величина попиту на

який-небудь товар визначається його ціною і доходом споживача. Насправді ж на величину попиту здійснює також вплив ряд інших факторів: смаки та очікування споживачів, ціни на інші товари, вплив реклами, моди і так далі. Зазвичай припускають, що всі фактори, не враховані явно в економічній моделі, справляють на об'єкт відносно малий результуючий вплив в аспекті, який нас цікавить. Склад врахованих в моделі факторів і її структура можуть бути уточнені в ході вдосконалення моделі.

Математична модель економічного об'єкта – це його гомоморфне відображення у вигляді сукупності рівнянь, нерівностей, логічних відносин, графіків. Гомоморфне відображення об'єднує групи зв'язків елементів досліджуваного об'єкта в аналогічні зв'язки елементів моделі. Модель – це умовний образ об'єкта, побудований для спрощення його дослідження. Передбачається, що вивчення моделі дає нові знання про об'єкт або дозволяє визначити найкращі рішення в тій чи іншій ситуації.

Якщо модель є оптимізаційною, то поряд з обмеженнями повинна бути визначена цільова функція, тобто величина, яка максимізується або мінімізується, що відображає інтереси суб'єкта, який приймає рішення.

Математичні моделі, що використовуються в економіці, можна поділяти на класи за рядом ознак, що відносяться до особливостей модельованого об'єкта, мети моделювання і використовуваного інструментарію: моделі макро- і мікроекономічні, теоретичні та прикладні, оптимізаційні і рівноважні, статичні і динамічні.

Макроекономічні моделі описують економіку як єдине ціле, пов'язуючи між собою укрупнені матеріальні та фінансові показники: ВВП, споживання, інвестиції, зайнятість, процентну ставку, кількість грошей та інші.

Мікроекономічні моделі описують взаємодію структурних і функціональних складових економіки або поведінку окремої такої складової в ринковому середовищі. Внаслідок різноманітності типів економічних елементів і форм їх взаємодії на ринку, мікроекономічне моделювання займає основну частину економіко-математичної теорії. У моделюванні ринкової економіки особливе місце займають рівноважні моделі. Вони описують такі стани економіки, коли результуюча всіх сил, що прагнуть вивести її з цього стану, дорівнює нулю. У неринковій економіці нерівновага по одних параметрах (наприклад, дефіцит) компенсується іншими факторами (чорний ринок, черги і т. п.). Рівноважні моделі дескриптивні, описові. У нашій країні довгий час переважав нормативний підхід у моделюванні, заснований на оптимізації.

Аналіз останніх наукових досліджень. Моделювання економіки – розділ економічної науки, що займається аналізом властивостей і рішень математичних моделей економічних процесів. У деяких випадках ці моделі можуть розглядатися як частина математичної теорії на стику з економічною наукою. Моделювання економіки відділяється зазвичай від економетрики, що займається статистичною оцінкою і аналізом економічних залежностей і моделей на основі вивчення емпіричних даних. У моделюванні економіки досліджуються теоретичні моделі, засновані на певних формальних передумовах (лінійність, опуклість, монотонність і т.п. залежності, конкретні формули взаємозв'язку величин). Моделювання економіки,

взагалі кажучи, не займається вивченням ступеня обґрунтованості того, що дана залежність має той чи інший вид (наприклад, що величина споживання є лінійною зростаючою функцією доходу), – це залишається для економетрики. Завданням моделювання економіки є вивчення питання про існування рішення моделі, умовах її невід'ємності, стаціонарності, наявності інших властивостей. Це зазвичай здійснюється, як і в математиці, шляхом дедуктивного отримання наслідків (теорем) з апріорно зроблених передумов (аксіом).

Зрозуміло, предметна область, методологія та інструментарій економічної науки не вичерпуються підходами моделювання економіки та економетрики – зазвичай в економічних дослідженнях використовуються також методи якісного аналізу, індуктивні, евристичні підходи, що перемежуються з елементами моделювання економіки та економетрики. Таким чином, моделювання економіки виступає і як самостійний розділ економічної науки, і як один з її інструментів. При цьому розділи моделювання економіки, що досліджувалися раніше в суто теоретичному плані, все більше стають теоретичною базою та елементами прикладних досліджень.

Серед моделей економіки можна виділити два великих класи – моделі рівноваги в економічних системах і моделі економічного зростання. Моделі рівноваги (наприклад, модель Ерроу-Добре, модель «витрати-випуск» В. Леонтьєва) допомагають дослідити стани економічних систем, в яких рівнодіюча всіх зовнішніх сил дорівнює нулю. Це, взагалі кажучи, статичні моделі, в той час як економічна динаміка описується за допомогою моделей зростання (модель Харрода-Домара, модель Солоу, моделі магістрального типу та ін.). Ключовим моментом дослідження моделей зростання є аналіз і відшукування траєкторій стаціонарного росту (зростання з постійними, в тому чи іншому сенсі, структурними характеристиками), до виходу на які зазвичай прагне описувана моделлю економічна система. Дослідження траєкторії стаціонарного зростання є одночасно базою для аналізу більш складних типів росту і сполучною ланкою з моделями економічної рівноваги [2; 3; 4].

У моделях статичних описується стан економічного об'єкта в конкретний момент чи період часу; динамічні моделі включають взаємозв'язки змінних в часі. У статичних моделях зазвичай зафіксовані значення ряду величин, що є змінними в динаміці, наприклад, капітальних ресурсів, цін і т. п. Динамічна модель не зводиться до простої суми ряду статичних, а описує сили і взаємодії в економіці, що визначають хід процесів у ній. Динамічні моделі зазвичай використовують апарат диференціальних та різницевих рівнянь, варіаційного числення.

Детерміновані моделі передбачають жорсткі функціональні зв'язки між змінними моделі. Стохастичні моделі допускають наявність випадкових впливів на досліджувані показники і використовують інструментарій теорії ймовірностей і математичної статистики для їх опису.

Під динамічною системою розуміють всяку систему, яка змінюється в часі. Час в економічній динаміці може розглядатися як неперервний або дискретний. Неперервний час зручний для моделювання, так як дає змогу використати апарат диференціального числення і диференціальних рівнянь. Дискретний час зручний для розв'язування прикладних задач, оскільки статистичні дані завжди дискретні і відносяться до конкретних оди-

ниць часу. Для дискретного часу використовують апарат різницевих рівнянь [1].

Метою роботи є розроблення раціонального способу, що значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу дискретного у часі різницевиими рівняннями.

Основний матеріал дослідження. Розглянемо, різницеве рівняння для порядку апроксимації $k=1$ з похибкою п'ятого порядку записувалось так:

$$-3y_{m-1} + 3y_{m+1} = h(y'_{m-1} + 4y'_m + y'_{m+1}) + \frac{1}{30} h^5 y_m^{(5)}, \quad (1)$$

m – номер вузлової точки, h – крок дискретизації, y_{m-1}, y_m, y_{m+1} – сіткові функції, y'_{m-1}, y'_m, y'_{m+1} – їх похідні.

Кінцево-різницева формула (1) пов'язує шукану функцію в $(m-1)$ -му і $(m+1)$ -му вузлах через значення її похідних в $(m-1)$ -му, (m) -му, $(m+1)$ -му вузлах. Спробуємо отримати апроксимуючі формули, розв'язаних відносно функцій, тобто такі, що визначають функцію в m -му вузлі через значення її похідних у трьох інших вузлах. Розглянемо метод отримання таких виразів на прикладі рівняння (1).

Для економічних процесів, які характеризуються періодичністю вигляду $y_m(t) = y_m - (t+180)1$ в якості інтервалу повторюваності доцільно прийняти півперіод, що скоротить час розв'язування задачі. Мінімальна кількість вузлів на періоді для тривузлової апроксимації дорівнює чотирьом ($n=4$) Записуючи рівняння (1) для всіх вузлових точок періоду з урахуванням граничних умов, які для періодичних економічних процесів будуть мати вигляд

$$y_{n+1} = -y_1. \quad (2)$$

Приходимо до наступної системи кінцево-різницевих рівнянь

$$\begin{aligned} -y_1 + y_3 &= \frac{h}{3}(y'_1 + 4y'_2 + y'_3), \\ -y_2 + y_4 &= \frac{h}{3}(y'_2 + 4y'_3 + y'_4), \\ -y_3 - y_1 &= \frac{h}{3}(y'_3 + 4y'_4 - y'_1), \\ -y_4 - y_2 &= \frac{h}{3}(y'_4 - 4y'_1 - y'_2). \end{aligned} \quad (3)$$

У результаті розв'язання системи різницевих рівнянь (3) відносно вузлових функцій отримаємо

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{h}{3}(-2y'_2 - y'_3 - 2y'_4), \\ y_2 &= \frac{h}{3}(2y'_1 - 2y'_3 + y'_4), \\ y_3 &= \frac{h}{3}(y'_1 + 2y'_2 - 2y'_4), \\ y_4 &= \frac{h}{3}(2y'_1 + 4y'_2 + 2y'_3), \end{aligned} \quad (4)$$

або у матричній формі

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{h}{3} \begin{pmatrix} & & -2 & -1 & -2 \\ 2 & & & -2 & -1 \\ 1 & 2 & & & -2 \\ 2 & 1 & 2 & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Збільшимо кількість вузлів на періоді вдвічі, тобто візьмемо $n=8$. Система кінцево-різницевих

рівнянь для всіх вузлових точок періоду матиме вигляд

$$\begin{aligned} -y_1 + y_3 &= \frac{h}{3}(y'_1 + 4y'_2 + y'_3), \\ -y_2 + y_4 &= \frac{h}{3}(y'_2 + 4y'_3 + y'_4), \\ -y_3 + y_5 &= \frac{h}{3}(y'_3 + 4y'_4 + y'_5), \\ -y_4 + y_6 &= \frac{h}{3}(y'_4 + 4y'_5 + y'_6), \\ -y_5 + y_7 &= \frac{h}{3}(y'_5 + 4y'_6 + y'_7), \\ -y_6 + y_8 &= \frac{h}{3}(y'_6 + 4y'_7 + y'_8), \\ -y_7 - y_1 &= \frac{h}{3}(y'_7 + 4y'_8 - y'_1), \\ -y_8 - y_2 &= \frac{h}{3}(y'_8 + 4y'_1 - y'_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Систему рівнянь (6) представимо в розгорнутій матричній формі

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix} = \frac{h}{3} \begin{pmatrix} & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & \\ 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 & \\ 1 & 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 & \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & -2 & \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \\ y'_5 \\ y'_6 \\ y'_7 \\ y'_8 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Покладаючи число вузлів на періоді $n=4(k+1)$ де $k=0,1,2,\dots$, отримаємо різницеве рівняння у векторно-матричному вигляді

$$\frac{h}{3} \bar{Y} = g \bar{Y}', \quad (8)$$

де $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_t$, $\bar{Y}' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)_t$ – транспоновані матриці,

$$g = \begin{pmatrix} & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & \\ 2 & 1 & 2 & & -2 & -1 & -2 & -1 & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{pmatrix} \quad (9)$$

квадратна матриця розмірності n .

Висновки:

1. Розроблено раціональні способи апроксимації диференціальних рівнянь різницевиими при моделюванні економічних процесів дискретних у часі. Отримано різницеві рівняння підвищеної точності, які дають змогу ціною незначного ускладнення розрахункових формул суттєво скоротити загальне число прораховуваних вузлів і в кінцевому рахунку вимагають менших обчислювальних затрат.

2. Розв'язання кінцево-різницевих рівнянь підвищеної точності відносно вузлових функцій значно спрощує й полегшує процедуру апроксимації диференціальних рівнянь економічного процесу різницевиими рівняннями.

3. Запропонований метод отримання різницевих рівнянь підвищеної точності є загальним і може бути поширений на будь-яку кількість вузлів дискретної сітки.

Список літератури:

1. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике : учебник / Под общ. ред. д. э. н., проф. А. В. Сидоровича; МГУ им. М. В. Ломоносова. – 3-е изд. переросб. – М. : Изд. «Дело и Сервис», 2004. – 268 с.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, Т. 2. – М. : Физматгиз, 1992. – 639 с.

3. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. – М. : Наука, 1993. – 400 с.
4. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М. : Наука, 1997. – 664 с.
5. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учеб пособие для вузов. – М. : Юнити Дана, 2010. – 367 с.

Цыганчук Р. О.

Университет банковского дела Национального банка Украины

МЕТОД РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО УЗЛОВОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ДИСКРЕТНЫХ ВО ВРЕМЕНИ

Резюме

Описаны математические методы исследования в экономике, рассмотрена теория моделирования, модели разных уровней экономики и согласования интересов. Сформулировано общее понятие моделирования в экономике и его использование в развитии и формализации экономической теории. Получены разностные уравнения повышенной точности, позволяющие ценой незначительного осложнения расчетных формул существенно сократить общее число просчитываемых узлов при моделировании экономических процессов.

Ключевые слова: математическая модель, узловая функция, экономическая динамика, периодичность.

Tsyhanchuk R. O.

University of Banking of the National Bank of Ukraine

METHOD FOR SOLVING DIFFERENCE EQUATIONS NODAL FUNCTIONS FOR MODELING OF ECONOMIC PROCESSES AND DISCRETE IN TIME

Summary

There is given a description of investigative techniques in economics; there is simulation theory, different levels of economic models and congruence of interests analysed. The concept of economic modelling and its usage in the development and formal characterization of economic theory has been formulated. The difference equations of multiple precision, which have been deduced, make it possible to significantly cancel the general number of calculated components during economic processes modelling.

Key words: math model, nodal function, economic dynamics, periodicity.