РОЗДІЛ 10
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.176

Кобець С. П.
Скрильник І. І.
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

Розглянуто побудову теоретико-графової моделі для оптимального розміщення складських приміщень економічних об'єктів, зокрема складу запасів кормів СТОВ «Воскобійники», та визначення довжини такого замкненого маршруту, що проходить через кожний пункт лише один раз із поверненням на склад. За результатами моделювання виконано розрахунки у середовищі Excel. Отримані теоретико-графові моделі було використано при дослідженні оптимального функціонування даного економічного об'єкта.
Ключові слова: граф, теоретико-графова модель, медіана графа, ребра графа, передавальні числа.

Постановка проблеми. Сучасним українським господарствам доводиться здійснювати свою ринкову діяльність в умовах високої невизначеності процесів, що відбуваються в національній та світовій економіці. У період наростаючих внутрішніх труднощів велике значення для стійкого функціонування підприємства набуває ефективна системи управління. Для прийняття оптимальних управлінських рішень останнім часом використовують сучасні наукові підходи, а саме: прогнозування, економіко-математичне, теоретико-графове моделювання економічних об'єктів та процесів виробництва. Розв'язання багатьох оптимізаційних задач зводиться до створення теоретико-графових моделей, що дають можливість не лише відображати структуру системи та істотні зв'язки між її елементами, а й знаходити правильне вирішення проблеми. До них відносяться:

– задачі розподілу ресурсів, які виникають при певному наборі операцій (робіт), що необхідно виконати за обмежених ресурсів;

– задачі управління запасами, що полягають у знаходженні оптимальних значень рівня запасів і розміру замовлення для забезпечення безперебійного виробничого процесу;

– задачі планування та розміщення, пов'язані з визначенням оптимального числа і місця розміщення нових об'єктів з урахуванням їхньої взаємодії з наявними об'єктами і між собою та ін.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. До теоретико-графового моделювання проявляється все більш зростаючий інтерес, воно визнано ефективним апаратом формалізації наукових і технічних задач у різних галузях: в обчислювальній техніці, автоматизації проектування, автоматиці, кібернетиці. Так, І.М. Мельник у своїх працях досліджував графовий підхід до побудови економетричної моделі як задачі цілочислового програмування [1, с. 49–56]. О.М. Парубець виконував моделювання мережевих структур на транспорті з використанням елементів теорії графів [2, с. 380–383]. У своїх працях А.М. Штангрет висвітлив дослідження поточного стану та здійснив моделювання ключових загроз для економічної безпеки підприємств авіаційної галузі України [3]. К.В. Ніколаєва, В.В. Койбічук займалися вирішенням практичних задач, що зводяться до графів, а також інтерпретецією результатів їхнього розв'язання [4, с. 66–68]. О.Г. Климко, М.С. Вольна безпосередньо розглядали питання вдосконалення функціонування торговельної мережі на основі теорії графів [5].

Мета статті полягає у побудові теоретико-графової моделі визначення оптимального місця розміщення складу запасів кормів СТОВ «Воскобійники» та визначенні довжини такого замкненого маршруту, що проходить через кожний пункт лише один раз із поверненням на склад.

Виклад основного матеріалу дослідження. Проблема постачання виробникам товарів, сировини з одного складу (пункту постачання) є актуальною. Із метою економії пального, коштів для виробництва можна визначити таке оптимальне розміщення пункту постачання, щоб сума найкоротших відстаней від нього до споживачів, яку проходить транспорт, була б мінімально можливою. Для знаходження оптимального місця розміщення складу можна використати теорію графів, зокрема теорію розміщення медіан у графі. Подібні задачі в різних формах часто зустрічаються на практиці: при виборі місця розміщення підстанцій в електромережах, складів постачання у мережі доріг, відділах сортування у поштовому зв'язку та ін. Вони називаються мінісумарними задачами розміщення. Ураховуючи актуальність

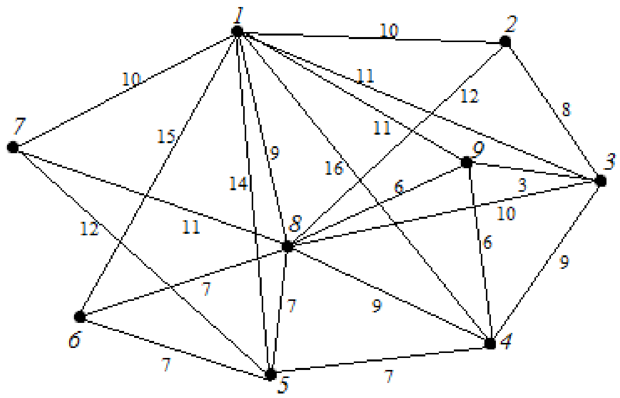

Рис. 1. Граф *G*, топологічна структура СТОВ «Воскобійники»

теми, мету досліджень, було поставлено наступну задачу.

Постановка задачі. На рис. 1 представлено граф *G* (топологічну структуру СТОВ «Воскобійники»), в якому вершини – фермерські господарства, ребра – дороги, що їх сполучають.

Сільськогосподарське товариство «Воскобійники», до складу якого входить дев'ять фермерських господарств, що розташовані в різних населених пунктах, повинне побудувати склад для постачання кормових запасів фермам у даних пунктах, відстань від яких до найбільш віддаленої точки буде мінімальною. Щоб зменшити кількість поїздок, пропонується побудувати склад на базі одного з фермерських господарств, знайти оптимальне місце розташування складу та відшукати довжину такого замкненого маршруту, що проходить через кожний пункт лише один раз із поверненням на склад.

Математична модель. Для вирішення даної проблеми необхідно:

1) виконати розрахунок мінімальних відстаней між усіма існуючими об'єктами;

2) знайти центр топологічної структури;

3) знайти замкнений маршрут зі складу (гамільтоновий цикл).

Розрахунок мінімальних відстаней між усіма існуючими об'єктами. Для заданої топології, застосувавши алгоритм Флойда, виконується розрахунок мінімальних відстаней між усіма існуючими об'єктами [6, с. 189–191]. Він базується на використанні послідовності з перетворень (ітерацій) початкової матриці ваг *C*. При цьому на *k*-й ітерації матриця представляє довжини найкоротших шляхів між кожною парою вершин з тим обмеженням, що шлях між x_i та x_j (для будь-яких x_i та x_j) міститься в якості проміжних лише у вершинах з множини $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Припустимо, що в початковій матриці ваг $c_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, 2, 3, ..., n$ і $c_{ii} = \infty$, якщо у графі відсутня дуга (x_i, x_j). Присвоюємо початкові значення.

Крок 1. Покладемо, що $k=0$.

Крок 2. $k=k+1$.

Крок 3. Для усіх $i \neq k$, таких, що $c_{ik} \neq \infty$ і для всіх $j \neq k$, таких, що $c_{kj} \neq \infty$ вводимо операцію

$$c_{ij} = min[c_{ij}, (c_{ik} + c_{kj})]. \tag{1}$$

Крок 4.

Якщо $c_{ii} < 0$, то в графі *G* існує цикл від'ємної ваги, що містить вершину x_i і розв'язку немає. Закінчення.

Якщо $c_{ii} > 0$ і $k=n$, то отримано розв'язок. Матриця $[c_{ij}]$ дає довжину всіх найкоротших шляхів. Закінчення.

Якщо $c_{ii} \geq 0$, але $k<n$, то повернутися до кроку 2.

Самі ж найкоротші шляхи можна знайти за заданими довжинами за допомогою рекурсивної процедури. При цьому як доповнення до вагової матриці *C* зберігається та оновлюється друга $(n \times n)$ матриця $\Theta=[\theta_{ij}]$. Елемент θ_{ij} вказує вершину, що є попередньою вершині x_j у найкоротшому шляху від x_i до x_j.

У відповідності до формули (1), на кроці 3 алгоритму оновлення матриці відбувається таким чином:

$$\theta_{ij} = \begin{cases} \theta_{k,j}, \text{якщо}\,(c_{ik} + c_{kj}) < c_{ij}, \text{що визначається у} \\ \text{квадритних дужках формули}\,(1); \\ \text{не змінюється, якщо}\, c_{ij} \leq (c_{ik} + c_{kj}). \end{cases} \tag{2}$$

У кінці алгоритму найкоротші шляхи отримуємо безпосередньо із завершальної матриці Θ.

Знаходження центру топологічної структури. Для кожної вершини $x_i \in X$ визначено два числа, які називаються передавальними числами:

$$\sigma_o(x_i) = \sum_{x_j \in X} v_j \cdot d(x_i, x_j);\ \sigma_t(x_i) = \sum_{x_j \in X} v_j \cdot d(x_j, x_i), \tag{3}$$

де $d(x_i, x_j)$ – найменша відстань від вершини x_i до вершини x_j, $\sigma_o(x_i)$ – зовнішнє передавальне число, $\sigma_t(x_i)$ – внутрішнє передавальне число.

Вершина $\overline{x}_o$, для якої виконується умова (4), називається зовнішньою медіаною графа [6, с. 127–129].

$$\sigma_o(\overline{x}_o) = \min_{x_i \in X}\left[\sigma_o(x_o)\right]. \tag{4}$$

Вершина $\overline{x}_t$, для якої виконується умова (3), називається внутрішньою медіаною графа [6, с. 127–129].

$$\sigma_o(\overline{x}_t) = \min_{x_i \in X}\left[\sigma_t(x_t)\right]. \tag{5}$$

Якщо *D(G)* – матриця найменших відстаней (км) між будь-якими двома точками графа, то потрібним місцем розміщення складу буде така вершина, для якої сума зовнішніх та внутрішніх передавальних чисел буде найменшою. Вершина $\overline{x}_{o,t}$ називається зовнішньо-внутрішньою медіаною. Таким чином, визначаються одиночні медіани.

Існує поняття р-медіани. Нехай X_p – підмножина множини вершин *X* графа *G*, припустимо, що X_p містить *p* вершин. Тоді маємо наступні співвідношення:

$$d(X_p, x_j) = \min_{x_i \in X_p}\left[d(x_i, x_j)\right];\ d(x_j, X_p) = \min_{x_i \in X_p}\left[d(x_i, x_j)\right]. \tag{6}$$

Передавальні числа множини вершин X_p визначаються так само, як і для одиночних вершин:

$$\sigma_o(X_p) = \sum_{x_j \in X} v_j \cdot d(X_p, x_j);\ \sigma_t(X_p) = \sum_{x_j \in X} v_j \cdot d(x_j, X_p), \tag{7}$$

де $\sigma_o(X_p)$, $\sigma_t(X_p)$ – відповідно, зовнішнє, внутрішнє передавальне число.

Множина $\overline{X}_{po}$, для якої

$$\sigma_o(\overline{X}_{po}) = \min_{X_p \subseteq X}\left[\sigma_o(X_p)\right], \tag{8}$$

є зовнішньою р-медіаною графа *G*; аналогічно визначається внутрішня р-медіана [6, с. 129–132].

Знаходження довжини замкненого маршруту. Маємо граф *G*(*V*,*E*), де множина $V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ – пункти, в які доставляються корми, а множина $E = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ – шляхи, що з'єднують указані пункти. Відстані між пунктами задаються матрицею $L = \|l_{ij}\|$ [6, с. 131–137].

Гамільтоновим циклом (або контуром графа) називається шлях, що проходить через усі вершини графа рівно по одному разу [7, с. 302–304; 8, с. 304–306].

Для знаходження гамільтонового циклу у задачі введемо матрицю суміжності $S = \|s_{ij}\|$ порядку *n*, де

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, \text{вершини } v_i \text{ та } v_j \text{ з'єднані ребром}; \\ 0 - \text{у противному випадку}. \end{cases} \tag{9}$$

Уведемо змінні $x_{ij}\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\right)$, де

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 - \text{гамільтоновий цикл містить перехід} \\ \quad \text{з вершини } v_i \text{ у } v_j; \\ 0 - \text{у противному випадку}. \end{cases} \tag{10}$$

Критерій матиме вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot x_{ij} = n\ . \tag{11}$$

За формулою (11) обчислюється кількість переходів між вершинами. У шуканому циклі повинно бути стільки ж переходів, скільки вершин у графі.

Уведемо обмеження в моделі. У кожну вершину гамільтонового циклу повинен бути один вхід (12).

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ik} \cdot x_{ik} = 1, k = \overline{1,n}. \qquad (12)$$

З кожної вершини гамільтонового циклу повинен бути один вихід (13).

$$\sum_{j=1}^{n} s_{kj} \cdot x_{kj} = 1, k = \overline{1,n}\ . \qquad (13)$$

Кожне ребро графа не може бути присутнім у гамільтоновому циклі двічі (14).

$$x_{ij} + x_{ji} \le 1, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}; \qquad (14)$$

$$0 \le x_{ji} \le 1, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \qquad (15)$$

Довжину замкненого маршруту обчислимо за формулою (16):

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} l_{ij} \cdot x_{ij}\ . \qquad (16)$$

Розв'язання задачі. Практичні розрахунки за даною моделлю проводилися у додатку Excel. Спочатку знаходилися найкоротші шляхи між будь-якими двома вершинами графа G за допомогою алгоритма Флойда. Результатом розрахунків є матриця найкоротших відстаней (рис. 2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
99											
100		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
101	1	0	10	11	16	14	12	10	9	11	
102	2	10	0	8	17	19	19	20	12	11	
103	3	11	8	0	9	16	16	20	9	3	
104	4	16	17	9	0	7	14	19	9	6	
105	5	14	19	16	7	0	7	12	7	13	
106	6	12	19	16	16	7	0	18	7	13	
107	7	10	20	20	20	12	18	0	11	17	
108	8	9	12	9	9	7	7	11	0	6	
109	9	11	11	3	6	13	13	17	6	0	к=9

Рис. 2. Матриця найкоротших відстаней графа

Визначаємо зовнішнє та внутрішнє передавальне число (рис. 3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
111												
112		1	2	3	4	5	6	7	8	9		
113	1	0	10	11	16	14	12	10	9	11	93	
114	2	10	0	8	17	19	19	20	12	11	116	
115	3	11	8	0	9	16	16	20	9	3	92	
116	4	16	17	9	0	7	14	19	9	6	97	
117	5	14	19	16	7	0	7	12	7	13	95	
118	6	12	19	16	16	7	0	18	7	13	108	
119	7	10	20	20	20	12	18	0	11	17	128	
120	8	9	12	9	9	7	7	11	0	6	70	
121	9	11	11	3	6	13	13	17	6	0	80	70
122		93	116	92	100	95	106	127	70	80		
123										70		

Рис. 3. Визначення зовнішнього та внутрішнього перевального числа

Зовнішньою медіаною графа є вершина 8, оскільки число 70 – найменше передавальне счисло. Внутрішньою медіаною графа є вершина 8, оскільки число 70 – найменше передавальне счисло. Зовнішня та внутрішня медіани співпадають. Якщо врахувати поголів'я худоби в кожному фермерському господарстві, а саме надати вагу кожній вершині графа, то отримаємо наступну матрицю (рис. 4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
137		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
138	1	0	13	8,8	15,2	21	17,16	12,7	7,65	12,76	108,27
139	2	12	0	6,4	16,15	28,5	27,17	25,4	10,2	12,76	138,58
140	3	13,2	10,4	0	8,55	24	22,88	25,4	7,65	3,48	115,56
141	4	19,2	22,1	7,2	0	10,5	20,02	24,13	7,65	6,96	117,76
142	5	16,8	24,7	12,8	6,65	0	10,01	15,24	5,95	15,08	107,23
143	6	14,4	24,7	12,8	15,2	10,5	0	22,86	5,95	15,08	121,49
144	7	12	26	16	19	18	25,74	0	9,35	19,72	145,81
145	8	10,8	15,6	7,2	8,55	10,5	10,01	13,97	0	6,96	83,59
146	9	13,2	14,3	2,4	5,7	19,5	18,59	21,59	5,1	0	100,38
147											83,59

Рис. 4. Визначення зовнішнього передавального числа

Отже, оптимальне розміщення складу буде у фермерському господарстві № 8.

Для розв'язання задачі знаходження довжини замкненого маршруту топологічної структури використовується «Пошук розв'язків» середовища програми Microsoft Excel.

Знайдено наступний замкнений маршрут: 8→7→5→6→1→4→9→3→2→8. Довжина замкненого маршруту становить 85 км.

Висновки. Побудовано теоретико-графову модель визначення оптимального місця розташування складу запасів кормів СТОВ «Воскобійники».

Із метою економії пального, коштів для виробництва визначено серед дев'яти фермерських господарств, що розташовані в різних населених пунктах, таке оптимальне розміщення складу запасів кормів СТОВ «Воскобійники», щоб сума найкоротших відстаней від нього до споживачів, яку проходить транспорт, була б мінімально можливою. Оптимальне розміщення складу буде у фермерському господарстві № 8.

Модель знаходження центру враховує зміну середовища, тому при розширенні чи скороченні СТОВ «Воскобійники» алгоритм можна застосувати знову, використовуючи нові показники.

Побудовано графову модель визначення довжин такого замкненого маршруту, що проходить через кожний пункт лише один раз із поверненням на склад.

При розв'язанні поставленої задачі використано метод 0-1 лінійного програмування.

Розглянутий метод має обмеження, пов'язане з обмеженням кількості змінних комірок в Excel, яких не може бути більше ніж 200.

Отримані результати моделювання можуть бути рекомендовані для планування виробничого процесу СТОВ «Воскобійники».

Дана задача може бути використана в навчальному процесі на кафедрі економічної кібернетики при викладанні дисциплін «Топологія економічних структур: аналіз та моделювання», «Математичне моделювання».

Список літератури:

1. Мельник І.М. Графофий підхід до побудови економетричної моделі як задачі цілочисельного програмування / І.М. Мельник, В.С. Степашко // Економіко-математичне моделювання соціальних систем. – 2004. – Вип. 8. – С. 49–56.
2. Парубець О.М. Моделювання мережевих структур на транспорті з використанням елементів теорії графів / О.М. Парубець // Глобальні та національні проблеми економіки. – 2015. – Вип. 3 – С. 380–383.
3. Штангрет А.М. Моделювання загроз для економічної безпеки підприємств авіаційної галузі / А.М. Штангрет // Ефективна економіка. – 2011. – № 5 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=562.
4. Ніколаєва К.В. Дискретний аналіз. Графи та їхнє застосування в економіці : [навч.-метод. посіб.] / К.В. Ніколаєва, В.В. Койбічук. – Суми: УАБС НБУ, 2007. – 84 с.
5. Климко О.Г. Застосування апарату теорії графів до вдосконалення функціонування торгівельної мережі / О.Г. Климко, М.С. Вольна [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.rusnauka.com/18_ADEN_2013/Economics/11_141857.doc.htm.
6. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М. : МИР, 1978. – 429 с.

7. Бардачов Ю.М. Дискретна математика : [підручник] / Ю.М. Барбачов, Н.А. Соколова, В.Є. Ходаков ; за ред. В.Є. Ходакова ; 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Вища шк., 2007. – 383 с.
8. Бондаренко М.Ф. Ком'ютерна дискретна математика : [підручник] / М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас. – Х. : СМІТ, 2004. – 480 с.

Кобец С. П.
Скрыльник И. И.
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Резюме
Рассмотрено построение теоретико-графовых моделей для оптимального управления экономическими объектами, в частности оптимального размещения склада запасов кормов СООО «Воскобойники», и определения длины такого замкнутого маршрута, который проходит через каждый пункт только один раз с возвращением на склад. По результатам моделирования выполнены расчёты в системе Excel. Полученные теоретико-графовые модели были использованы при изучении оптимального функционирования данного экономического объекта.
Ключевые слова: граф, теоретико-графовая модель, медиана графа, ребро графа, передаточные числа.

Kobets S. P.
Skrylnikov I. I.
Poltava National Technical University named after Yuriy Kondratyuk

APPLICATION OF GRAPH THEORY FOR OPTIMAL CONTROL OF ECONOMIC OBJECTS

Summary
The article discusses the construction of graph-theoretic models for optimal management of economic entities, in particular the optimal placement of feed stocks warehouse JV «Voskoboynikov» and determine the length of the closed route, which passes through each item only once to return to the warehouse. According to the simulation results of the calculations are made in Excel. The resulting graph-theoretic models were used in the study of optimal functioning economic entity.
Keywords: graph, graph-theoretic model, the median graph, an edge, gear ratios.