ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 121–131

М Е Х А Н І К А

Mathematical Subject Classification: 74R10
УДК 539.3

О. Ф. Кривий
Одеська національна морська академія

ТУНЕЛЬНЕ ВКЛЮЧЕННЯ ПРИ ЗМІШАНИХ УМОВАХ ВЗАЄМОДІЇ ІЗ КУСКОВО-ОДНОРІДНИМ АНІЗОТРОПНИМ ПРОСТОРОМ

Кривий О. Ф. Тунельне включення при змішаних умовах взаємодії із кусково-однорідним анізотропним простором. Розглянуто задачу про тунельне жорстке включення, що виходить одним кінцем в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів, які знаходяться в умовах узагальненої плоскої деформації. На включенні реалізовані змішані умови контактної взаємодії: зчеплене однією гранню із середовищем і знаходиться в умовах гладкого контакту на іншій грані. За допомогою побудованого розривного розв'язку задачу зведено до системи п'яти сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомою особливістю. Встановлені умови існування і асимптотики розв'язків вказаної системи. Отримані залежності показників особливостей напружень в вершині включення від його розташування і анізотропних властивостей півпросторів.
Ключові слова: кусково-однорідний анізотропний простір, включення, розривний розв'язок, сингулярні інтегральні рівняння, нерухома особливість.

Кривой А. Ф. Туннельное включение при смешанных условиях взаимодействия с кусочно-однородным анизотропным пространством. Рассмотрена задача о туннельном включении, выходящем одним концом в плоскость соединения двух различных анизотропных полупространств, находящихся в условиях обобщенной плоской деформации. На включении реализованы смешанные условия контактного взаимодействия: сцепление одной из граней со средой и гладкий контакт другой. С помощью построенного разрывного решения задачи сведены к системе пяти сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Установлены условия разрешимости и асимптотика решений указанной системы. Получены зависимости показателей напряжений в вершине включения от его положения и анизотропных свойств полупространств.
Ключевые слова: кусочно-однородное анизотропное пространство, включение, разрывное решение, сингулярные интегральные уравнения, неподвижная особенность.

Kryvyy O. F. Tunnel inclusion in mixed conditions of interaction with piecewise homogeneous anisotropic space. The problem of the tunnel inclusion that goes on one end to the splice plane of the of two different anisotropic half spaces in situations of generalized plane strain. Implemented to enable mixed conditions of contact interaction: cohesion one of the faces with the medium and sleek contact with the other. With the constructed of discontinuous solution problems are reduced to a system of a system of five singular integral equations with fixed singularity. Establishes the conditions the solvability and the asymptotic behavior of solutions of this system. The dependencies of stress exponent

at the apex of inclusion of its provisions and the anisotropic properties of half-spaces.
Key words: inhomogeneous anisotropic spaces, crack, inclusion, discontinuous solution, singularity equations, fixed singularity cohesion.

Вступ. Задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах розглядали багато авторів. При цьому дослідження, в основному, обмежувались плоскими випадками [1-6]. В роботах [7-9] за допомогою побудованих інтегральних сингулярних співвідношень досліджені міжфазні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі, яке знаходиться в двовимірному стані (узагальнена плоска деформація ([10]). В цій праці вказаний метод узагальнено на випадок внутрішнього тунельного включення. Зокрема побудовано розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного простору за наявності внутрішніх дефектів і інтегральні співвідношення, що зв'язують стрибки і суми переміщень та напружень на вказаних дефектах в просторі узагальнених функцій повільного зростання. В результаті задача про тунельне включення, яке виходить під довільним кутом в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів і перебуває в умовах повного зчеплення на одній із граней і умовах гладкого контакту на іншій, зведена до системи п'яти сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з нерухомими особливостями. Обґрунтовано існування і виявлена асимптотика поведінки розв'язків отриманих систем СІР. Отримані залежності показників особливостей напружень в вершинах включення від анізотропних властивостей матеріалів і кута нахилу включення.

Основні результати.

1. Побудова розривного розв'язку для кускво-однорідного анізотропного середовища. Нехай простір, який складений із двох різних анізотропних півпросторів, з'єднаних в площині $x = 0$, знаходиться в двовимірному стані, без наявності площин пружної симетрії, тобто в умовах узагальненої плоскої деформації [10]. В просторі містяться довільні кусково-неперервні циліндричні поверхні, напрямні яких паралельні осі OZ, в результаті перетину останніх площиною XOY утворюється кусково-неперервний контур ℓ. На вказаних поверхнях розташовані наскрізні дефекти загальної природи (типу тріщин, відшарованих і не відшарованих включень). Виходячи із рівняння рівноваги та узагальненого закону Гука, відносно компоненти тензора напружень та вектора переміщень:

$$\overrightarrow{\eta} = \{\eta_k(x,y)\}_{k=1}^{8} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, u, v, w\}, \tag{1}$$

отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь

$$D[x, \partial_1, \partial_2]\overrightarrow{\eta} = f, x \neq 0, (x,y) \notin l, \tag{2}$$

де

$$D[x, \partial_1, \partial_2] = \left\| \begin{array}{cc} D_* & O_{3\times 3} \\ -B(x) & D_*^{\mathrm{T}} \end{array} \right\|, \; B(x) = \{\beta_{kj}(x)\}_{j,k=1}^{5}, \beta_{kj}(x) = \begin{cases} \beta_{kj}^{+}, x > 0, \\ \beta_{kj}^{-}, x < 0. \end{cases}$$

$$D_* = \left\| \begin{array}{ccccc} \partial_1 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{array} \right\|, \partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

$f = \{ -X_0,\ -Y_0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\}$, $\beta_{kj}^{\pm}$ — коефіцієнти узагальненого закону Гука відповідно для верхнього та нижнього півпросторів, X_0, Y_0 проекції об'ємних сил на відповідні осі. Нормальні напруження σ_z при цьому визначимо за формулою $\sigma_z = -\beta_{66}^{-1}\sum_{j=1}^{5}\beta_{6j}v_j$. В площинні $x=0$ вважаємо виконаними умови неперервності:

$$\chi^{-} = 0, \tag{3}$$

де $\chi^{-} = \left\{\chi_k^{-}(y)\right\}^6 = \{\langle\eta_1\rangle^{-}, \langle\eta_3\rangle^{-}, \langle\eta_4\rangle^{-}, \langle\eta_6\rangle^{-}, \langle\eta_7\rangle^{-}, \langle\eta_8\rangle^{-}\}$, $\langle\eta_k\rangle^{-}$ — стрибки функцій η_k при переході площини $x=0$. Для подання умов на лінії ℓ, де можливі розриви всіх компонент вектора $\vec{\eta}$, введемо в кожній точці лінії ℓ локальну систему координат (N,S,Z). Напрямок осі S співпадає з напрямком дотичного вектора s до лінії ℓ в даній точці, напрямок осі N співпадає з напрямком нормального вектора n, який вибирається зліва від дотичного вектора, вісь Z залишається незмінною. Кут між осями X і N позначимо $\phi = \phi(x,y),\ (x,y)\in\ell$. В новій системі координат компоненти тензора напружень та вектора переміщень позначимо так:

$$\overrightarrow{\eta}_{\ell} = \{\tilde{\eta}_k(x,y)\}_{k=1}^{8} = \{\sigma_{\mathrm{N}},\ \sigma_{\mathrm{S}},\ \tau_{\mathrm{NS}},\ \tau_{\mathrm{NZ}},\ \tau_{\mathrm{SZ}},\ u_{\mathrm{N}},\ v_{\mathrm{S}},\ w_{\mathrm{Z}}\}. \tag{4}$$

В залежності від виду контактної взаємодії дефектів із простором на лінії ℓ будуть відомі шість із наступних величин: $\tilde{\chi}^{\pm} = \{\tilde{\chi}_k^{\pm}\}_{k=1}^{6}$, де $\tilde{\chi}_k^{\pm} = \langle\tilde{\chi}_k\,(x,y)\rangle_{\ell}^{\pm}$ — відповідно стрибки і суми функцій (4). Для визначеності будемо вважати відомими на лінії ℓ стрибки:

$$\langle\tilde{v}_k\rangle_{\ell}^{-} = \tilde{\chi}_k^{-}(x,y),\ k=\overline{1,8},\ k\neq 2,5,\ \ (x,y)\in\ell. \tag{5}$$

Розв'язки крайової задачі (2), (3), (5), при виконані умов $X_0,\, Y_0 \in C_{0,\ell}^{1}(\mathbb{R}^2)\cap$ $\cap L_1(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{\chi}_k^{\pm}(x,y)\in C_*(\ell)\cap L_1(\ell)\,, \chi_{k0}^{\pm}(y)\in C_*(\mathbb{R})\cap L_1(\mathbb{R})$, слід розшукувати в класі $C_{0,\ell}^{1}(\mathbb{R}^2)\cap L_1(\mathbb{R}^2)$, де $C_{0,\ell}^{m}$ — простір функцій, неперервних разом зі всіма похідними до m-порядку в $\mathbb{R}^2$, за виключенням прямої $x=0$ і лінії ℓ, $L_1(\mathbb{R}^2)$ — простір інтегрованих в $\mathbb{R}^2$ функцій, $C_*(\ell)\,, L_1(\ell)$ — простори відповідно кусково-неперервних та інтегрованих на ℓ функцій.

Продовжимо систему (2) на весь простір, для цього перейдемо до простору узагальнених функцій повільного зростання $\Im'(\mathbb{R}^2)$ і врахуємо зв'язок між узагальненими і звичайними похідними $\partial_k\eta_j = \tilde{\partial}_k\eta_j - \chi_j^{-}(x,y)(-1)^{k+1}\kappa_k\delta(\ell)$, де $\delta(\ell)$ — функція Дірака зосереджена на контурі ℓ, χ_j^{-} — стрибки функцій η_j на контурі ℓ, а також формули зв'язку між компонентами векторів $\vec{\eta}$ і $\vec{\eta}_{\ell}$ [11]. В результаті відносно вектору $\vec{\eta}$ в просторі $\Im'(\mathbb{R}^2)$ отримаємо крайову задачу

$$\left(D[x,\tilde{\partial}_1,\tilde{\partial}_2]\vec{\eta},q\right) = (f_*,q)\,,\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ q\in\Im(\mathbb{R}^2), \tag{6}$$

$$\eta_k^{+} = \eta_k^{-},\ k=1,3,4,6,7,8, \tag{7}$$

де

$$v_k^{\pm}\in\Im_{\pm}'(\mathbb{R}^2), f_* = \{f_{j*}\}^8, f_{1*} = \left(\tilde{\chi}_1^{-}\kappa_1 + \tilde{\chi}_2^{-}\kappa_2\right)\delta(\ell) - X_0,$$

$$f_{2*} = \left(-\tilde{\chi}_1^{-}\kappa_2 + \tilde{\chi}_2^{-}\kappa_1\right)\delta(\ell) - Y_0, f_{3*} = \tilde{\chi}_3^{-}\delta(\ell), f_{8*} = -\tilde{\chi}_6^{-}\kappa_2\delta(\ell),$$

$$f_{4*} = (\tilde{\chi}_4^{-}\kappa_1 + \tilde{\chi}_5^{-}\kappa_2)\kappa_1\delta(\ell), f_{5*} = (\tilde{\chi}_4^{-}\kappa_2 - \tilde{\chi}_5^{-}\kappa_1)\kappa_2\delta(\ell), \kappa_1 = \cos\phi,$$

$$f_{6*}=(\tilde{\chi}_5^-(\kappa_1^2-\kappa_2^2)-2\kappa_1\kappa_2\tilde{\chi}_4^-)\delta(\ell), f_{7*}=\tilde{\chi}_6^-\kappa_1\delta(\ell), \kappa_2=\sin\phi,$$
$$\Im'_{\pm}(\mathbb{R}^2)=\{f^{\pm}\in\Im'(\mathbb{R}^2)\,|\text{supp } f^{\pm}=\mathbb{R}_{\pm}\times\mathbb{R}\}.$$

Розв'язки крайової задачі (6), (7), слідуючи роботам [12, 7–9], будемо називати *розривним розв'язком для кусково-однорідного анізотропного середовища* в просторі $\Im'(\mathbb{R}^2)$. Останній отримаємо, спираючись на фундаментальний розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного простору, тобто на систему векторів $w_j=\{w_{kj}(x,y,x_0,y_0)\}_{k=\overline{1,8}}$, $w_{kj}\in\Im'(\mathbb{R}^2)$, $j=\overline{1,8}$, яка задовольняє наступній системі крайових задач:

$$D[x,\tilde{\partial}_1,\tilde{\partial}_2]w_j=f_{0j}, j=\overline{1,8} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \tag{8}$$

$$w_{kj}^+=w_{kj}^-,\ k=\overline{1,8}, k\neq 2, k\neq 5, \tag{9}$$

де $w_{kj}^{\pm}\in\Im'_{\pm}(\mathbb{R}^2)$,$f_{0j}=\{f_{kj}^0\}^8=\{\delta_{kj}\}^8\delta(x-x_0,y-y_0),\cdots(x_0,y_0)\neq 0$, δ_{nj} — символ Кронекера.

Компоненти векторів w_j належать підпростору [6] $\Im'_0(\mathbb{R}^2)$, отже, застосувавши до (8) двовимірне перетворення Фур'є і скориставшись результатами робіт [7–9], відносно $\mathrm{W}_{kj}^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathrm{F}_2\left[w_{kj}^{\pm}\right]\in\Omega'_{\pm,-1}(\mathbb{R}^2)$, отримаємо за змінною α_1 матричну крайову задачу Рімана в просторі $\Im'(\mathbb{R}^2)$:

$$M_+(-i\alpha_1,-i\alpha_2)\,W_j^+=M_-(-i\alpha_1,-i\alpha_2)\,W_j^++f_{*j}, \quad j=\overline{1,8}, \tag{10}$$

де $M_{\pm}=\pm D\left[\pm 0,-i\alpha_1,-i\alpha_2\right], W_j^{\pm}=\left\{\mathrm{W}_{kj}^{\pm}\right\}^8,\ f_{*j}=\{\delta_{kj}e_0^*\}^8, e_0^*=e^{i\alpha_1x_0+i\alpha_2y_0}$.

Враховуючи поліноміальний вид коефіцієнтів задачі (10), застосуємо до її розв'язування метод, поданий в роботах [6–7], в результаті отримаємо

$$W_{kj}=W_{kj}^++W_{kj}^-,\ k=\overline{1,8},\ j=\overline{1,8}, \tag{11}$$

де $(W_{kj}^{\pm}=(-i\alpha_2)W_{kj}^{\pm},\ k=6,7,8), W_{kj}^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{\mathrm{P}_6^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2)}\sum_{p=1}^8 i^{\theta_1}r_{kp}^{\pm}t_{pj}^{\pm}$,

$$\mathrm{P}_6^{\pm}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathrm{P}_4^{\pm}\mathrm{P}_2^{\pm}-\left(\mathrm{P}_3^{\pm}\right)^2,\ \mathrm{P}_2^{\pm}=\beta_{44}^{\pm}\alpha_2^2-2\beta_{45}^{\pm}\alpha_1\alpha_2+\beta_{55}^{\pm}\alpha_1^2,$$

$$\mathrm{P}_3^{\pm}=\beta_{14}^{\pm}\alpha_2^3-(\beta_{15}^{\pm}+\beta_{34}^{\pm})\alpha_1\alpha_2^2+(\beta_{24}^{\pm}+\beta_{35}^{\pm})\alpha_1^2\alpha_2-\beta_{25}^{\pm}\alpha_1^3,$$
$$\mathrm{P}_4^{\pm}=\beta_{11}^{\pm}\alpha_2^4-2\beta_{13}^{\pm}\alpha_1\alpha_2^3+(\beta_{33}^{\pm}+2\beta_{12}^{\pm})\alpha_1^2\alpha_2^2-2\beta_{23}^{\pm}\alpha_1^3\alpha_2+\beta_{22}^{\pm}\alpha_1^4,$$

$$r_{kp}^{\pm}=h_k^{\pm}\lambda_{p,l}^{\pm},\ k=\overline{1,5},\ p=\overline{1,8},\ l=\begin{cases}1, & k=1,2,3\\ 2, & k=4,5,\end{cases},\theta_1=\begin{cases}1,p=\overline{1,3}\\ 0,p=\overline{4,8}\end{cases},$$

$$\lambda_{1l}^{\pm}=\alpha_1^{-1}(g_j^{\pm}\mathrm{P}_{l+2}^{\pm}-\ell_j^{\pm}\mathrm{P}_{l+1}^{\pm}),\lambda_{jl}^{\pm}=\alpha_2^{-1}(g_5^{\pm}\mathrm{P}_{l+2}^{\pm}-\ell_5^{\pm}\mathrm{P}_{l+1}^{\pm}),j=1,3,$$

$$\lambda_{5l}^{\pm}=-\,\alpha_2^2\mathrm{P}_{l+1}^{\pm},\ \lambda_{6l}^{\pm}=-\alpha_1\alpha_2\mathrm{P}_{l+1}^{\pm},\ \lambda_{7l}^{\pm}=\alpha_2\mathrm{P}_{l+2}^{\pm},\lambda_{8l}^{\pm}=-\alpha_1\mathrm{P}_{l+2}^{\pm},l=1,2,$$

$$r_{6j}^{\pm}=\alpha_1^{-1}\alpha_2(\lambda_{j1}^{\pm}\ell_1^{\pm}-\lambda_{j2}^{\pm}g_1^{\pm}),\ r_{7j}^{\pm}=\lambda_{j1}^{\pm}\ell_2^{\pm}-\lambda_{j2}^{\pm}g_2^{\pm},r_{8j}^{\pm}=\lambda_{j1}^{\pm}\ell_5^{\pm}-\lambda_{j2}^{\pm}g_5^{\pm},$$

$$h_1^{\pm}=\alpha_2^2,\ h_2^{\pm}=\alpha_1^2,\ h_3^{\pm}=-\alpha_1\alpha_2,\ h_4^{\pm}=-\alpha_2,h_5^{\pm}=\alpha_1,\lambda_{4l}^{\pm}=\alpha_2^2\mathrm{P}_{l+1}^{\pm},$$

$$\ell_k^{\pm}=\beta_{1k}^{\pm}\alpha_2^2-\beta_{3k}^{\pm}\alpha_1\alpha_2+\beta_{2k}^{\pm}\alpha_1^2,\ g_k^{\pm}=\beta_{4k}^{\pm}\alpha_2-\beta_{5k}^{\pm}\alpha_1,\ k=\overline{1,5}.$$

$$\{t_{kj}^{\pm}\}_{k=\overline{1,8}} = \theta(\pm x_0) e_0^* \{\delta_{kj}\}_{k=\overline{1,8}} \mp \frac{1}{2} f_0^*, \; j = \overline{1,8},$$

$$f_0^* = \{\chi_{10}(\alpha_2), \chi_{30}(\alpha_2), \chi_{40}(\alpha_2), \chi_{60}(\alpha_2), 0, \chi_{70}(\alpha_2), \chi_{80}(\alpha_2), 0\}.$$

Для визначення невідомих функцій $\chi_{k0}(\alpha_2)$ скористаємося умовами (9). Після обернення (11), вирази компонент фундаментальних розривних розв'язків для кусково-однорідного анізотропного простору подамо так:

$$w_{kj}(x, y, x_0, y_0) = \theta(x) w_{kj}^{+} + \theta(-x) w_{kj}^{-}, \;\; k = \overline{1,8}, \; j = \overline{1,8}, \tag{12}$$

де

$$w_{kj}^{+} = \tfrac{2}{\pi} Im \textstyle\sum_{n=1}^{3} \{\theta(x_0) \bar{R}_{kjn}^{+} \mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^{+} - \bar{\xi}_{n0}^{+}] + \sum_{m=1}^{3} [\theta(x_0) \beta_{kjnm}^{++} \mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^{+} - \xi_{m0}^{+}] +$$
$$+\theta(-x_0) \beta_{kjnm}^{+-} \mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^{+} - \bar{\xi}_{m0}^{\pm}]]\},$$

$$w_{kj}^{-} = \tfrac{2}{\pi} Im \textstyle\sum_{n=1}^{3} \{\theta(-x_0) \bar{R}_{kjn}^{-} \mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^{-} - \bar{\xi}_{n0}^{-}] + \sum_{m=1}^{3} [\theta(x_0) \beta_{kjnm}^{-+} \mathrm{K}_{kj}[\xi_n^{-} - \xi_{m0}^{+}] +$$
$$+\theta(-x_0) \beta_{kjnm}^{--} \mathrm{K}_{kj}[\xi_n^{-} - \bar{\xi}_{m0}^{-}]]\},$$

$$\mathrm{K}_{kj}[f] = f^{-1}, (k = \overline{1,5}; j = \overline{1,3}) \bigcup (k = \overline{6,8}; j = \overline{4,8}), \xi_m^{\pm} = z_m^{\pm} x + y,$$

$$\mathrm{K}_{kj}[f] = -f^{-2}, (k = \overline{1,5}; j = \overline{4,8}), \mathrm{K}_{kj}[f] = \ln f, (k = \overline{6,8}; j = \overline{1,3}),$$

$$\alpha_{pjn}^{+} = \sum_{k=1}^{6} a_{kp}^{*} R_{kjn}^{0,+}, \;\; \alpha_{pjn}^{-} = \sum_{k=1}^{6} a_{kp}^{*} \bar{R}_{kjn}^{0,-}, \;\; \beta_{kjmn}^{+\pm} = \sum_{p=1}^{6} \alpha_{pjm}^{\pm} \bar{\mathrm{N}}_{kpn}^{+}, \;\; \mathrm{R}_{kp}^{\pm} = \sum_{n=1}^{3} R_{kpn}^{\pm},$$

$$\beta_{kjnm}^{-\pm} = \sum_{p=1}^{6} \alpha_{pjn}^{\pm} \mathrm{N}_{kpm}^{-}, \; \xi_{m0}^{\pm} = z_m^{\pm} x_0 + y_0, \left\{R_{kjm}^{0,\pm}\right\}_{k=\overline{1,6}} = \left\{R_{kjm}^{\pm}\right\}_{k=1,3,4,6,7,8},$$

$$R_{kpn}^{\pm} = \frac{r_{kp}^{\pm}(z_n^{\pm}, 1)}{\beta_0^{\pm} q_n^{\pm}(z_n^{\pm}) \bar{q}_n^{\pm}(z_n^{\pm})}, q_n^{\pm}(z_n^{\pm}) = \prod_{l=1,\, l \neq n}^{3} (z_n^{\pm} - z_l^{\pm}), \bar{q}_n^{\pm}(z_n^{\pm}) = \prod_{l=1}^{3} (z_n^{\pm} - \bar{z}_l^{\pm}),$$

$$\mathrm{P}_6^{\pm}(z_n^{\pm}, 1) \equiv 0, \;\; \beta_0^{\pm} = \beta_{22}^{\pm} \beta_{55}^{\pm} - (\beta_{25}^{\pm})^2,$$

$$N^{\pm} = \left\{ \sum_{n=1}^{3} \mathrm{N}_{kpn}^{\pm} \right\}^{6} = \left\{ \sum_{n=1}^{3} R_{kpn}^{\pm} \right\}_{k=1,3,4,6,7,8}^{p=1,2,3,4,6,7}.$$

Знайдені вирази (12) дають змогу, скориставшись теоремою про згортку, отримати розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного середовища:

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{8} w_{kj} * f_{j*} = \sum_{j=1}^{8} \iint_{\mathbb{R}^2} w_{kj}(x, y, x_0, y_0) f_{j*}(x_0, y_0) dx_0 dy_0. \tag{13}$$

Подання (13) містить шість стрибків $\tilde{\chi}_k^{-}$, $k = \overline{1,6}$ компонент тензора напружень та вектора переміщень, зосереджених на контурі ℓ. Частина із яких, в залежності від типу дефекту, виявляються невідомими функціями. Для їх визначення, скориставшись формулами Сохотського, отримаємо інтегральні співвідношення, що зв'язують стрибки та суми $\tilde{\chi}^{\pm} = \{\tilde{\chi}_k^{\pm}\}_{k=1}^{6}$ на контурі ℓ. Зокрема, якщо контур ℓ є об'єднанням відрізків, розташованих вздовж прямої, яка проходить через початок координат під кутом ϕ до осі OX: $\ell = \bigcup_{j=1}^{r}(a_j; b_j)$, тобто: $x = t\cos\phi$, $x_0 = \tau\cos\phi$, $y = t\sin\phi$, $y_0 = \tau\sin\phi$, $\tilde{\chi}_k^{\pm}(x,y) = \tilde{\chi}_k^{\pm}(t), (k = \overline{1,6})$, $\tilde{\chi}_k^{\pm}(t) = (\tilde{\chi}_k^{\pm}(t))', (k = \overline{4,6})$, вказані співвідношення подамо так:

$$\tilde{\chi}_k^{+}(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{6}\int_{\ell}\tilde{\chi}_j^{-}(\tau)\left[\frac{\Upsilon_{kj}(t)}{t-\tau} + Im\sum_{n,m=1}^{3}\frac{\mathrm{B}_{kjnm}}{te_{mn}-\tau}\right]d\tau, \quad t\in\ell, \ \ k=\overline{1,6}, \tag{14}$$

де

$$\Upsilon_{kj}^{\pm} = 4Im\sum_{n=1}^{3}\frac{H_{jkn}^{\pm}}{\left(\bar{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}},\ B_{kjmn}^{\pm+} = \frac{b_{kjnm}^{\pm+}}{\left(\bar{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}},\ B_{kjmn}^{\pm-} = \frac{b_{kjnm}^{\pm-}}{\left(\bar{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}}, \delta_* = \left\{\begin{array}{l} 1, j=\overline{1,3} \\ 2, j=\overline{4,6}\end{array}\right.,$$

$$B_{kjnm}^{\pm+} = \frac{b_{kjnm}^{\pm+}}{\left(\bar{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}},\ B_{kjnm}^{\pm-} = \frac{b_{kjnm}^{\pm-}}{\left(\bar{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}}, \left\{e_{nm}^{++}, e_{nm}^{+-}, e_{nm}^{-+}, e_{nm}^{--}\right\} = \left\{\frac{\bar{\beta}_n^{+}}{\beta_m^{+}}, \frac{\bar{\beta}_n^{+}}{\bar{\beta}_m^{-}}, \frac{\beta_n^{-}}{\beta_m^{+}}, \frac{\beta_n^{-}}{\bar{\beta}_m^{-}}\right\},$$

$$\beta_n^{\pm} = z_n^{\pm}\cos\phi + \sin\phi, \Upsilon_{kj} = \sum_{\pm}\theta(\pm t)\Upsilon_{kj}^{\pm}, \mathrm{B}_{kjnm} = \sum_{\pm(\pm)}\theta(\pm t)\theta((\pm)\tau)B_{kjnm}^{\pm(\pm)},$$

$$e_{nm} = \sum_{\pm(\pm)}\theta(\pm t)\theta((\pm)\tau)e_{nm}^{\pm(\pm)}.$$

Співвідношення (14) узагальнюють співвідношення для кусково-однорідної анізотропної площини [6] і дозволяють задачі про внутрішні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі зводити безпосередньо до систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).

2. Постановка і зведення до системи СІР задач про тунельне включення. Нехай в результаті перетину тунельного включення площиною X0Y утвориться відрізок $\ell = (0; a)$ (Рис. 1).

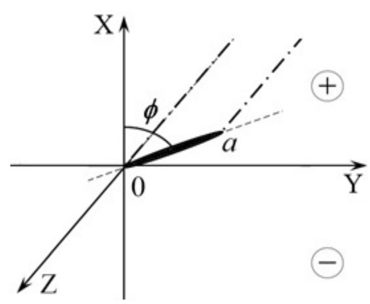

Рис. 1

До включення прикладене довільне навантаження з рівнодійною $P=(P_1, P_2, 0)$ і центральним моментом M, які забезпечують двовимірний стан. Розміщення граней включень після деформації описується функціями

$$\tilde{w}^{\pm}(t) = \varepsilon + \delta^* t + \tilde{w}_*^{\pm}(t),\ t\in\ell, \tag{15}$$

де функції $\tilde{w}_*^{\pm}(t)$ описують форму граней включення. Грані включень, що знаходяться з боку нормалі, зчепленні з середовищем, а протилежні грані знаходяться в умовах гладкого контакту. Враховуючи подання $\tilde{\chi}_4^+(t) = (\tilde{w}^+(t))' + +(\tilde{w}^-(t))'$, $\tilde{\chi}_4^-(t) = (\tilde{w}^+(t))' - (\tilde{w}^-(t))', t \in \ell$, рівності $\tilde{\chi}_j^-(t) = 0,\ t \notin \ell, j = \overline{1,6}$, і умови

$$\zeta_j^-(t) = \zeta_{j+3}^+(t) = 0,\ j = 2,3; t \in \ell, \{\zeta_k^{\pm}\}^6 = \frac{1}{2}\{\tilde{\chi}_k^+ \pm \tilde{\chi}_k^-\}^6,$$

які відображають вказаний тип контактної взаємодії, за допомогою останніх п'яти рівностей із співвідношень (14), отримаємо відносно вектора $h = \{h_j(t)\}^5 = = \{\tilde{\chi}_1^-(t), \tilde{\zeta}_2^+(t), \tilde{\zeta}_3^+(t), -\tilde{\zeta}_5^-(t), -\tilde{\zeta}_6^-(t)\}$, систему п'яти СІР

$$M_0 h(t) + \frac{1}{\pi} M_{\mathrm{S}} \int_0^a \frac{h(\tau)}{t-\tau} d\tau + \frac{4}{\pi} Im \sum_{n,m=1}^{3} B_{nm} \int_0^a \frac{h(\tau) d\tau}{e_{nm}^{++} t - \tau} = q(t),\ \ t \in \ell, \tag{16}$$

де

$$M_{\mathrm{S}} = \left\{ \Upsilon_{kj}^+ \right\}_{k=\overline{2,6}; j=\overline{1,6}, j\neq 4},\ M_{nm} = \left\{ \mathrm{B}_{kjnm}^{++} \right\}_{k=\overline{2,6}; j=\overline{1,6}, j\neq 4},$$

$$q(t) = \left\{ \tilde{\chi}_4^+(t)\delta_{k,4} - \frac{\Upsilon_{k,4}^+}{\pi} \int_\ell \frac{\tilde{\chi}_4^-(\tau)}{t-\tau} d\tau - Im \sum_{n,m=1}^{3} \frac{\mathrm{B}_{k,4,nm}^{++}}{\pi} \int_\ell \frac{\tilde{\chi}_4^-(\tau)}{t e_{nm}(t,\tau) - \tau} d\tau \right\}_{k=\overline{2,6}},$$

$M_0 = \mathrm{diag}\{0, -1, -1, 1, 1\}$ — діагональна матриця п'ятого порядку. Вказану систему слід доповнити умовами рівноваги і замкнутості

$$\int_\ell \tilde{\chi}_k^-(\tau) d\tau = \mathrm{P}_k, \quad (\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_4 = \mathrm{P}_5 = \mathrm{P}_6 = 0), k = \overline{1,6}, k \neq 4, \tag{17}$$

і умовами моментної рівноваги

$$\int_\ell \tau \chi_1^-(\tau) d\tau = \mathrm{M}_0. \tag{18}$$

3. Умови існування і асимптотики поведінки розв'язків системи СІР із нерухомою особливістю. Ядра системи (16), крім сингулярності типу Коші, містять також нерухомі особливості, що обумовлює необхідність доведення існування і визначення асимптотики її розв'язків. Позначимо через $L_q^2(\ell_0, \omega(t))$ $(\omega(t) = t^\gamma (a-t)^\beta,\ q-1 < Re\gamma < -1 + qRe\gamma,\ q-1 < Re\beta < -1 + qRe\beta,$ $1 < q < \infty)$ простір Банаха функцій з нормою [13] $\|f\|_{q,\omega} = \sqrt[q]{\int_\ell \omega(t) \left| f(t) \right|^q dt}$. $\mathrm{H}_\mu^{\gamma,\beta}(\ell)$ $(-1 < Re\gamma, Re\beta \leq 0)$ клас функцій $f(t)$ $(t \in \ell)$ які допускають розвинення $f = t^\gamma (1-t)^\beta f_*(t), f_*(t) \in \mathrm{H}_\mu(\ell)$, $\mathrm{H}_\mu(\ell)$ — клас Гельдерових функцій. Передсимвол [13] системи (16) подамо так:

$$\begin{gathered} \mathrm{G}^0(\eta) = \tfrac{\mathrm{G}(\eta)}{\sin \pi\eta} = \left\{ \tfrac{g_{kj}(\eta)}{\sin \pi\eta} \right\}^5 = \{ M_0 - \mathrm{ctg}\pi\eta M_s - \\ - \tfrac{i}{2 \sin \pi\eta} \textstyle\sum_{m,n=1}^{3} (B_{nm}(-e_{nm}^{++})^{-1-\eta} - \bar{B}_{nm}(-\bar{e}_{nm}^{++})^{-1-\eta}))\}. \end{gathered} \tag{19}$$

Теорема 1. *Якщо існує таке число* γ, $\mathrm{Re}\gamma \in (-1;0]$, *яке є* $(\kappa+1)$ *— кратним коренем рівняння*

$$\Delta(\eta)=0, \Delta(\eta)=\begin{cases} \det \mathrm{G}(\eta), \text{ при } g_{kj}\neq 0\,(k=j), \\ tr\mathrm{G}(\eta), \text{ при } g_{kj}=0\,(k\neq j), \end{cases} \tag{20}$$

$\mathrm{tr}\mathrm{G}\,(\eta)$ *— слід матриці* $\mathrm{G}\,(\eta)$*, то система (16) розв'язна в* $L_q^2\,(\ell,\omega\,(t))$*, її індекс дорівнює одиниці, і при умовах (17) та при* $q_k(t)\in \mathrm{H}_\mu^{\alpha+\varepsilon,\beta+\varepsilon}(\ell)$ *має единий розв'язок в* $L_q^2\,(\ell,\omega(t))\cap \mathrm{H}_\mu^{\alpha,\beta}(\ell)$, $(0\le\alpha,\beta<1)$*, який має асимптотичне розвинення*

$$h_j(t)\simeq h_j^* t^\gamma P_{\kappa j}(\ln t),\ t\to 0,\ h_j^*\neq 0, j=\overline{1,5}, \tag{21}$$

де $P_{\kappa j}(z)$ *— многочлени k-того ступеня.*

Доведення. При виконанні умов теореми будемо мати: $\det \mathrm{G}^0(\eta)\neq 0$ якщо $-1<Re\eta<Re\gamma$. Отже згідно [13], система нетерова в просторі $L_q^2(\ell,\omega(t))$, а її індекс визначається формулою $\mathrm{Ind}\,\mathrm{A}=-\mathrm{ind}(\mathrm{A}_\xi(\tau))$, $\mathrm{A}_\xi(\tau)=\det\mathrm{G}^0(\eta)$, $\eta=\xi+ +i\tau$. Неважко встановити, що $\mathrm{ind}(\mathrm{A}_\xi(\tau))=m^0-1$, де $m^0=\mathrm{ind}(\mathrm{A}_\xi^0(\tau))$,$\mathrm{A}_\xi^0(\tau)= =\mathrm{tg}^5\frac{\eta}{2}\mathrm{A}_\xi(\tau)$. Якщо τ змінюється від $-\infty$ до ∞ функція $\mathrm{A}_\xi^0(\tau)$ при $\xi\in(Re\gamma,1)$ опише замкнутий контур, який розташований симетрично відносно дійсної осі і не охоплює початок координат. Така поведінка має місце для поставлених задач і для комбінацій відомих матеріалів (16) дорівнює одиниці і при умовах (17) існує єдиний розв'язок в просторі $L_q^2(\ell,\omega(t))$, який має інтегровану особливість при $t\to 0$. Тобто має місце подання $h_j(t)\simeq t^\gamma P_{rj}(\ln t)h_j^*$, $t\to 0$, $h_j^*\in \mathrm{H}_\mu(\ell), j=\overline{1,r}$. Скориставшись асимптотичними властивостями операторів із нерухомими особливостями [2], для оператора

$$\mathrm{N}_{jk}[f]=m_{jk}^0 f(t)+\frac{m_{jk}^s}{\pi}\int_0^a\frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau+\frac{4}{\pi}Im\sum_{n,m=1}^{3}b_{jk}^{lm}\int_0^a\frac{f(\tau)d\tau}{e_{nm}t-\tau},$$

отримаємо наступне розвинення ($\varepsilon>0$):

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}_{jk}[t^\gamma P_{\kappa k}(\ln t)h_k^*]= \\ &=t^\gamma h_k^*(0)\sum_{m=0}^{\kappa}g_{jk}^{(m)}(\gamma)\frac{(-1)^{m+1}}{m!}P_{\kappa k}^{(m)}(\ln t)+\Omega_{jk}^*(t), \left|\Omega_{jk}^*\right|<C_{jk}t^{Re\gamma+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{22}$$

Скориставшись поданням (22) із системи (16), отримаємо співвідношення

$$t^\gamma\sum_{k=1}^{5}h_{k*}(0)\sum_{m=0}^{\kappa}g_{jk}^{(m)}(\gamma)\frac{(-1)^{m+1}}{m!}P_{\kappa j}^{(m)}(\ln t)+\Omega_j^0(t)=0,\ j=\overline{1,5}. \tag{23}$$

Функція $\Omega_j^0(t)$ задовольняє оцінці $\left|\Omega_j^0(t)\right|<Ct^{Re\gamma+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Згідно останній, рівності (23) можливі при $t\to 0$ лише при виконання співвідношень

$$\sum_{l=0}^{\kappa}\ln^l t\cdot N_{\kappa-l}=0, \tag{24}$$

$$N_m=\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p+1}\left(\begin{array}{c}\kappa\\ m-p\end{array}\right)Q_{m-p}X_{\kappa-p},X_p=\{h_{j*}(0)a_{pj}\}_1^5,$$

$$Q_{m-p}=\{g_{jk}^{(m-p)}(\gamma)\}^5,$$

$a_{\kappa j}$ — коефіцієнти многочленів $P_{\kappa j}(z)$. Рівність (24) можлива, якщо виконуються співвідношення

$$\sum_{p=0}^{m}(-1)^{m-p+1}\left(\begin{array}{c}r\\ m-p\end{array}\right)Q_{m-p}X_{\kappa-p}=0,\ \ m=\overline{0,\kappa}. \tag{25}$$

Так як вектори $X_p\neq 0,\ p=\overline{0,r}$ лінійно не залежні, то останні рівності можливі тоді і тільки тоді, коли визначник системи (25), який дорівнює $\Delta^{(r)}(\gamma)$, обертається в нуль. Отже, якщо має місце подання (22), то γ є $(\kappa+1)$ — кратним коренем трансцендентного рівняння (21). Поведінка при $t\to a-0$ розв'язків системи (16) визначається характеристичною частиною і співпадає з поведінкою розв'язків для відповідних задач, про включення в однорідному просторі [7]. *Теорему доведено.*

Наслідок 1. *Якщо γ є простим коренем трансцендентного рівняння (20) з найбільшою дійсною частиною із смуги* $\mathrm{Re}\gamma\in[0;1)$, *то розв'язки системи (16) допускають асимптотичне подання*

$$h_j(t)\simeq t^{\gamma}h_j^*,\ t\to 0\ ,\ \mathrm{Re}\gamma\in(-1,0],j=\overline{1,5}. \tag{26}$$

Наслідок 2. *Трансцендентне рівняння (20) дозволяє виявити наступні за головною доданки до будь якого порядку* K *в асимптотичному розвиненні розв'язків системи (16)*

$$h_j(t)\simeq\sum_{k=0}^{\mathrm{K}}h_{jk}^*t^{\gamma_k},\ t\to 0\ ,\ j=\overline{1,5},$$

$$-1<\mathrm{Re}\gamma_0<\mathrm{Re}\gamma_1<\ldots<\mathrm{Re}\gamma_{\mathrm{K}},\ \Delta(\gamma_j)=0,\ h_{jk}^*\neq 0.$$

Дослідження показали, що для поставленої задачі, для відомих комбінацій анізотропних матеріалів [10, 14] рівняння (20) має принаймі один корінь в смузі $\mathrm{Re}\gamma\in(-1;0]$, отже справедливе твердження

Наслідок 3. *Система (16) при додаткових умовах (17) має единий розв'язок в просторі $L_q^2(\ell,\omega(t))$, який допускає асимптотичне подання (26).*

4.Числові результати і їх аналіз. На рисунках 2, 3 наведені залежності найбільших показників особливостей для деяких комбінацій матеріалів при повороті осей анізотропії навколо осі Z і при зміні кута ϕ нахилу дефекту, відповідно для комбінацій матеріалів [10] $m1-m2$ і $m3-m4$ (матеріал $m1$ — склопластик однонаправлений, матеріал $m2$ — склопластик ортогонально-армований (2:1), $m3$ — склопластик СТЕТ, $m4$ — склопластик АСТТ(б)), наведені залежності $\alpha_0=-Re\gamma_0$, де γ_0 корінь рівняння (21) з найменшою дійсною частиною із смуги $\mathrm{Re}\gamma\in(-1;0]$, від кута φ ортогонального перетворення осей анізотропії навколо осі Z.

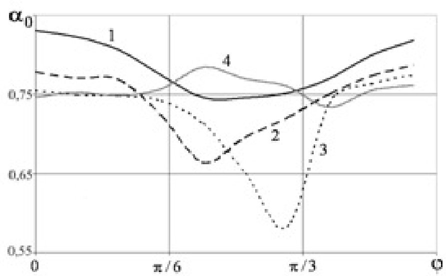

Рис.2

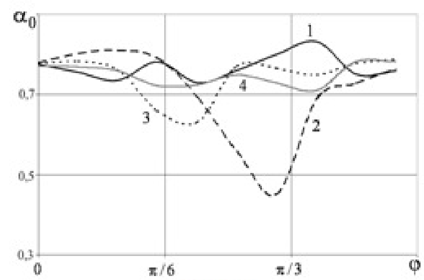

Рис.3

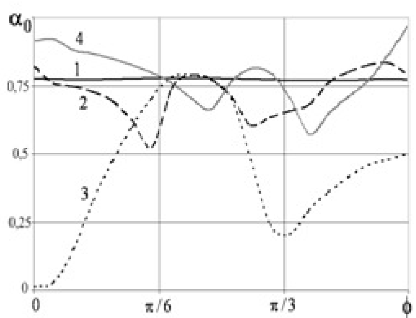

Рис.4

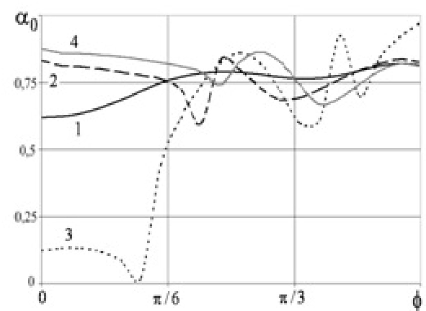

Рис.5

Крива 1 відповідає значенню кута нахилу дефекту $\phi = 0$, крива 2 — $\phi = \frac{\pi}{6}$, крива 3 — $\phi = \frac{\pi}{4}$, крива 4 — $\phi = \frac{\pi}{3}$. На рис. 4, 5, відповідно для комбінацій матеріалів $m1 - m2$ і $m3 - m4$, наведені залежності α_0 від кута нахилу дефекту ϕ. Крива 1 відповідає значенню кута повороту осей анізотропії $\varphi = 0$, навколо осі Z, крива 2 — $\varphi = \frac{\pi}{6}$, крива 3 — $\varphi = \frac{\pi}{4}$, крива 4 — $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Результати обчислень показують, що концентрація напружень в околі дефекту, який виходить в площину з'єднання різних півпросторів суттєво залежить від анізотропних властивостей матеріалів і кута нахилу включення. Зокрема, виявився суттєвим вплив орієнтації головних осей анізотропії півпростору, в якому розташовано включення. Слід також відмітити, що при наближенні кута ϕ до $\frac{\pi}{2}$ (включення наближається до площини з'єднання півпросторів) показники особливості наближаються до показників особливостей відповідних задач про міжфазні дефекти [7].

Висновки. Отже, запропоновано методику зведення задач про тунельні включення, які виходять одним кінцем в площину з'єднання різних анізотропних півпросторів до системи СІР з нерухомими особливостями. Досліджено їх розв'язність і виявлені асимптотики поведінки розв'язків в вершинах включень, що дає можливість до їх розв'язування застосувати ефективні числово-аналітичні методи.

Аналогічно можуть бути розглянуті задачі про тунельні дефекти інших типів (тріщини, відшаровані включення), які виходять в площину з'єднання різних анізотропних півпросторів.

1. **Кривой А. Ф.** Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости [текст]/ А. Ф. Кривой, М. В. Радиолло // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 3. – С. 84–92.
2. **Кривой А. Ф.** Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов, М. В. Радиолло // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 4. – С. 622–632.
3. **Herrmann K. P.** On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial [text] / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 1999. – V. 69. – P. 317–335.
4. **Кривой А. Ф.** Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскост [текст] / А. Ф. Кривой // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2001. – Т. 6, вип. 3. – С. 108–115.
5. **Кривой А. Ф.** Произвольно ориентированные трещины в неоднородной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой, К. Н. Архипенко // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 29–35.
6. **Кривой А. Ф.** Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2003. – Т. 8, вип. 2. – С. 140–149.
7. **Кривий О. Ф.** Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі [текст] / О. Ф. Кривий // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 2. – С. 55–66.
8. **Кривой А. Ф.** Межфазные туннельные трещины в составном анизотрпном пространстве [текст] /А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 4. – С. 689–700.
9. **Кривой А. Ф.** Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве [текст] / А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов // Прикл. механика. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 36–45.
10. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела [текст] / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
11. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
12. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений [текст] / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
13. **Дудучава Р. В.** Интегральные уравнения свёртки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики [текст] / Р. В. Дудучава. – Тбилисси: Мецниереба, 1979. – 136 с.
14. **Александров К. С.** Упругие свойства кристаллов. Обзор [текст] / К. С. Александров, Т. В. Рыжова // Кристаллография. – 1961. – Т. 6, вып. 2. – С. 289–314.