ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 132–141

Mathematical Subject Classification: 74R10
УДК 539.3

І. Я. Шот
Львівський національний університет імені Івана Франка

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ НА ЗСУВ ТА СТИСНЕННЯ

Шот І. Я. Чисельне розв'язування задач теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення. У матричному вигляді записано ключові співвідношення для визначення напружено-деформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення, знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану розглядуваних оболонок, методом скінченних елементів. Наведено низку числових прикладів.
Ключові слова: оболонка, крайова задача, варіаційна задача, метод скінченних елементів.

Шот И. Я. Численное решение задач теории тонких оболочек, податливых на сдвиг и сжатие. В матричном виде записаны ключевые соотношения для определения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек, податливых на сдвиг и сжатие, нахождения собственных частот свободных колебаний и начального послекритического состояния рассматриваемых оболочек, методом конечных элементов. Приведены числовые примеры.
Ключевые слова: оболочка, краевая задача, вариационная задача, метод конечных элементов.

Shot I. Ya. Numerical solution of problems in the theory of thin shells compliant to shear and compression. Written in matrix form key equations to determine the stress-strain state of thin shells compliant to shear and compression, the natural frequencies of free oscillations and the initial post-critical state shells by the finite element method. There are a number of numerical examples.
Key words: shell, boundary value problem, variational problems, finite element method.

Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану тонких гнучких оболонок, що вимагає використання нелінійної теорії оболонок, а також розвиток ефективних числових методів їх розв'язання має важливе значення, оскільки дозволить прогнозувати і покращувати міцнісні та експлуатаційні властивості гнучких конструкцій.

При розгляді задач сучасної нелінійної теорії оболонок, головним чином, використовують класичну гіпотезу Кірхгофа–Лява та гіпотезу Тимошенка–Міндліна (так звана п'ятимодальна теорія) [8, 16]. Дослідженню нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка, податливих на зсув та стиснення (шестимодальний варіант, у якому поле переміщень характеризується шістьма функціями, що описують поворот та стиснення нормалі), присвячено праці [6, 11, 15].

У цій статті записано ключові співвідношення для визначення напруженодеформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення, знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану розглядуваних оболонок, методом скінченних елементів. Для зручності застосування числових методів [1, 11, 13, 14] усі співвідношення подано в матричному вигляді.

Основні результати.

1. Головні припущення та співвідношення теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення. Розглянемо оболонку як тривимірне тіло сталої товщини h. Віднесемо серединну поверхню Ω оболонки до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3| \le h/2$. Вважаємо, що координатні лінії серединної поверхні збігаються із лініями головних кривин, а товщина оболонки є істотно меншою від інших її розмірів.

Вектор переміщень довільної точки оболонки, податливої на зсув та стиснення, повністю визначають компоненти вектора переміщень $u_i(\alpha)$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$ та вектора кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки $\gamma_i(\alpha)$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$. Якщо ввести:

$u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ — вектор узагальнених переміщень точок серединної поверхні оболонки;

$e_L = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23})^T$ — вектор компонент тензора лінійної деформації;

$\omega = \left(\overset{0}{\omega}_1, \overset{0}{\omega}_2, \overset{0}{\omega}_3, \overset{1}{\omega}_1, \overset{1}{\omega}_2, \overset{1}{\omega}_3\right)^T$ — вектор компонент тензора поворотів;

$\varepsilon = (\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{13},\ \varepsilon_{23},\ \chi_{11},\ \chi_{22},\ \chi_{12},\ \chi_{13},\ \chi_{23})^T$ — вектор компонент тензора деформацій Гріна, то вирази для визначення компонент тензора лінійної деформації і тензора повороту в матричній формі з точністю до $o(h)$ подамо у вигляді:

$$e_L = C_L u, \tag{1}$$

$$\omega = C_\Omega u. \tag{2}$$

Тоді деформаційні співвідношення для гнучких оболонок з урахуванням лінійної і нелінійної складових деформації запишемо таким чином:

$$\varepsilon = e_L + e_N, \tag{3}$$

де

$$e_N = \frac{1}{2}\left(C_\Omega u\right)_{11}^T E_\Omega \left(C_\Omega u\right). \tag{4}$$

Тут C_L та C_Ω — матриці диференціальних операторів розмірності $11{\times}6$ та $6{\times}6$ відповідно:
повний вигляд C_L наведено у [3], а

$$C_\Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -k_2 & \frac{\partial_2}{A_2} & 0 & -1 & 0 \\ k_1 & 0 & -\frac{\partial_1}{A_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial_2(A_1\cdot)}{A_1A_2} & \frac{\partial_1(A_2\cdot)}{A_1A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_2 & \frac{\partial_2}{A_2} \\ 0 & 0 & 0 & 2k_1 & 0 & -\frac{\partial_1}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial_2(A_1\cdot)}{A_1A_2} & \frac{\partial_1(A_2\cdot)}{A_1A_2} & 0 \end{pmatrix};$$

E_Ω — матриця вигляду $E_\Omega = (E_1, E_2, ..., E_{11})^T$, де E_i — матриці розмірності 6×6, відмінні від нуля компоненти яких відповідно рівні

$$\begin{gathered}
E_1^{22} = E_1^{33} = 1, \quad E_2^{11} = E_2^{33} = 1, \quad E_4^{21} = E_4^{12} = -1/2, \\
E_5^{31} = E_5^{13} = -1/2, \quad E_6^{32} = E_6^{23} = -1/2, \quad E_7^{22} = -k_1, \\
E_7^{25} = E_7^{36} = E_7^{52} = E_7^{63} = 1, \quad E_7^{33} = -\left(k_1 + 2k_2\right), \\
E_8^{41} = E_8^{14} = E_8^{36} = E_8^{63} = 1, \quad E_8^{33} = -\left(2k_1 + k_2\right), \\
E_8^{11} = -k_2, \quad E_9^{51} = E_9^{42} = E_9^{24} = E_9^{15} = -1/2, \\
E_{10}^{31} = E_{10}^{13} = k_2, \quad E_{10}^{61} = E_{10}^{43} = E_{10}^{16} = E_{10}^{34} = -1/2, \\
E_{11}^{32} = E_{11}^{23} = k_1, \quad E_{11}^{62} = E_{11}^{53} = E_{11}^{26} = E_{11}^{35} = -1/2.
\end{gathered}$$

Тут $A_1 = A_1(\alpha)$, $A_2 = A_2(\alpha)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки Ω; $k_1 = k_1(\alpha)$, $k_2 = k_2(\alpha)$ – її головні кривини відповідно.

Зауважимо, що співвідношення (1) визначають геометричні співвідношення теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення, в лінійній постановці, а співвідношення (3) пов'язують компоненти тензора деформацій Гріна з переміщеннями в геометрично нелінійній постановці для розглядуваних оболонок.

Співвідношення пружності, що пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами, подамо у матричному вигляді:

$$\sigma = B\varepsilon, \tag{5}$$

де $\sigma = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23})^T$ – вектор внутрішніх зусиль-моментів, B – симетрична матриця пружних характеристик матеріалу розмірності 11× 11 [3].

Диференціальні рівняння, що описують рівновагу деформованого тіла, та статичні крайові умови на частині Γ_σ контуру серединної поверхні оболонки $\Gamma = \Gamma_u \bigcup \Gamma_\sigma$ отримаємо з принципу можливих переміщень [9] та запишемо у матричному вигляді:

$$C_\sigma \sigma^* + P = 0, \tag{6}$$

$$G_\sigma \sigma^*|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g. \tag{7}$$

Для встановлення кінематичної визначеності системи необхідно додати також крайові умови в зміщеннях [10]

$$G_u u|_{\Gamma_u} = u_g, \;\; \Gamma_u = \Gamma \backslash \Gamma_\sigma. \tag{8}$$

У виразах (6)–(8) введено позначення:
$P = (P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3)^T$ — вектор зовнішнього навантаження,
$\sigma = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23})^T$ — вектор симетричних зусиль-моментів,
$\sigma^* = (N_{11}^*, N_{22}^*, N_{33}^*, N_{12}^*, N_{21}^*, N_{13}^*, N_{31}^*, N_{23}^*, N_{32}^*, M_{11}^*, M_{22}^*, M_{12}^*, M_{21}^*, M_{13}^*, M_{23}^*)^T$ – вектор нововведених зусиль-моментів,
$\sigma_g = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n)^T$ — вектор крайових зусиль-моментів,
$u_g = (u_t^b, u_s^b, u_n^b, \gamma_t^b, \gamma_s^b, \gamma_n^b)^T$ — вектор крайових зміщень,
C_σ — матриця диференціальних операторів розмірності 6×15, відмінні від нуля компоненти якої рівні

$$C_\sigma^{1,1} = \frac{\partial_1 (A_2 \cdot)}{A_1 A_2}, \;\; C_\sigma^{1,2} = -\frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}, \;\; C_\sigma^{1,4} = \frac{\partial_2 (A_1 \cdot)}{A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{1,5} = \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{1,6} = k_1,\ \ C_\sigma^{1,12} = C_\sigma^{1,13} = \frac{(\partial_2 (A_1 k_1 \cdot) + k_2 \partial_2 A_1)}{2 A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{2,1} = -\frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{2,2} = \frac{\partial_2 (A_1 \cdot)}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{2,4} = \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{2,5} = \frac{\partial_1 (A_2 \cdot)}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{2,8} = k_2,\ \ C_\sigma^{2,12} = C_\sigma^{2,13} = \frac{(\partial_1 (A_2 k_2 \cdot) + k_1 \partial_1 A_2)}{2 A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{3,1} = -k_1,\ \ C_\sigma^{3,2} = -k_2,\ \ C_\sigma^{3,6} = \frac{\partial_1 (A_2 \cdot)}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{3,8} = \frac{\partial_2 (A_1 \cdot)}{A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{4,7} = -1,\ \ C_\sigma^{4,10} = \frac{\partial_1 (A_2 \cdot)}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{4,11} = -\frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{4,12} = \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} + \frac{\partial_2}{A_2},$$

$$C_\sigma^{4,13} = \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{5,9} = -1,\ \ C_\sigma^{5,10} = -\frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{5,11} = \frac{\partial_2 (A_1 \cdot)}{A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{5,12} = \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{5,13} = \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} + \frac{\partial_1}{A_1},\ \ C_\sigma^{6,3} = -1,\ \ C_\sigma^{6,10} = -k_1,$$

$$C_\sigma^{6,11} = -k_2,\ \ C_\sigma^{6,14} = \frac{\partial_1 (A_2 \cdot)}{A_1 A_2},\ \ C_\sigma^{6,15} = \frac{\partial_2 (A_1 \cdot)}{A_1 A_2};$$

G_σ, G_u – матриці розмірностей $6{\times}15$ та $6{\times}6$ відповідно, ненульові компоненти яких рівні

$$G_\sigma^{11} = G_\sigma^{25} = G_\sigma^{4,10} = G_\sigma^{5,13} = \cos^2 (n, \alpha_1),$$

$$G_\sigma^{12} = -G_\sigma^{24} = G_\sigma^{4,11} = -G_\sigma^{5,12} = \sin^2 (n, \alpha_1),$$

$$G_\sigma^{14} = G_\sigma^{15} = -G_\sigma^{21} = G_\sigma^{22} = G_\sigma^{4,12} = G_\sigma^{4,13} = -G_\sigma^{5,10} = G_\sigma^{5,11} = \frac{1}{2} \sin 2 (n, \alpha_1),$$

$$G_\sigma^{1,12} = G_\sigma^{1,13} = \frac{1}{4} (k_1 + k_2) \sin 2 (n, \alpha_1),$$

$$G_\sigma^{2,12} = G_\sigma^{2,13} = \frac{1}{2} \left(k_2 \cos^2 (n, \alpha_1) - k_1 \sin^2 (n, \alpha_1)\right),$$

$$G_\sigma^{3,6} = G_\sigma^{6,14} = \cos (n, \alpha_1),\ \ G_\sigma^{3,8} = G_\sigma^{6,15} = \sin (n, \alpha_1),$$

$$G_u^{11} = G_u^{22} = G_u^{44} = G_u^{55} = \cos (n, \alpha_1),$$

$$G_u^{12} = G_u^{45} = -G_u^{21} = -G_u^{54} = \sin (n, \alpha_1),\ \ G_u^{33} = -G_u^{66} = -1.$$

Тут через n позначено нормаль до межі серединної поверхні оболонки.
Зв'язок між симетричними зусиллями-моментами та їх нововведеними характеристиками подамо у матричному вигляді:

$$\sigma^* = F\sigma, \tag{9}$$

де F – матриця розмірності $15{\times}11$ з відмінними від нуля коефіцієнтами

$$F^{11} = F^{22} = F^{33} = F^{44} = F^{54} = F^{65} = F^{75} = F^{86} = F^{96} = F^{10,7} =$$
$$= F^{11,8} = F^{12,9} = F^{13,9} = F^{14,10} = F^{15,11} = 1,$$

$$F^{45} = -F^{55} = F^{64} = -F^{74} = F^{82} = -F^{92} = F^{12,10} = -F^{13,10} = \\ = F^{14,9} = F^{15,8} = \tfrac{1}{2} \overset{0}{\omega}_1,$$

$$F^{46} = -F^{56} = -F^{61} = F^{71} = -F^{84} = F^{94} = F^{12,11} = \\ = -F^{13,11} = -F^{14,7} = -F^{15,9} = \tfrac{1}{2} \overset{0}{\omega}_2,$$

$$F^{41} = F^{42} = F^{51} = F^{52} = -F^{66} = F^{76} = F^{85} = F^{12,7} = F^{12,8} = \\ = -F^{13,7} = -F^{13,8} = -F^{14,11} = F^{15,10} = -\tfrac{1}{2} \overset{0}{\omega}_3,$$

$$F^{69} = \frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_1, \;\; F^{89} = -\frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_2, \;\; F^{7,11} = -F^{9,10} = -\frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_3,$$

$$F^{4,7} = -F^{5,7} = \frac{1}{2} \left((k_1 + 2k_2) \overset{0}{\omega}_3 - \overset{1}{\omega}_3 \right),$$

$$F^{4,8} = -F^{5,8} = \frac{1}{2} \left((2k_1 + k_2) \overset{0}{\omega}_3 - \overset{1}{\omega}_3 \right),$$

$$F^{4,10} = -F^{5,10} = \frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_1 - k_2 \overset{0}{\omega}_1, \;\; F^{4,11} = -F^{5,11} = \frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_2 - k_1 \overset{0}{\omega}_2,$$

$$F^{67} = \frac{1}{2} \left(k_1 \overset{0}{\omega}_2 - \overset{1}{\omega}_2 \right), \;\; F^{6,11} = \frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_3 - k_1 \overset{0}{\omega}_3,$$

$$F^{77} = \frac{1}{2} \left(k_1 \overset{0}{\omega}_2 + \overset{1}{\omega}_2 \right), \;\; F^{79} = -k_1 \overset{0}{\omega}_1 - \overset{1}{\omega}_1,$$

$$F^{88} = \frac{1}{2} \left(-k_2 \overset{0}{\omega}_1 + \overset{1}{\omega}_1 \right), \;\; F^{8,10} = -\frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_3 + k_2 \overset{0}{\omega}_3, \;\; F^{98} = -\frac{1}{2} \left(k_2 \overset{0}{\omega}_1 + \overset{1}{\omega}_1 \right).$$

Лінійне формулювання рівнянь рівноваги й відповідних крайових умов теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення, подано у [3].

Якщо компоненти зовнішнього навантаження, що діє на оболонку, змінюються в часі, то викликані ними переміщення, деформації та напруження теж є функціями часу t. Рівняння руху оболонок, податливих на зсув та стиснення, які отримаємо з варіаційного принципу Остроградського–Гамільтона [4, 6], мають вигляд:

$$C_\sigma \sigma^* + P - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{10}$$

де m – діагональна матриця розмірності 6×6, ненульові компоненти якої

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \rho h,$$

$$m_{44} = m_{55} = m_{66} = \rho \frac{h^3}{12},$$

ρ – густина матеріалу оболонки.

Для однозначного інтегрування системи рівнянь (10), окрім статичних (7) та геометричних (8) крайових умов, необхідно задати ще початкові умови

$$u(\alpha, 0) = u^0(\alpha), \;\; \dot{u}(\alpha, 0) = u^1(\alpha). \tag{11}$$

Розв'язок системи (10) з крайовими та початковими умовами визначає реакцію оболонки на дію змінного в часі зовнішнього навантаження.

2. Варіаційні формулювання задач теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення. Розв'язування задач механіки деформування гнучких оболонок у даній роботі здійснюється методом скінченних елементів [11, 13, 14], який базується на варіаційних принципах. На основі принципу віртуальних робіт сформулюємо варіаційні постановки задач статики і динаміки теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення. Для цього введемо функціональні простори

$$V = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[W_2^1(\Omega)\right]^6 \quad | \; v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \backslash \Gamma_\sigma \right\}$$

та

$$G = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[L^2(\Omega)\right]^6 \right\}.$$

Тоді наведемо варіаційне формулювання задачі статики нелінійної теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення:
задано $l \in V'$,
знайти вектор узагальнених переміщень $u \in V$ *такий, що*

$$a_N(u,v) = < l, v >, \;\; \forall v \in V, \tag{12}$$

де форма $a_N(u,v)$ та функціонал $< l, v >$ мають вигляд:

$$a_N(u,v) = \iint\limits_{\Omega} \left(C_l v + (C_\Omega u)_{11}^T E_\Omega C_\Omega v \right)^T E_0 B \left(C_l u + \frac{1}{2} (C_\Omega u)_{11}^T E_\Omega C_\Omega u \right) d\Omega \,, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} < l, v > = \textstyle\sum_{i=1}^{3} \iint\limits_{\Omega} (P_i v_i + m_i \xi_i) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ + \int\limits_{\Gamma_\sigma} (N_t v_t + N_s v_s + N_n v_n + M_t \xi_t + M_s \xi_s + M_n \xi_n) d\Gamma. \end{aligned} \tag{14}$$

У рівності (13) E_0 – діагональна матриця розміру 11×11 з відмінними від нуля елементами:

$$E_0^{11} = E_0^{22} = E_0^{33} = E_0^{77} = E_0^{88} = 1,$$

$$E_0^{44} = E_0^{55} = E_0^{66} = E_0^{99} = E_0^{10,10} = E_0^{11,11} = 2.$$

Зауважимо, що варіаційне формулювання задачі статики лінійної теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення, теж має вигляд (12), але вираз для форми $a_N(u,v)$ замінюємо на такий:

$$a(u,v) = \iint\limits_{\Omega} (C_l v)^T E_0 B C_l u d\Omega. \tag{15}$$

Сформулюємо тепер варіаційну задачу динаміки нелінійної теорії зсувних оболонок, податливих на зсув та стиснення:
задано $l \in L^2(0,T;V')$, $u^0 \in V$, $u^1 \in G$;
знайти вектор узагальнених переміщень $u \in L^2(0,T;V)$ *такий, що*

$$\mu(u''(t), v) + a_N(u(t), v) = < l(t), v >, \;\; \forall t \in (0,T] \,, \tag{16}$$

$$\mu\left(u'(0)-u^1,v\right)=0,$$
$$a\left(u(0)-u^0,v\right)=0,\ \ \forall v\in V.$$

Тут форма $a_N(u,v)$ та лінійний функціонал $<l,v>$ співпадають з відповідними формою (13) та функціоналом (14) нелінійної задачі статики, а білінійна форма $\mu(u,v)$ має вигляд:

$$\mu(u,v)=\iint\limits_{\Omega}\rho h\sum_{i=1}^{3}\left(u_iv_i+\frac{h^2}{12}\gamma_i\xi_i\right)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2. \tag{17}$$

Зазначимо, що варіаційне формулювання початково-крайової задачі лінійної теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення, теж має вигляд (16), але вираз для форми $a_N(u,v)$ замінюємо на білінійну форму $a(u,v)$ (15).

3. Обчислювальні аспекти методу скінченних елементів. Розв'язування задач здійснюється методом скінченних елементів [11, 13, 14] з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій серендипового типу.

Вектор переміщень $u=(u_1,u_2,u_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)^T$, що входить у варіаційну рівність (12), подамо на елементі Ω^* ($\Omega^*=\{(\xi_1,\xi_2):-1\le\xi_1,\xi_2\le1\}$) у вигляді

$$u=N^k(\xi_1,\xi_2)\,q^k,\ \ (\xi_1,\xi_2)\in\Omega^*, \tag{18}$$

де $q^k=\left(u_1^1,u_2^1,u_3^1,\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_3^1,...,\gamma_3^8\right)^T$ – вектор невідомих вузлових переміщень та поворотів на k-му елементі,

$$N^k(\xi_1,\xi_2)=(N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,N_6,N_7,N_8),$$

$$N_i(\xi_1,\xi_2)=\begin{pmatrix}\varphi_i&&&&&\\&\varphi_i&&&&\\&&\varphi_i&&&\\&&&\varphi_i&&\\&&&&\varphi_i&\\&&&&&\varphi_i\end{pmatrix},$$

φ_i – базисні функції.

Відповідно вектор шуканих переміщень $u(\alpha,t)$, що входить у варіаційну рівність (16), подамо на елементі Ω^* у вигляді

$$u=N^k(\xi_1,\xi_2)\,q^k(t),\ \ (\xi_1,\xi_2)\in\Omega^*, \tag{19}$$

де $q^k(t)=\left(u_1^1(t),u_2^1(t),u_3^1(t),\gamma_1^1(t),\gamma_2^1(t),\gamma_3^1(t),...,\gamma_3^8(t)\right)^T$ – вектор невідомих вузлових переміщень та поворотів, що залежить від часу t на k-му елементі.

Після розбиття області Ω на скінченні елементи співвідношення (18) та (19) символічно можна записати

$$u=\sum_k N^k(\xi_1(\alpha_1,\alpha_2),\xi_2(\alpha_1,\alpha_2))q_k=N(\alpha_1,\alpha_2)q, \tag{20}$$

де q – вектор шуканих переміщень та поворотів всього ансамблю скінченних елементів.

Підставивши (20) у варіаційні формулювання (12) та (16), отримаємо відповідно задачі статичного та динамічного деформування:

$$K_T(q)\,q = R, \tag{21}$$

$$Mq''(t) + K(q(t))\,q(t) = R(t)\,. \tag{22}$$

Для розв'язування нелінійної системи застосовується метод Ньютона, який приводить до ітераційної процедури

$$K_T(q_i)\,\Delta q + K(q_i)\,q_i - R = 0, \tag{23}$$

де q_0 – вектор шуканих переміщень лінійної статичної задачі.

При знаходженні частот лінійних власних коливань попередньо навантаженої оболонки приходимо до так званої узагальненої задачі на власні значення

$$K_T(0)\,\tilde{q} = \omega^2 M\tilde{q}, \tag{24}$$

де ω – кругова частота власних коливань, $\tilde{q}(t) = \{\tilde{q}_l(t)\}$ – невідомі коефіцієнти, які є функціями часу.

Рівняння стійкості розглядуваної теорії оболонок запишемо у вигляді

$$K_T(0)\,\tilde{q} = \lambda G(q)\,\tilde{q}. \tag{25}$$

Найменше власне значення рівняння (25) визначає критичний параметр навантаження λ^*, при якому оболонка з початкового стану рівноваги переходить у суміжний.

У співвідношеннях (21)—(25) введено наступні позначення:

$K(q^i) = \iint\limits_{\Omega} \left(\left(C_l + \left(C_\Omega N q^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right) N\right)^T E_0 B \left(C_l + \frac{1}{2}\left(C_\Omega N q^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right) N d\Omega$ – матриця січної жорсткості;

$K_T(q^i) = K_u(q^i) + G(q^i)$ – матриця тангенціальної жорсткості, де

$$K_u(q^i) = \iint\limits_{\Omega} \left(\left(C_l + \left(C_\Omega N q^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right) N\right)^T E_0 B \left(C_l + \left(C_\Omega N q^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right) N d\Omega,$$

$$G(q^i) = \iint\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{11} b_j\left(N q^i\right)\left(C_\Omega N\right)_{11}^T E_j C_\Omega N d\Omega,$$

$$b = (b_1, \ldots, b_{11})^T = E_0 B \left(C_l + \frac{1}{2}\left(C_\Omega N q^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right) N q^i;$$

$R = \iint\limits_{\Omega} N^T P d\Omega + \int\limits_{\Gamma_\sigma} (G_u N)^T \sigma_g d\Gamma_\sigma$ – вектор зовнішнього вузлового навантаження;

$M = \iint\limits_{\Omega} N^T m N d\Omega$ – матриця мас.

4. Числові приклади. Досліджено та розв'язано низку числових прикладів визначення статичних та динамічних характеристик оболонок, знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану розглядуваних оболонок методом скінченних елементів. Здійснено порівняльний аналіз отриманих числових розв'язків з розв'язками, наведеними в літературі.

Зокрема приклади задач статичного деформування замкнутої циліндричної оболонки та катеноїда наведено у [2], результати отриманих числових розв'язків порівнюються з результатами, наведеними у праці [13] (в межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка—Міндліна).

Приклади задач про вільні коливання циліндричних оболонок можна знайти у [3], де результати реалізованої методом скінченних елементів моделі зсувних оболонок, описаної у цьому дослідженні, порівнюються з результатами, розглянутими у [7, 11, 12] (у межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка–Міндліна та Кірхгофа–Лява). З аналізу наведених результатів видно, що значення частот власних коливань, знайдені за шестимодальною теорією оболонок, податливих на зсув і стиснення, є більшими порівняно з обчисленими згідно з іншими теоріями оболонок. Врахування обтиску показує, що оболонка швидше може піддатися резонансу, а отже й руйнуванню.

Порівняння результатів числового розрахунку задачі про знаходження критичного навантаження затиснутої по контуру круглої пластинки з результатами, розглянутими у [5], наведено у праці [15].

Також розглянемо задачу стійкості для зрізаного конуса, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження P. Розрахунок проведений для значень: радіус більшої основи $R_1 = 1$ м, радіус меншої основи $R_2 = 0,5$ м, кут при основі $\alpha = 60^0$, товщина оболонки $h = 0,02$ м, довжина $L = 1$ м. Фізико-механічні параметри матеріалу вибрано наступним чином: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, модуль Юнга $E = 10^5$ МПа. Крайові умови наступні: жорстке защемлення при меншій основі конуса та шарнір при більшій його основі. При втраті стійкості оболонки у вигляді зрізаного конуса форми опуклості є несиметричні відносно осі і характеризуються числом хвиль n, тому розрахунок методом скінченних елементів проводиться для сектору π/n (у даному випадку $\pi/8$). Наведемо порівняння результатів числового розрахунку критичного навантаження $P_{кр}$ для цієї задачі, при якому оболонка у вигляді зрізаного конуса перейде зі стану рівноваги у суміжний стан:

– п'ятимодальний варіант теорії оболонок типу Тимошенка—Міндліна [11]

$$P_{кр} = 9,57,$$

– шестимодальний варіант теорії оболонок типу Тимошенка—Міндліна

$$P_{кр} = 8,67.$$

Висновки. З аналізу наведених результатів бачимо, що навантаження, знайдене за шестимодальною теорією оболонок, податливих на зсув та стиснення, є меншим порівняно з критичним навантаженням, обчисленим згідно з іншою теорією оболонок. Врахування обтиску зменшує жорсткість оболонки, тому для того, щоб оболонка втратила стійкість, достатньо меншого навантаження.

1. **Бате К.** Численные методы анализа и метод конечных элементов [текст] / Бате К., Вилсон Е. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.

2. **Вагін П. П.** Аналіз напружено-деформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення [текст] / Вагін П. П., Шот І. Я. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 135–147.
3. **Вагін П. П.** Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення [текст] / Вагін П. П., Шот І. Я. // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 177–184.
4. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности [текст] / Васидзу К. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
5. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем [текст] / Вольмир А. С. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
6. **Галимов К. З.** Теория оболочек с учетом поперечного сдвига [текст] / К. З. Галимов. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 211 с.
7. **Гольденвейзер А. Л.** Свободные колебания тонких упругих оболочек [текст] / Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
8. **Григоренко Я. М.** Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей [текст] / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко. – К.: Академпериодика, 2006. – 472 с.
9. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости [текст] / В. В. Новожилов. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 211 с.
10. **Пелех Б. Л.** Обобщенная теория оболочек [текст] / Пелех Б. Л. – Львов: Вища шк., 1978. – 159 с.
11. **Рикардс Р. Б.** Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин [текст] / Рикардс Р. Б. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
12. **Савула Я. Г.** Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями [текст] / Савула Я. Г., Флейшман Н. П. – Львов: Вища шк., 1989. – 172 с.
13. **Савула Я. Г.** Некоторые приложения метода конечных элементов [текст] / Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. М. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1981. – 88 с.
14. **Babuska I.** Finite elements: an introduction to the method and error estimation [text] / Babuska I., Whiteman J. R., Strouboulis T. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 352 p.
15. **Bernakevych I. E.** A study of the stable equilibrium of thin shells compliant to shear and compression [text] / Bernakevych I. E., Vahin P. P., Shot I. Ya. // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – 181, № 4. – P. 497–505.
16. **Libai A.** The nonlinear theory of elastic shells [text] / Libai A., Simmonds J. G. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.