ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 7–15

М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 49M53
УДК 917.7

А. В. Арсирий
Одесский национальний университет имени И. И. Мечникова

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Арсiрiй А. В. Метод розв'язання задачi оптимального керування багатозначною траєкторiєю з термiнальним критерiєм якостi. У данiй статтi розглядається задача оптимального керування багатозначною траекторiєю з термiнальним критерiєм якостi. Пропонується чисельно-асимптотичний метод розв'язання, що базується на зведеннi даної задачi до задачi математичного програмування.
Ключовi слова: задачi керування, багатозначнi вiдображення, диференцiальнi рiвняння з похiдною Хукухари, кусково-сталi керованi системи.

Арсирий А. В. Метод решения задачи оптимального управления многозначной траекторией с терминальным критерием качества. В данной статье рассматривается задача оптимального управления многозначной траекторией с терминальным критерием качества. Предлагается численно-ассимптотический метод решения, основанный на сведении данной задачи к задаче многомерной оптимизации.
Ключевые слова: задачи управления, многозначные отображения, дифференциальные уравнения с производной Хукухары, кусочно-постоянные управляемые системы.

Arsirii A. V. Method of solving the optimal control problem of the setvalued trajectory with terminal criteria of quality. In the given article we consider the optimal control problem of the setvalued trajectory with the terminal criteria of quality. The approximated (numerical) method of control problem decision is offered. This method is based on leading the initial control problem to the mathematical programming problem.
Key words: control problem, set-valued map, differential equation with the Hukuhara derivative, piecewise constant control systems.

Введение.

С конца 60-х годов 20 века началось бурное развитие теории многозначных отображений и в [10] M. Hukuhara ввел производную и интеграл от многозначных отображений и исследовал их связь между собой. Впоследствии, в работе F. S. de Blasi и F. Iervolino [7] были рассмотрены дифференциальные уравнения с производной Хукухары, введены различные определения решений и доказаны теоремы их существования [8, 9], а M. Kisielewicz [13] и А. В. Плотников [5] рассмотрели возможность применения некоторых схем усреднения для них.

Уравнения с производной Хукухары были использованы А. А. Толстоноговым [6] при изучении некоторых свойств "интегральной воронки" дифференциального включения в Банаховом пространстве, а O. Kaleva [11, 12] использовал их при исследовании уравнений с нечеткими начальными условиями.

В данной статье рассматривается задача управления системой, состояние которой описывается дифференциальным уравнением с производной Хукухары. В статьях [1, 14] обосновывается возможность замены исходного допустимого управления на приближенное кусочно-постоянное. В данной статье приводится алгоритм численно-ассимптотического метода решения рассматриваемой задачи для случая R^2, основанный на сведении задачи управления к задаче многомерной оптимизации.

Пусть R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство векторов $x = (x_1, ..., x_n)^T$ с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Пусть $Conv(R^n)$ пространство непустых компактных и выпуклых подмножеств евклидового пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A, B) = min\{r \geq 0 | A \subset S_r(B), B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in Conv(R^n)$, $S_r(a)$ – шар радиуса r с центром в точке a.

Определение 1. [4] *Пусть $A, B \in Conv(R^n)$. Если существует множество $C \in Conv(R^n)$ такое, что $A = B + C$, то C называется разностью Хукухары множеств A и B и обозначается $A \overset{h}{-} B$.*

Определение 2. [4] *Многозначное отображение $F(\cdot) : R^1 \to Conv(R^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t \in R^1$, если существует $D_h F(t) \in Conv(R^n)$ такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{1}{\Delta t}(F(t + \Delta t) \overset{h}{-} F(t)), \quad \lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{1}{\Delta t}(F(t) \overset{h}{-} F(t - \Delta t))$$

существуют и равны $D_h F(t)$.

Основные результаты.

Рассмотрим управляемое дифференциальное уравнение с производной Хукухары вида:

$$D_h X(t, u) = A(t)X(t, u) + F(t, u), \quad X(0, u) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$; $u(t) \in R^n$ — управляющее воздействие; $X(\cdot, u) : [0, T] \times R^n \to Conv(R^n)$ — многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_h X(t, u)$ — производная Хукухары; $A(t)$ — матрица с элементами $a_{ij}(t)$ порядка $(n \times n)$; $F(\cdot, u) : [0, T] \times R^n \to Conv(R^n)$ — многозначное отображение.

Введем следующий критерий качества

$$I(u) = \Phi(X(T, u)), \tag{2}$$

где $\Phi(\cdot) : Conv(R^n) \to R^1$.

Определение 3. [3] *Множество измеримых функций таких, что $u(t) \in U$ для всех $t \in [0, T]$, будем называть множеством допустимых управлений и обозначать $LU[0, T]$ (или LU).*

Далее в качестве множества допустимых управлений будем рассматривать произвольные прямоугольные области $LU = \prod_{j=1}^{n} [u^j_{min}, u^j_{max}]$.

Если провести замену исходного измеримого управления $u(t)$ в задаче управления (1), (2) кусочно-постоянной функцией, то решение задачи станет намного более простым. Разработан алгоритм построения приближенного кусочно-постоянного управления.

Теорема 1. [2, 14] *Пусть $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^n(t))$ — измеримая функция на отрезке $[0, T]$ такая, что $u^j(t) \in [u^j_{min}, u^j_{max}]$, $j = \overline{1, n}$ для всех $t \in [0, T]$. Разобьем отрезок $[0, T]$ на k частей $[(i-1)\Delta, i\Delta]$, $i = \overline{1, k}$, $\Delta = \frac{T}{k}$. Тогда существует кусочно-постоянная функция $\overline{u}(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\overline{u}(t)$ — постоянная на каждом из отрезков $[(i-1)\Delta, i\Delta], i = \overline{1, k}$;

2) $\overline{u}_i(t) = \{(\overline{u}^1_i(t), ..., \overline{u}^n_i(t))^T : \overline{u}^j_i(t) \in \{u^j_{min}, u^j_{max}\}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}\}$ для всех $t \in [0, T]$;

3) для любого $t \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$\left\| \int_0^t u(s)ds - \int_0^t \overline{u}(s)ds \right\| \leq \frac{1}{2} \|u_{max} - u_{min}\| \Delta. \tag{3}$$

где $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$.

В следующей теореме доказана близость решений уравнения (1), соответствующих исходному измеримому управлению и построенному кусочно-постоянному.

Теорема 2. [14] *Пусть уравнение (1) удовлетворяет следующим условиям:*
1) матрица $A(t)$ — измерима на $[0, T]$;
2) существует константа $a > 0$ такая, что $\|A(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a^2_{ij}(t)} \leq a$ для почти всех $t \in [0, T]$;
3) многозначное отображение $F(t, u)$ измеримо по t и непрерывно по u;
4) существует измеримая функция $f(t) > 0$ такая, что $h(F(t, u), \{0\}) \leq f(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$ и $\forall u \in LU$;
5) для всех $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in LU$ и $t \in [0, T]$ существует константа μ такая, что

$$h\left(\int_0^t F(s, u_1(s))ds, \int_0^t F(s, u_2(s))ds \right) \leq \mu \left\| \int_0^t u_1(s)ds - \int_0^t u_2(s)ds \right\|.$$

Также пусть $u(\cdot)$ — произвольное допустимое управление, а $X(t, u)$ — соответствующее ему многозначное решение уравнения (1) с начальным условием $X(0, u) = X_0$. Разобъем отрезок $[0, T]$ на k частей и сконструируем управление $\overline{u}(\cdot)$, согласно теореме 1, и пусть $X(t, \overline{u})$ — соответствующее многозначное решение уравнения (1) с начальным условием $X(0, \overline{u}) = X_0$. Тогда для всех $t \in [0, T]$ выполняется неравенство

$$h(X(t, u), X(t, \overline{u})) \leq C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|, \tag{4}$$

где $C_1 = \mu e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

Также доказана близость значений критериев качества, соответствующих исходному измеримому управлению и построенному кусочно-постоянному.

Теорема 3. [1] *Пусть задача (1), (2) удовлетворяет следующим условиям:*
1) матрица $A(t)$ *— измерима на* $[0,T]$*;*
2) существует константа $a > 0$ *такая, что* $\|A(t)\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a^2_{ij}(t)} \le a$ *для почти всех* $t \in [0,T]$*;*
3) многозначное отображение $F(t,u)$ *измеримо по* t *и непрерывно по* u*;*
4) существует измеримая функция $f(t) > 0$ *такая, что* $h(F(t,u),\{0\}) \le f(t)$ *для почти всех* $t \in [0,T]$ *и* $\forall u \in LU$*;*
5) для всех $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in LU$ *и* $t \in [0,T]$ *существует константа* μ *такая, что*

$$h\left(\int\limits_0^t F(s,u_1(s))ds, \int\limits_0^t F(s,u_2(s))ds\right) \le \mu \left\|\int\limits_0^t u_1(s)ds - \int\limits_0^t u_2(s)ds\right\|;$$

6) отображение $\Phi(\cdot)$ *непрерывно на* $Conv(R^n)$ *и удовлетворяет условию Липшица с постоянной* λ*.*

$u(t)$ *— произвольное допустимое управление для уравнения (1) на промежутке времени* $[0,T]$*. Разобъем отрезок* $[0,T]$ *на* k *частей и сконструируем управление* $\overline{u}(t)$*, согласно теореме 1. Тогда для всех* $t \in [0,T]$ *выполняется неравенство*

$$|I(u) - I(\overline{u})| \le C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|, \tag{5}$$

где $C_2 = \lambda\mu e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

Приведем алгоритм метода решения данной задачи оптимального управления (1), (2) для R^2. Для простоты будем считать матрицу A и отклонение F постоянными.

Зададим $\varepsilon > 0$. Найдем Δ из выражения:

$$0 \le \Delta \le \frac{\varepsilon}{\lambda\mu e^{aT}\|u_{max} - u_{min}\|}.$$

Получаем разбиение промежутка времени на $k = \frac{T}{\Delta}$ частей:

$$t_0 = 0,\ t_k = T,\ t_i = t_0 + i\Delta,\ i = 1, ..., k. \tag{6}$$

Пусть $u^*(\cdot)$ — оптимальное допустимое управление. Если построить приближенное кусочно-постоянное управление $\overline{u}^k(\cdot)$ согласно теореме 1, то

$$|I(u^*) - I(\overline{u}^k)| \le \lambda\mu e^{aT} \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но мы не знаем управление $u^*(\cdot)$ и поэтому не можем построить управление $\overline{u}^k(\cdot)$. Значит найдем оптимальное управление $\overline{u}^k_*(\cdot)$ по данному разбиению Δ.

Очевидно, что $I(\overline{u}_*^k) \geq I(\overline{u}^k)$. (Так как разбиение промежутка времени остается неизменным.)

Следовательно, $I(u^*) \geq I(\overline{u}_*^k) \geq I(\overline{u}^k)$, т.е.

$$|I(u^*) - I(\overline{u}_*^k)| \leq \lambda \mu e^{aT} \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как на каждом из промежутков $[t_{i-1}, t_i]$ управление постоянно, то

$$\overline{u}^k(t) = \begin{cases} w_1, & t \in [t_0, t_1] \\ w_2, & t \in [t_1, t_2] \\ \dots & \\ w_k, & t \in [t_{k-1}, t_k] \end{cases}, w_i \in U. \tag{7}$$

Запишем уравнение (1) в виде интегрального уравнения при $u(t) = \overline{u}^k(t)$.

$$X(t, \overline{u}^k) = X_0 + \int\limits_0^t \left[AX(s, \overline{u}^k) + F(s, \overline{u}^k(s))\right] ds.$$

Воспользуемся возможностью аппроксимации "ломаными Эйлера"

$$X(t_i, w_1, ..., w_i) = X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}) + \Delta[AX(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}) + F(t_{i-1}, w_i)],$$

$$X(t_0, \overline{u}^k) = X_0.$$

Применим аппарат опорных функций

$$C(X(t_i, w_1, .., w_i), \psi) = C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), \psi) +$$

$$+\Delta[C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), A^T\psi) + C(F(t_{i-1}, w_i), \psi)]. \tag{8}$$

Таким образом получили расчетную формулу для построения аппроксимации "ломанными Эйлера" дифференциального уравнения с производной Хукухары. Значение $C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), A^T\psi)$ будем искать следующим образом:

$$C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), A^T\psi) =$$

$$= C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), \frac{A^T\psi}{\|A^T\psi\|}) \left\|A^T\psi\right\|. \tag{9}$$

Вектор ψ меняется, поэтому найденное значение $C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), A^T\psi)$ следует суммировать со значениями $C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), \psi)$ и $C(F(t_{i-1}, w_i), \psi)$, которым соответствует такое же значение ψ.

Таким образом, решать уравнение (1) в явном виде довольно трудно, т.к. решением является многозначное отображение, но это оказывается вполне выполнимым, если иметь дело не с самим множеством, а с его опорной функцией.

Разобьем сегмент $[0, 2\pi]$ на m частей и получим m значений угла γ. Очевидно, что точность найденного управления зависит от m. То есть мы будем в два раза увеличивать число точек разбиения m, пока не достигнем нужной нам точности нахождения оптимального управления. Вектор ψ определим следующим образом

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \psi_1 = \cos\gamma, \\ \psi_2 = \sin\gamma. \end{matrix} \tag{10}$$

Затабулируем для каждого значения угла γ значение опорной функции начального множества X^0, т.е. $C(X^0, \psi)$, а также значения опорной функции множества F, т.е. $C(F, \psi)$. В каждый момент времени t_i мы получаем m значений опорной функции и m значений опорного вектора ψ, которые определяют m точек на границе множества $X(t_i, w_1, ..., w_i)$. Однако сами точки мы получить не сможем, т.к. опорная функция определяет целую опорную гиперплоскость и неизвестно, какая именно точка этой гиперплоскости является точкой границы множества $X(t_i, w_1, ..., w_i)$. Но мы сможем построить приближение множества $X(t_i, w_1, ..., w_i)$ в виде описанного многоугольника, вершинами которого являются точки пересечения гиперплоскостей, определяемыми опорными функциями и опорными векторами. Для нахождения каждой j-й вершины многоугольника для множества, образуемого отображением $X(t_i, w_1, ..., w_i)$ в конкретный момент времени, будем решать систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^1\psi_1^j + x_1^2\psi_2^j = C(X(t_i), \psi^j), \\ x_1^1\psi_1^{j+1} + x_1^2\psi_2^{j+1} = C(X(t_i), \psi^{j+1}). \end{array} \right. \tag{11}$$

После первого шага мы получим выражения для значений опорной функции $C(X(t_1, w_1), \psi)$ и точек границы множества $X(t_1, w_1)$, зависящие от w_1,

$$C(X(t_1, w_1), \psi) : \left\{ \begin{array}{l} C(X(t_1, w_1), \psi^1) \\ C(X(t_1, w_1), \psi^2) \\ \dots \\ C(X(t_1, w_1), \psi^m) \end{array} \right\},$$

$$X(t_1, w_1) : \left\{ \begin{array}{l} X^1_{(1)}(t_1, w_1), X^2_{(1)}(t_1, w_1) \dots X^n_{(1)}(t_1, w_1) \\ X^1_{(2)}(t_1, w_1), X^2_{(2)}(t_1, w_1) \dots X^n_{(2)}(t_1, w_1) \\ \dots \\ X^1_{(m)}(t_1, w_1), X^2_{(m)}(t_1, w_1) \dots X^n_{(m)}(t_1, w_1) \end{array} \right\}.$$

После второго шага – зависящие от w_1 и w_2

$$C(X(t_2, w_1, w_2), \psi) : \left\{ \begin{array}{l} C(X(t_2, w_1, w_2), \psi^1) \\ C(X(t_2, w_1, w_2), \psi^2) \\ \dots \\ C(X(t_2, w_1, w_2), \psi^m) \end{array} \right\},$$

$$X(t_2, w_1, w_2) : \left\{ \begin{array}{l} X^1_{(1)}(t_2, w_1, w_2), X^2_{(1)}(t_2, w_1, w_2) \dots X^n_{(1)}(t_2, w_1, w_2) \\ X^1_{(2)}(t_2, w_1, w_2), X^2_{(2)}(t_2, w_1, w_2) \dots X^n_{(2)}(t_2, w_1, w_2) \\ \dots \\ X^1_{(m)}(t_2, w_1, w_2), X^2_{(m)}(t_2, w_1, w_2) \dots X^n_{(m)}(t_2, w_1, w_2) \end{array} \right\}$$

и т.д.

И, наконец, мы получим выражения для $C(X(T, w_1, \dots, w_k), \psi)$ и для $X(T, w_1, \dots, w_k)$, зависящие соответственно от $w_1, \dots w_k$:

$$C(X(T, w_1, \dots, w_k), \psi) : \left\{ \begin{array}{l} C(X(T, w_1, \dots, w_k), \psi^1) \\ C(X(T, w_1, \dots, w_k), \psi^2) \\ \dots \\ C(X(T, w_1, \dots, w_k), \psi^m) \end{array} \right\},$$

$$X(T,w_1,\ldots,w_k):\left\{\begin{array}{l} X^1_{(1)}(T,w_1,\ldots,w_k),\ldots X^n_{(1)}(T,w_1,\ldots,w_k)\\ X^1_{(2)}(T,w_1,\ldots,w_k),\ldots X^n_{(2)}(T,w_1,\ldots,w_k)\\ \ldots\\ X^1_{(m)}(T,w_1,\ldots,w_k),\ldots X^n_{(m)}(T,w_1,\ldots,w_k)\end{array}\right\}.$$

И теперь, чтобы найти управление, оптимальное для данного m (оптимальное будем понимать как максиминное или как максимаксное), которое будет гарантировать нам максимум критерия качества, нам следует решить задачу математического программирования:

$$I(w_1,w_2,\ldots,w_k)=\Phi(X(T,w_1,w_2,\ldots,w_k))\rightarrow max, \tag{12}$$

$$W:\{w_1,\ldots,w_k|w_1\in U,...,w_k\in U\}. \tag{13}$$

Сначала требуется решить m задач условной максимизации функций $k\times n$ переменных (так как сами векторы $w_1,w_2\ldots,w_k$ размерности n) на замкнутом множестве W:

$$\begin{array}{l}\Phi(X_{(1)}(T,w_1,w_2,\ldots,w_k))\rightarrow max,\\ \qquad w_1\in U,\qquad w_2\in U,\qquad \ldots\qquad w_k\in U;\\[1ex] \Phi(X_{(2)}(T,w_1,w_2,\ldots,w_k))\rightarrow max,\\ \qquad w_1\in U,\qquad w_2\in U,\qquad \ldots\qquad w_k\in U;\\ \qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\\ \Phi(X_{(m)}(T,w_1,w_2,\ldots,w_k))\rightarrow max,\\ \qquad w_1\in U,\qquad w_2\in U,\qquad \ldots\qquad w_k\in U.\end{array}$$

После чего мы получим m значений целевой функции и m значений управления $(w_1,w_2,\ldots,w_k)$.

Теперь мы находим максимальное значение из полученных значений целевых функций, и управление, соответствующее этому максимальному значению целевой функции, и будет искомым оптимальным для данного m управлением $\overline{u_*}$.

Будем считать, что оптимальное управление найдено с точностью ε и прекращаем счет, если

$$|I(\overline{u}^k_{*m})-I(\overline{u}^k_{*2m})|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{14}$$

где k — разбиение промужетка времени, оно не меняется, а m и $2m$ — разбиение сегмента $[0,2\pi]$ на последней и предпоследней итерации алгоритма.

Теперь, так как для нахождения $X_{(m)}(T,w_1,w_2,\ldots,w_k)$ мы использовали метод "ломаных Эйлера" (8), мы проверим возможность уточнить значение критерия качества. Поэтому при полученном управлении $\overline{u}^k_{*2m}$ разделим отрезок $[0,T]$ на $2k$ частей и найдем $X^{2k}(T,\overline{u}^k_{*2m})$, а затем $\Phi(X^{2k}(T,\overline{u}^k_{*2m}))$. Теперь, если выполняется неравенство

$$|\Phi(X^{2k}(T,\overline{u}^k_{*2m}))-I(\overline{u}^k_{*2m})|>\frac{\varepsilon}{2}, \tag{15}$$

то разделим отрезок $[0,T]$ уже на $4k$, найдем $X^{4k}(T,\overline{u}^k_{*2m})$ и т.д., а иначе прекращаем счет и будем считать, что критерий качества равен последнему найденному значению.

Наконец мы сможем получить численное выражение для решения дифференциального уравнения с производной Хукухары, подставив в найденные выше выражения для $X(t_i)$, зависящие от $w_1, \ldots, w_i$, полученные оптимальные значения управления.

Исходя из приведенного выше, мы можем привести формализованную запись алгоритма. Итак, *алгоритм решения задачи оптимального управления процессом, описываемым дифференциальным уравнением с производной Хукухары (1), (2):*

ШАГ 1. Задаем $\varepsilon > 0$ и находим $\Delta > 0$. Получаем разбиение промежутка времени с помощью (6) на k частей. Будем искать оптимальное для данного $\Delta > 0$ управление $\overline{u_*}$.

ШАГ 2. Обозначаем через w_i управление на каждом из промежутков времени $[t_{i-1}, t_i]$ по формуле (7).

ШАГ 3. Решаем приближенно задачу Коши (1) при помощи расчетной формулы (8), используя аппарат опорных функций для m значений опорного вектора ψ, и по формуле (11) восстанавливаем m значений точек границы многозначного отображения Y в каждый из моментов времени. (Точность найденного управления будет зависеть от m.)

ШАГ 4. Подставляем найденное значение X в выражение для критерия качества (2) и получим задачу математического программирования (12), (13). Вернее мы получим m задач математического программирования, которые могут быть решены любым из существующих методов. Если мы понимаем оптимальное для данного m управление как доставляющее максимум критерию качества, то это будут m задач условной максимизации функций на замкнутом множестве W, если как доставляющее минимум критерию качества — то это будут m задач условной минимизации функций на замкнутом множестве W.

ШАГ 5. Находим оптимальное для данного m управление — это то управление, которое привело к максимальной из полученных m целевых функций (в случае максимизации критерия качества) или к минимальной из полученных m целевых функций (в случае минимизации критерия качества).

ШАГ 6. Если это первая итерация, то повторяем шаги с 3 по 5 и затем переходим к шагу 7. В противном случае сразу же переходим к шагу 7.

ШАГ 7. Если выполняется неравенство (14), то считаем, что оптимальное управление найдено с точностью ε, прекращаем счет и переходим к шагу 8. Иначе мы переходим к шагу 3 и задаем разбиение сегмента $[0, 2\pi]$ на $2m$ частей.

ШАГ 8. В связи с тем, что на шаге 3 использовалась аппроксимация "ломаными Эйлера", необходимо проверить возможность уточнения значения критерия качества. При полученном на последней итерации управлении $\overline{u}^k_{*2m}$ разделим отрезок $[0, T]$ на $2k$ частей.

ШАГ 9. Находим $X^{2k}(T, \overline{u}^k_{*2m})$, а затем $\Phi(X^{2k}(T, \overline{u}^k_{*2m}))$.

ШАГ 10. Если не выполняется неравенство (15), то считаем, что критерий качества равен последнему найденному значению. Иначе разбиваем сегмент $[0, T]$ на $4k$ частей и переходим к шагу 9.

Заключение. В статье рассматривалась задача оптимального управления многозначной траекторией с терминальным критерием качества. Состояние системы в задаче описывается дифференциальным уравнением с производной Хукухары. Разработан численно-асимптотический метод решения, основанный на сведении данной задачи к задаче математического программирования при замене исходной функции управления на приближенную кусочно–постоянную.

1. **Арсирий А. В.** Кусочно-постоянные системы управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества [текст] / Арсирий А. В. // Вестник Одесского национального университета. Матем. и механ. — Одесса: ОНУ, 2012. – Т. 17, Вып. 4. – С. 9–15.
2. **Арсирий А. В.** Системы управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества [текст] / Арсирий А. В., Плотников А. В. // Украинский математический журнал. – Киев, 2009. – Т. 61, № 8. – С. 1141–1146.
3. **Ли Э. Б.** Основы теории оптимального управления [текст] / Ли Э. Б., Маркус Л. – М., 1972. – 576 с.
4. **Плотников А. В.** Дифференциальные уравнения с "четкой" и нечеткой многозначной правой частью [текст] / Плотников А. В., Скрипник Н. В. // Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 2009. – 191 с.
5. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н. – Одесса: Астропринт, 1999. – 354 с.
6. **Толстоногов А. А.** Дифференциальные включения в банаховом пространстве [текст] / Толстоногов А. А. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
7. **de Blasi F. S.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso [text] / de Blasi F. S., Iervolino F. // Boll. Unione Mat. Ital. – 1969. – Vol. 2, № 4–5. – P. 491–501.
8. **de Blasi F. S.** Euler method for differential equations with set-valued solutions [text] / de Blasi F. S., Iervolino F. // Boll.Unione Mat.Ital. – 1971. – Vol. 4, № 4. – P. 941–949.
9. **Brandao Lopes Pinto A. J.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions [text] / Brandao Lopes Pinto A. J., de Blasi F. S., Iervolino F. // Boll. U. M. I. – 1970. – № 4. – P. 534–538.
10. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe [text] / Hukuhara M. // Func. Ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205–223.
11. **Kaleva O.** Fuzzy differential equations [text] // Fuzzy Sets and Systems / Kaleva O. – 1987. – 24, № 3. – P. 301–317.
12. **Kaleva O.** The Cauchy problem for fuzzy differential equations [text] // Fuzzy Sets and Systems / Kaleva O. – 1990. – 35. – P. 389–396.
13. **Kisielewicz M.** Differential inclusion and optimal control [text] / Kisielewicz M. – Warszawa: PWN, 1991. – 239 p.
14. **Plotnikov A. V.** Piecewise Constant Control Set Systems [text] / Plotnikov A. V., Arsiry A. V. // American Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2011. – 1(2). – P. 89–93.